

- Wichtig:**
- ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
  - ♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
  - ♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
  - ◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
  - ♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
  - ♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

### Diverses aus Matrizenrechnung und Eigenwerttheorie

**Probl. 1** Gegeben sind die Vektoren  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ .  $\vec{x}_1$  und  $\vec{x}_2$  sind die Eigenvektoren einer Matrix  $A$ . Der zu  $\vec{x}_1$  gehörige Eigenwert ist  $\lambda_1 = 20$ , der zu  $\vec{x}_2$  gehörige Eigenwert ist  $\lambda_2 = 30$ .

- (a) Bilde mit den Vektoren  $\vec{x}_1$  und  $\vec{x}_2$  eine Matrix  $X$  und berechne ihre Eigenwerte. Sind diese Eigenwerte ganzzahlig?
- (b) Entscheide, ob die Matrix  $A$  eine Fixgerade besitzt. (Begründung!)
- (c) Konstruiere die Matrix  $A$  und vergleiche sie mit der Matrix  $B = \begin{pmatrix} 21 & 6 \\ \frac{3}{2} & 29 \end{pmatrix}$ . Was stellt man fest?
- (d) Diagonalisiere  $A$ :  $A = X \cdot D \cdot X^{-1}$  und berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von  $D$ .
- (e) Berechne und vergleiche die charakteristischen Polynome  $P_A(\lambda)$  und  $P_D(\lambda)$  von  $A$  und  $D$ .
- (f) Ermittle aus diesen Polynomen die Spur sowie die Determinante von  $A$  und  $D$ .
- (g) Gegeben ist der Punkt  $P_1(5, -3)$ . Bilde diesem Punkt mit Hilfe der Matrix  $A$  ab, d.h. berechne den Bildpunkt  $Q$ .
- (h) Berechne auch die Eigenwerte von  $B$ . Was stellt man fest?

**Probl. 2** Gegeben sind die Punkte  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(2, 0)$ ,  $P_3(3, 2)$ .

- (a) Konstruiere die Drehmatrix  $D(\varphi)$  mit  $\varphi = 62^\circ$ .
- (b) Drehe damit das Dreieck  $F_1 = \triangle(P_1P_2P_3)$  um  $\varphi$  und berechne die Eckpunkte des Bilddreiecks  $F_2 = \triangle(Q_1Q_2Q_3)$ .

**Probl. 3** Gegeben ist Gerade  $g$ :  $\vec{v} = \vec{0} + t \cdot \vec{x}_1$  mit  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  sowie der Punkte  $P(7, -2)$ .

- (a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix  $S(g)$ .
- (b) Spiegele damit  $P$ , d.h. berechne den Bildpunkt  $Q$ .

**Probl. 4** Gegeben sind die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Kontrolliere, ob diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  bilden zusammen mit dem Ursprung  $O$  eine Ebene  $\Phi$ .  $\vec{u}$  zeigt die Projektionsrichtung bei der Projektion auf  $\Phi$  an.

- Zeige die Kontrolle der linearen Unabhängigkeit der drei oben erwähnten Vektoren.
- Konstruiere die Projektionsmatrix.
- Projiziere den Punkt  $P(100, 100, 100)$  in  $\Phi$ , d.h. berechne den Bildpunkt  $Q$ .

**Probl. 5** Durch die Gerade  $g : \vec{x} = \vec{0} + t \cdot \vec{a}$ ,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , ist eine Drehachse im Raum gegeben. Der Punkt  $P(5, 4, 6)$  soll um  $g$  mit Blickrichtung  $-\vec{a}$  um  $+36^\circ$  gedreht werden.

- Konstruiere die Drehmatrix.
- Berechne den Bildpunkt  $Q$  von  $P$  bei der Drehung.

**Probl. 6** Zum Punkt  $P(10, 10)$  gehört der Ortsvektor  $\vec{x}_0 = \overrightarrow{OP}$ .  $\vec{x}_0$  wird mit Hilfe der Matrix  $D = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{7}) & -\sin(\frac{\pi}{7}) \\ \sin(\frac{\pi}{7}) & \cos(\frac{\pi}{7}) \end{pmatrix}$  in  $\vec{y}_0 = D \cdot \vec{x}_0$  abgebildet. Anschliessend wird  $\vec{y}_0$  mit Hilfe der Matrix  $S = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$  in  $\vec{x}_1 = S \cdot \vec{y}_0$  abgebildet. Dieses Verfahren wird danach nach den Regeln  $\vec{y}_n = D \cdot \vec{x}_n$  und  $\vec{x}_{n+1} = S \cdot \vec{y}_n$  fortgesetzt. Berechne die ersten Glieder der Folge  $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$  und zeichne die dazugehörigen Punkte in eine *Skizze* ein. Was ist zu *vermuten* über die entstehende Folge der Vektoren bezüglich ihrer Lage und eventueller Konvergenz?

Viel Glück!