Test $\diamondsuit$ **M2–07/08–02** $\diamondsuit$

Wichtig: $\heartsuit$ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
$\clubsuit$ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
$\spadesuit$ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
$\diamondsuit$ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
$\heartsuit$ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Fourier

Probl. 1 Sei die $2\,\pi$–periodische Funktion $f(x)$ gegeben durch $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $(0, 2\,\pi)$.

(a) Bestimme die Fourierreihe von f.

(b) Berechne damit die folgenden Reihen:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Hinweis: Dirichletsche Bedingung für die Konvergenz ... An den Sprungstellen Konvergenz gegen das arithmetische Mittel ... Parceval ...

(c) Durch f wird nun eine Funktion beschrieben, die im Labor mittels Überlagerung von Sinus– und Cosinusfunktionen erzeugt werden soll. Man verwendet dazu einfach die ersten hundert Glieder der jeweiligen Summen in der Fourierentwicklung von f und bricht dann ab. Wie verhält sich voraussichtlich die so konstruierte Näherungsfunktion an den Sprungstellen von f ?
(Stichwortartige Begründung.)

(d) Skizziere und beschreibe die einfachste stetige Funktion, die als Fourierreihe eine reine Sinusreihe hat, $8\,\pi$–periodisch ist und auf dem Intervall $(0, 2\,\pi)$ durch $f(x) = x^2$ gegeben ist. Begründe die Wahl.

Probl. 2 (a) Suche die Fourierreihe für die Funktion

$$f_1(t) \;=\; \begin{cases} t & t \in [0, \pi) \\ \text{sonst periodisch} & T = \pi \end{cases}$$

(b) Bestimme mit Hilfe der jetzt bekannten Fourierreihe die Fourierreihe der zweiten Funkton

$$f_2(t) \;=\; \begin{cases} 3 - t & t \in [0, \pi) \\ \text{sonst periodisch} & T = \pi \end{cases}$$

Probl. 3 (a) Suche die Fourierreihe für die Funktion

$$f_3(x) \;=\; \begin{cases} 2 + 2\,\cos(x) & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \text{sonst periodisch} & \text{Periode } = \pi \end{cases}$$

(b) Kann man bei dieser Reihe beurteilen, ob und allenfalls wie das Gibbs'sche Phänomen hier zur Wirkung kommt?

(c) Differenziere diese Fourierreihe gliedeweise. Welche Fourierreihe $f_4(x)$ entsteht jetzt und konvergiert diese Reihe noch?

(d) Im Falle der Konvergenz: Welche allenfalls einfache Funktion wird durch f_4 dargestellt?

(e) Schreibe die oben gegebene Fourierreihe $f_4(x)$ in komplexer Darstelltung.

(f) Bestimme daraus das Amplitudenspektrum und das Phasenspektrum (die ersten 4 Werte genügen allenfalls, falls man kein allgemeines Gesetz sieht).

Probl. 4 Gegeben sind die Messwerte $\{(0, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (5, 3), (6, 2), \ldots\}$. Wie man sieht, zeigt sich nach den ersten 3 Messwerten eine Periodizität: $y_k = y_{k+3}$.

(a) Bestimme mittels DFT eine Fourierreihe für diese Messserie und stelle die erhaltene Funktion sowie die Messwerte in einer Skizze dar.

(b) Ist es hier möglich, eine FFT zu machen?

(c) Beschreibe in wenigen Sätzen, wie man die Messungen gewinnen müsste, um mit FFT arbeiten zu können.

Probl. 5 Sei $H(x)$ die Einheitssprungfunktion mit der Sprungstelle $x = 0$ und $H(x - k)$ diejenige mit der Sprungstelle $x = k$. Weiter sind folgende Funktionen gegeben:

$$f_1(x) = (H(x+2) - H(x-2)), \qquad f_2(x) = (4 - x^2)\,(H(x+2) - H(x-2)),$$

$$F_3(\Omega) = \frac{(\cos(\Omega) + \sin(\Omega))}{\Omega}$$

(a) Skizziere die Funktion $f_1(x)$.

(b) Skizziere die Funktion $f_2(x)$.

(c) Berechne die Fouriertransformierte von $f_1(x)$

(d) Berechne die Fouriertransformierte von $f_2(x)$

(e) Berechne die inverse Fouriertransformierte von $F_3(\Omega)$

Probl. 6 **Technisch–wissenschaftliche Fachlektüre, Testverständnis:**
Lese das beiliegende Blatt aufmerksam durch und beantworte die folgenden Fragen:

(a) Im Text wird gezeigt, dass man mit Hilfe eines Separationsansatzes zu Basislösungen gelangen kann. Welche unbekannten Funktionsanteile im Zusammenhang mit den Basislösungen kann man dann mit Hilfe der Fouriertransformation berechnen?

(b) Sei $c = 1$ und $f(x) = 1, \;\; x \in [-1,\; 1], \;\; f(x) = 0$ sonst. Sei $g(x) = f(x - 100) \cdot f(x)$. Berechne $\hat{f}(\lambda)$ und $\hat{g}(\lambda)$.

(c) Berechne damit die Lösung für das eingangs gestellte Problem und die eben gegebenen Parameter resp. Funktionen für $x = t = 1$.

Viel Glück!

Fouriertransformationen und partielle Differentialgleichungen

Bsp.: Wir studieren das Beispiel einer einfachen Wellengleichung mit nur einer Ortsvariablen. Sei dabei $|u(x,t)|$ beschränkt und $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\begin{aligned} c^2\, u''_{xx} - u''_{tt} &= 0 & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(x,0) &= f(x) & x \in \mathbb{R},\ (ABD) \\ {u_t}'(x,0) &= g(x) & x \in \mathbb{R},\ (ABD) \end{aligned}$$

Wir machen den Separationsansatz: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Daraus folgt:

$$X \cdot T''_{tt} = c^2 \cdot X''_{xx} \cdot T \ \Rightarrow\ \frac{1}{c^2} \cdot X \cdot T''_{tt} = X''_{xx} \cdot T \ \Rightarrow\ \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''_{tt}}{T} = \frac{X''_{xx}}{X} := \pm\lambda^2,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Da die linke und die rechte Seite der letzten Gleichung von verschiedenen Variablen abhängen, erhalten wir daraus zwei separate Gleichungen. Jeweils der linke Ausdruck ist gleich $\pm\lambda^2$. $\rightsquigarrow$

$$T''_{tt} = \pm\lambda^2\, c^2\, T \qquad \text{und} \qquad X''_{xx} = \pm\lambda^2 \cdot X$$

Je nach „+“ oder „-“ erhalten wir damit die Lösungspaare:

$$T = C_1 \cdot e^{\pm\lambda\, c\, t},\ \ X = C_2 \cdot e^{\pm\lambda\, x} \qquad \text{und} \qquad T = A \cdot e^{\pm i\, \lambda\, c\, t},\ \ X = B \cdot e^{\pm i\, \lambda\, x}$$

Das ergibt die folgenden Kombinationen:

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= C_1 \cdot e^{i\,\lambda(x-c\,t)} \\ u_2(x,y) &= C_2 \cdot e^{i\,\lambda(x+c\,t)} \\ u_3(x,y) &= C_3 \cdot e^{-i\,\lambda(x-c\,t)} \\ u_4(x,y) &= C_4 \cdot e^{-i\,\lambda(x+c\,t)} \end{aligned}$$

Diese vier Funktionen lassen sich trigonometrisch als Linearkombinationen von $\cos(\pm\lambda(x+c\,t)) = \cos(\lambda(x+c\,t))$ und $\cos(\pm\lambda(x-c\,t)) = \cos(\lambda(x-c\,t))$ sowie $i\,\sin(\pm\lambda(x+c\,t)) = \pm i\,\sin(\lambda(x+c\,t))$ und $i\,\sin(\pm\lambda(x-c\,t)) = \pm i\,\sin(\lambda(x-c\,t))$ linear zusammensetzen. Dafür genügt aber schon die Basis $\{\cos(\lambda(x+c\,t)),\ \cos(\lambda(x-c\,t)),\ i\,\sin(\lambda(x+c\,t)),\ i\,\sin(\lambda(x-c\,t))\}$. Diese Basis lässt sich, wie man leicht sieht, aus $u_1(x,y)$ und $u_2(x,y)$ gewinnen, womit $u_1(x,y)$ und $u_2(x,y)$ als Basislösungen genügen. Damit ist bei gegebenen λ die folgende Funktion $u_\lambda(x,t)$ eine Lösung:

$$u_\lambda(x,t) = C_1(\lambda) \cdot e^{i\,\lambda(x-ct)} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\,\lambda(x+ct)} = e^{i\,\lambda\,x} \cdot (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\,\lambda\,c\,t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\,\lambda\,c\,t})$$

Wir definieren nun: $\quad l := \dfrac{2\,\pi}{\lambda},\ \ \nu := \dfrac{c}{l},\ \ \omega = 2\,\pi\,\nu\ \Rightarrow\ \dfrac{\omega}{2\,\pi} = \nu = \dfrac{c}{l} = \dfrac{c\,\lambda}{2\,\pi}\ \Rightarrow\ \lambda\,c = \omega$

Damit wird: $\quad u_\lambda(x,t) = e^{i\,\lambda\,x} \cdot (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\,\omega\,t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\,\omega\,t})$

Nun gilt für $c^2\,u''_{xx} - u''_{tt} = 0$ das „Superpositionsprinzip“: Zu zwei Lösungen $u_{\lambda_1}(x,t)$ und $u_{\lambda_2}(x,t)$ ist auch jede Linearkombination $\alpha\,u_{\lambda_1}(x,t) + \beta\,u_{\lambda_2}(x,t)$ Lösungen. Speziell ist also $u_{\lambda_1}(x,t) + u_{\lambda_2}(x,t)$ eine Lösung. Da für λ einzig die Forderung $\lambda \in \mathbb{R}$ gemacht worden ist, kann λ nicht als diskreter Summationsindex angenommen werden. Statt von einer Summenlösung mit beliebig vielen Summanden müssen wir daher eine Integrallösung als „Superposition“ annehmen:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\,\omega\,t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\,\omega\,t}) \cdot e^{i\,\lambda\,x}\, d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\,\lambda\,c\,t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\,\lambda\,c\,t}) \cdot e^{i\,\lambda\,x}\, d\lambda$$

Dabei erhalten wir als Anfangsbedingungen für $t = 0$ die Anfangsintegrale:

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) \cdot e^{i\,\lambda\,x}\, d\lambda = f(x) \qquad \text{und}$$

$$\frac{\partial\, u(x,t)}{\partial\, t}\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} i\,\lambda\, c\,(-C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) \cdot e^{i\,\lambda\,x}\, d\lambda = g(x)$$

Diese Integrale erkennen wir aber als die **Fourier–Rücktransformierten** von $v(\lambda) := (C_1(\lambda) + C_2(\lambda))$ und von $w(\lambda) := i\,\lambda\,c\,(-C_1(\lambda) + C_2(\lambda))$. Daher sind $v(\lambda)$ und $w(\lambda)$ die **Fourier–Transformierten** von $f(x)$ und $g(x)$.

Dazu kennen wir die Formeln:

$$v(\lambda) := (C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\,\lambda\,x}\, dx$$

$$w(\lambda) := i\,\lambda\,c\,(-C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) = \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\,\lambda\,x}\, dx$$

$$\Rightarrow\; C_1(\lambda) = \frac{1}{2}(v(\lambda) - \frac{w(\lambda)}{i\,\lambda\,c}) = \frac{1}{2}(\hat{f}(\lambda) - \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\,\lambda\,c}), \qquad C_2(\lambda) = \frac{1}{2}(v(\lambda) + \frac{w(\lambda)}{i\,\lambda\,c}) = \frac{1}{2}(\hat{f}(\lambda) + \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\,\lambda\,c})$$

$$\Rightarrow\; u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\,\lambda\,c\,t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\,\lambda\,c\,t}) \cdot e^{i\,\lambda\,x}\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2}(\hat{f}(\lambda) - \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\,\lambda\,c})(\lambda) \cdot e^{-i\,\lambda\,c\,t} + \frac{1}{2}(\hat{f}(\lambda) + \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\,\lambda\,c})(\lambda) \cdot e^{i\,\lambda\,c\,t}) \cdot e^{i\,\lambda\,x}\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\hat{f}}{2}\,(e^{-i\,\lambda\,c\,t} + e^{i\,\lambda\,c\,t}) - \frac{1}{\lambda\,c}\,\frac{\hat{g}}{2\,i}\,(e^{-i\,\lambda\,c\,t} - e^{i\,\lambda\,c\,t})) \cdot e^{i\,\lambda\,x}\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}\,\cos(\lambda\,c\,t) - \frac{1}{\lambda\,c}\,\hat{g}\,\sin(\lambda\,c\,t)) \cdot e^{i\,\lambda\,x}\, d\lambda$$

Folgerung: Damit erhalten wir die folgende **Lösung** von $c^2\,u''_{xx} - u''_{tt} = 0$ und obigen Anf'bed.:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(\lambda)\,\cos(\lambda\,c\,t) - \frac{1}{\lambda\,c}\,\hat{g}(\lambda)\,\sin(\lambda\,c\,t)) \cdot e^{i\,\lambda\,x}\, d\lambda \qquad \text{mit}$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\,\lambda\,x}\, dx, \qquad \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\,\lambda\,x}\, dx$$