

Lösungen

1

```
Remove["Global`*"]
```

a

Da der 2. Eigenwert 1 ist, besitzt die Abbildung eine Fixgerade durch den Ursprung mit der Richtung des 2. Eigenvektors.

b

```
x1 = {2, 1}; x2 = {-1, 1};  
X = Transpose[{x1, x2}]; X // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
 $\lambda_1 = -3/2; \lambda_2 = 1;$ 
```

```
D $\lambda$  = {{ $\lambda_1$ , 0}, {0,  $\lambda_2$ }}; D $\lambda$  // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A = X.D $\lambda$ .Inverse[X]; A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

c

Die Diagonalisierung ist in b) benutzt worden.

```
Eigensystem[A]
```

$$\left\{ \left\{ -\frac{3}{2}, 1 \right\}, \left\{ \{2, 1\}, \{-1, 1\} \right\} \right\}$$

Der 2. Eigenvektor ist hier verkürzt angegeben.

d

```
mE = IdentityMatrix[2]; mE // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Det[A - λ mE]
```

$$-\frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2} + \lambda^2$$

```
Factor[Det[A - λ mE]]
```

$$\frac{1}{2} (-1 + \lambda) (3 + 2 \lambda)$$

```
Det[Dλ - λ mE]
```

$$-\frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2} + \lambda^2$$

A und D haben dasselbe charakteristische Polynom.

```
Pλ[λ_] := (λ - 1) (λ - 3 / 2); Pλ[λ] // Expand
```

$$\frac{3}{2} - \frac{5 \lambda}{2} + \lambda^2$$

e

```
Det[A]
```

$$-\frac{3}{2}$$

```
Pλ[0]
```

$$\frac{3}{2}$$

```
λ1 λ2
```

$$-\frac{3}{2}$$

```
λ1 + λ2
```

$$-\frac{1}{2}$$

f

```
v1 = x1; v2 = {3, 1};
```

```
XB = Transpose[{v1, v2}]; XB // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B = XB.Dλ.Inverse[XB]; B // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 6 & -15 \\ \frac{5}{2} & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

g

Det[B - λ mE]

$$-\frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2} + \lambda^2$$

B hat dasselbe charakteristische Polynom wie A. Daraus liest man ab, dass B und A dieselbe Spur und dieselbe Determinante haben.

h

A.B // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -\frac{49}{6} & \frac{125}{6} \\ -\frac{55}{12} & \frac{137}{12} \end{pmatrix}$$

B.A // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{17}{2} & -\frac{25}{2} \\ \frac{15}{4} & -\frac{21}{4} \end{pmatrix}$$

Eigenvalues[A.B]

$$\left\{ \frac{9}{4}, 1 \right\}$$

Eigenvalues[B.A]

$$\left\{ \frac{9}{4}, 1 \right\}$$

Eigensystem[A.B]

$$\left\{ \left\{ \frac{9}{4}, 1 \right\}, \{2, 1\}, \left\{ \frac{25}{11}, 1 \right\} \right\}$$

Eigensystem[B.A]

$$\left\{ \left\{ \frac{9}{4}, 1 \right\}, \{2, 1\}, \left\{ \frac{5}{3}, 1 \right\} \right\}$$

A.B und B.A haben dieselben Eigenwerte, also dieselbe Diagonalmatrix, aber nicht dieselben Eigenvektoren.

i

P1 = {-2, -1}; P2 = {-1, -3}; P3 = {2, -2};

Q1 = A.P1

$\{3, \frac{3}{2}\}$

Q2 = A.P2

$\{\frac{17}{3}, \frac{1}{3}\}$

Q3 = A.P3

$\{2, -2\}$

j

Senkr[a_] := {-a[[2]], a[[1]]};

FlaechenProd[a_, b_] := Senkr[a].b

FlaechenProd[P2 - P1, P3 - P1]

7

FlaechenProd[Q2 - Q1, Q3 - Q1]

$-\frac{21}{2}$

FlaechenProd[Q2 - Q1, Q3 - Q1] / FlaechenProd[P2 - P1, P3 - P1]

$-\frac{3}{2}$

FlaechenProd[Q2 - Q1, Q3 - Q1] / FlaechenProd[P2 - P1, P3 - P1] == λ1 λ2

True

FlaechenProd[Q2 - Q1, Q3 - Q1] / FlaechenProd[P2 - P1, P3 - P1] == Det[A]

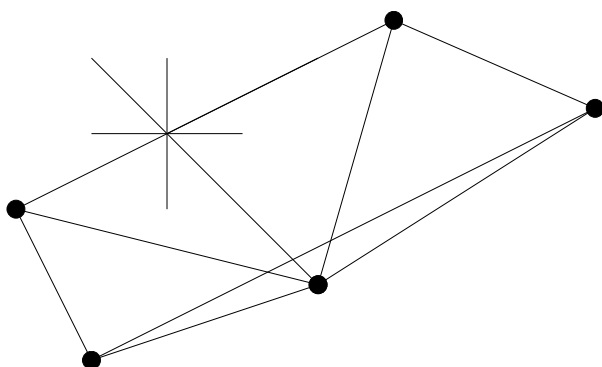
True

k

```

o = {0, 0};
Show[Graphics[
  {
    Line[{{-1, 0}, {1, 0}}, Line[{{0, -1}, {0, 1}}],
    Line[{o, x1}], Line[{o, x2}],
    Line[{P1, P2, P3, P1}],
    Line[{Q1, Q2, Q3, Q1}],
    Line[{o, P3}], Line[{P1, Q1}], Line[{P2, Q2}],
    PointSize[0.03], Point[P1],
    Point[P2], Point[P3], Point[Q1], Point[Q2], Point[Q3]
  }
], AspectRatio -> Automatic];

```



2

```
Remove["Global`*"]
```

Die Abbildungen A.B und B.A lassen sich nacheinander konstruieren, was geometrisch interessant ist, weil Fixpunktgeraden auftreten.

```

x1 = {2, 1}; x2 = {-1, 3};
X = Transpose[{x1, x2}]; X // MatrixForm

```

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

```
λ1A = 2; λ2A = 1; λ1B = 1; λ2B = -3;
```

```
DλA = {{λ1A, 0}, {0, λ2A}}; DλA // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
DλB = {{λ1B, 0}, {0, λ2B}}; DλB // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

DλB.DλA // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

DλA.DλB // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

A = X.DλA.Inverse[X]; A // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

B = X.DλB.Inverse[X]; B // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ \frac{12}{7} & -\frac{17}{7} \end{pmatrix}$$

A.B == (X.DλA.Inverse[X]) . (X.DλB.Inverse[X])

True

B.A == (X.DλB.Inverse[X]) . (X.DλA.Inverse[X])

True

A // Eigensystem

$$\{\{2, 1\}, \{\{2, 1\}, \{-\frac{1}{3}, 1\}\}\}$$

B // Eigensystem

$$\{\{-3, 1\}, \{\{-\frac{1}{3}, 1\}, \{2, 1\}\}\}$$

A.B // Eigensystem

$$\{\{-3, 2\}, \{\{-\frac{1}{3}, 1\}, \{2, 1\}\}\}$$

B.A // Eigensystem

$$\{\{-3, 2\}, \{\{-\frac{1}{3}, 1\}, \{2, 1\}\}\}$$

(X.DλA.Inverse[X]) . (X.DλB.Inverse[X]) // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{10}{7} \\ \frac{15}{7} & -\frac{16}{7} \end{pmatrix}$$

A.B // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{10}{7} \\ \frac{15}{7} & -\frac{16}{7} \end{pmatrix}$$

```
(X.DλB.Inverse[X]).(X.DλA.Inverse[X]) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{10}{7} \\ \frac{15}{7} & -\frac{16}{7} \end{pmatrix}$$

```
B.A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{10}{7} \\ \frac{15}{7} & -\frac{16}{7} \end{pmatrix}$$