Test ◊ **E+M1–08/09–01** ◊

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◊ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Probl. 1 Erkläre so gut wie möglich, was die folgenden Matlab-Befehle (Octave-Befehle) machen resp. welche Ausgabe zu erwarten ist:

(a) `u=[0 2 4 8 9]; length(u)`

(b) `u=[0 2 4 8 9]; size(u)`

(c) `m=[3 0 -5]; n=[2 1 6]; m+n`

(d) `m=[3 0 -5]; n=[2 1 6]; dot(m,n)`

(e) `m=[3 0 -5]; n=[2 1 6]; cross(m,n)`

(f) `format long; a=sqrt(90)`

Probl. 2 Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a\,x + 2\,y + 3\,z &= 4 \\ b\,x - 2\,y + 3\,z &= 4 \\ x + 2\,y - c\,z &= d \end{aligned}$$

(a) Löse das Gleichungssystem mit Hilfe des Gauss-Algorithmus für $a = b = 1$, $c = 3$, $d = 4$. (Der Algorithmus muss nachvollziehbar sein.)

(b) Löse das Gleichungssystem (Algorithmus hier frei wählbar) für $b = 1$, $c = 3$, $d = 4$ und berechne die Lösungen in Abhängigkeit von a. Gibt es ein a, für das das System keine oder undendlich viele Lösungen hat? (Im Falle von unendlich vielen Lösungen ist die Dimension des Lösungsraumes anzugeben.)

(c) Löse das Gleichungssystem (Algorithmus hier frei wählbar) für $a = 1$, $c = 3$, $d = 4$ und berechne die Lösungen in Abhängigkeit von b. Gibt es ein b, für das das System keine oder undendlich viele Lösungen hat? (Im Falle von unendlich vielen Lösungen ist die Dimension des Lösungsraumes anzugeben.)

(d) Löse das Gleichungssystem (Algorithmus hier frei wählbar) für $a = b = 1$, $d = 4$ und berechne die Lösungen in Abhängigkeit von c. Gibt es ein c, für das das System keine oder undendlich viele Lösungen hat? (Im Falle von unendlich vielen Lösungen ist die Dimension des Lösungsraumes anzugeben.)

(e) Löse das Gleichungssystem (Algorithmus hier frei wählbar) für $a = b = 1$, $c = 3$ und berechne die Lösungen in Abhängigkeit von d. Gibt es ein d, für das das System keine oder undendlich viele Lösungen hat? (Im Falle von unendlich vielen Lösungen ist die Dimension des Lösungsraumes anzugeben.)

Probl. 3 Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dar. (Anzugeben sind die Streckungsfaktoren der Basisvektoren.)

Probl. 4 Die vorhin definierten Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ bilden mit dem Ursprung ein Tetraeder.

(a) Berechne das Tetraedervolumen.

(b) Durch den Ursprung und die drei Vektoren werden drei Kanten definiert. Berechne die drei Winkel zwischen den Kanten in Grad (numerisch, 2 Stellen hinter dem Komma exakt) und stelle fest, ob diese gleich oder verschieden sind.

Probl. 5 Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{OP_0} = \vec{w} = \begin{pmatrix} 2.00 \\ -1.00 \end{pmatrix}$.

(a) Der Punkt P wird um den Winkel $\varphi = +38.96^o$ um O gedreht.
Berechne den Bildpunkt P'.

(b) P' wird an der Geraden $g: \ \vec{r}(t) = \vec{w} + t \begin{pmatrix} 1.50 \\ 2.50 \end{pmatrix}$ gespiegelt.
Berechne den Bildpunkt P''.

Probl. 6 Gegeben sind zwei Geraden im Raum: $g_1 : \ \vec{x}_1 = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}_1$ sowie $g_2 : \ \vec{x}_2 = \vec{r}_2 + \mu\,\vec{a}_2$ gegeben. Dabei ist $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Weiter ist der Punkt $P_0(5; 5; 5)$ gegeben.

(a) Stelle fest, ob die Geraden windschief sind.

(b) Berechne den kürzesten Abstand zwischen den Geraden, falls sie sich nicht schneiden.

(c) Berechne einen Vektor $\vec{n}$, der zu beiden Geraden normal steht und die Länge 1 hat. (Dezimalbrüche, 3 Stellen hinter dem Komma exakt).

(d) Berechne den Abstand des Punktes P_0 von der Ebene $\Phi : \ \vec{x} = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}_1 + \mu\,\vec{a}_2$.

Viel Glück!