Test ◇ E+M1–07/08–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

Diverses aus Vektoralgebra, Geometrie, Matrizen– und Determinantenrechnung

Probl. 1 Gegeben ist ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt $M(5,\,4)$ und dem Radius $r = 2$. Dazu sei $P_0(1,\,1)$ ein Punkt, den wir als Pol bezeichnen.

(a) Berechne die Polare p zu P_0 sowie deren Schnittpunkte mit k_1. Skizziere alsdann die Situation.

(b) Berechne die Tangenten von P_0 aus an k_1 und dazu die Tangentenschnittpunkte mit k_1. Trage die erhaltenen Punkte in die Skizze ein.

(c) Berechne eine Gleichung für die Gerade $g_1 = \overline{P_0M}$. Berechne damit die Schnittpunkte $g_1 \cap k_1$. Trage die erhaltenen Punkte in die Skizze ein.

(d) Berechne einen Punkt P_1, so dass k_1 der Apolloniuskreis zu $\overline{P_0P_1}$ ist. Trage den erhaltenen Punkt in die Skizze ein. Was fällt an diesem Punkt besonders auf?

(e) Gegeben ist ein zweiter Kreis mit dem Mittelpunkt P_0 und dem Radius $2\,r$. Suche zu k_1 und k_2 die Potenzgerade und skizziere die Situation.

(f) Bestimme den Schnittpunkt der Potenzgeraden mit der Geraden durch die beiden Kreismittelpunkte.

Probl. 2 Gegeben sind: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(a) Berechne B^{-1}.

(b) Berechne $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$.

(c) Berechne $A \cdot A$ und $A \cdot A \cdot \ldots \cdot A = A^{10}$.

(d) Berechne $\det(A)$ und $\det(D)$. Was stellt man fest?

(e) Berechne $A \cdot \vec{a}$ und $A \cdot \vec{b}$.

(f) Berechne $A \cdot (\lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b})$.

(g) Der Ursprung spannt mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Parallelogramm auf. Berechne den Inhalt F_1 dieser Figur.

(h) Berechne den Inhalt $F_2(\lambda,\,\mu)$ der Figur, die durch den Ursprung und $\lambda\,\vec{a}$ sowie $\mu\,\vec{b}$ gegeben ist.

(i) Berechne $\dfrac{F_2(\lambda,\,\mu)}{F_1}$

Probl. 3 Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C:

$$A = A(0,\,0),\;\; B = B(10,\,0),\;\; C = C(3,\,8).$$

(a) Berechne den Höhenschnittpunkt H.

(b) Berechne den Schnittpunkt der Schwerlinien S.

(c) Berechne den Umkreismittelpunkt U.

(d) Wie steht es mit der linearen Abhängigkeit der Vektoren $\overrightarrow{US}$ und $\overrightarrow{UH}$?

(e) Berechne das Verhältnis $\dfrac{|\,\overrightarrow{UH}\,|}{|\,\overrightarrow{US}\,|}$.

(f) Sei $\vec{a} = \overrightarrow{UA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{UB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{UC}$. Berechne $\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ und $\vec{s} = \dfrac{1}{3}\,(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Fällt dabei etwas auf?

(g) Bekanntlich schneidet eine Schwerlinie durch einen Eckpunkt die dem Eckpunkt gegenüber liegende Seite genau in der Seitenmitte. Diesen Schnittpunkt nennen wir Seitenmittelpunkt S_a, S_b oder S_c. Berechne den Umkreismittelpunkt U_S des Dreiecks $\triangle(S_a\,S_b\,S_c)$ und auch den Radius r_S dieses Dreiecks.

(h) Eine von einem Eckpunkt aus gezogene Höhe schneidet die gegenüberliegende Seite hingegen im Höhenfusspunkt H_a, H_b oder H_c. Berechne den Umkreismittelpunkt U_H des Dreiecks $\triangle(H_a\,H_b\,H_c)$ und auch den Radius r_H dieses Dreiecks. Fällt dabei etwas auf?

(i) Untersuche, wie es steht mit der linearen Abhängigkeit der Vektoren $\overrightarrow{UH}$ und $\overrightarrow{UU_H}$.

(j) Berechne das Verhältnis $\dfrac{|\,\overrightarrow{UH}\,|}{|\,\overrightarrow{UU_H}\,|}$.

Probl. 4 Gegeben ist ein Dreieck im Raum mit den Eckpunkten A, B und C, das als Grundfläche G eines Körpers dient. Es gilt: $A = A(0,\,0,\,1)$, $B = B(10,\,0,\,1)$, $C = C(3,\,8,\,3)$. Weiter ist ein Punkt $D = D(1,\,2,\,8)$ gegeben. Die Figur $ABCD$ bildet somit ein Tetraeder.

(a) Berechne den Volumeninhalt, den Grundflächeninhalt und daraus die Länge der Höhe h_D von D aus auf die Grundfläche G.

(b) Berechne den Höhenfusspunkt H_D von h_D in der Grundfläche G.

(c) Nun wird D so verschoben, dass die Länge der Höhe nicht ändert, der neue Höhenfusspunkt jedoch mit C zusammenfällt. Berechne die Koordinaten von D.

Viel Glück!