

Für die folgenden Aufgaben ist notfalls ein Computer zu verwenden (Skizze!):

Probl. (1) Kurzprojekt Schwingungen:

Konsultiere den Abschnitt 6.3.1., Schwingungen und Oszillatoren im Skript „Mathematik II“ unter dem Link

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweid.pdf> resp.

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweidf.pdf> resp.

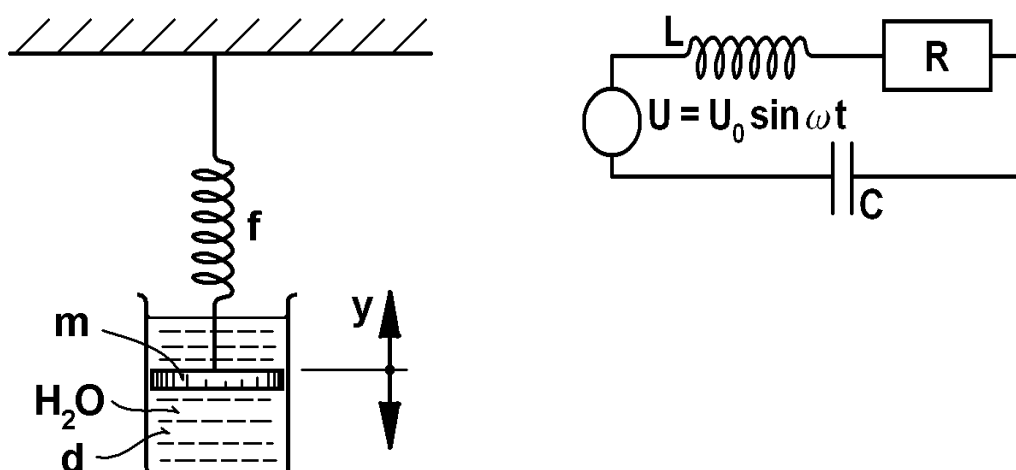
<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweif.pdf>

Orientiere dich über das Thema „Schwingung und Differentialgleichungen“. Was dort noch über Laplace-Transformationen steht, kann auf der momentanen Kenntnisstufe weggelassen werden.

Zitat:

(Aus dem 1. Beispiel) Annahme:

Dämpfungskraft \sim Geschwindigkeit \dot{y} , Proportionalitätskonstante d (Dämpfungskonstante)



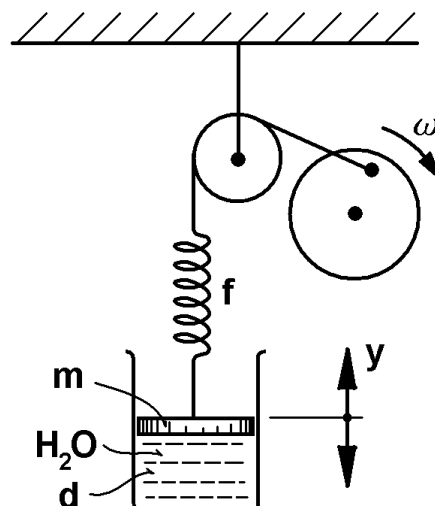
Mit dem Federgesetz ergibt sich dann: $m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + f \cdot y = 0$, $f = \text{Federkonstante}$

$$\text{Sei } 2\rho = \frac{d}{m}, \quad \omega^2 = \frac{f}{m} \Rightarrow \ddot{y} + 2\rho \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$$

(Aus dem 2. Beispiel)

Falls zusätzlich eine Anregerkraft F wirkt, etwa über einen Exzenter, so erhält man die folgende D'Gl:

$$F(t) = k \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow$$



$$E(y) \equiv \ddot{y} + 2\rho \dot{y} + \omega_0^2 y = k \cdot \sin(\omega t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Aus physikalischen Gründen kann man vermuten: $y(t) = A \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi)$

Ende Zitat

Aufgabe ==> %

- (a) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 0$ und $f = 1$, äussere Kraft = 0. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (b) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 0$ wie oben, äussere Kraft = 0. Die Verwendete Feder soll pro Längeneinheit dieselbe Federkonstante wie oben haben. Die Feder soll aber doppelt so lang sein.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (c) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fäll $m = 2$, $d = 0$ und $f = 1$ wie oben, äussere Kraft = 0.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (d) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 0$ und $f = 1$ wie ganz oben, äussere Kraft = 10. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (e) Stelle die Differentialgleichungen auf für die Fall einer horizontalen Situation, dass jetzt Masse $m = 1$ und zweimal die Feder, wie in der 1. Aufgabe verwendet wird, $d = 0$. Die Abfolge der Federn und Massen ist ist wie folgt:
Feder₁ — Masse — Feder₂, äussere Kraft = 0. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 5$, $y_2'(0) = 0$.
Bemerkung: Für jede Masse muss man eine Differentialgleichung aufstellen. Die beiden Gleichungen kann man entkoppeln.
- (f) Stelle die Differentialgleichungen auf für die Fall einer horizontalen Situation, dass jetzt zweimal die Masse $m = m_1 = m_2 = 1$ und dreimal die Feder, wie in der 1. Aufgabe verwendet wird, $d = 0$. Die Abfolge der Federn und Massen ist ist wie folgt:
Feder₁ — Masse₁ — Feder₂ — Masse₂ — Feder₃, äussere Kraft = 0. Löse diese Differentialgleichung.
 $y_1(x)$ und $y_2(x)$ seien die Auslenkungen der beiden Massen aus ihren Ruhelagen. Für die Anfangsbedingungen sei: $y_1(0) = 2$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = -1$, $y_2'(0) = 0$, Position von m_2 im Koordinatensystem von m_1 : $d = -6$.
Bemerkung: Für jede Masse muss man eine Differentialgleichung aufstellen. Die beiden Gleichungen kann man entkoppeln.
- (g) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 0$ und $f = 1$, äussere Kraft = $\sin(t)$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (h) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 1$ und $f = 1$, äussere Kraft = 0. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (i) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 1$ und $f = 1$, äussere Kraft = $\sin(t)$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (j) Eine Masse m ist an zwei parallelen Federn aufgehängt mit $f_1 = 3$ und $f_2 = 4$. Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 2$ und $d = 1$, äussere Kraft = $4 \sin(2x)$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Bemerkung: Erst muss aus f_1 und f_2 die gemeinsame Konstante f errechnet werden.

Probl. (2) Linienintegral

Konsultiere die Abschnitte 6.4.1., Linienintegrale ff im Skript „Mathematik II“ unter dem Link

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweid.pdf> resp.

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweidf.pdf> resp.

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweif.pdf>

Orientiere dich über das Thema „Linienintegrale“. Was dort noch über weitere Begriffe steht (Differentialoperatoren) steht, kann auf der momentanen Kenntnisstufe weggelassen werden.

$$(a) \text{ Sei } \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ 5z \\ 10x \end{pmatrix}, \quad \gamma: t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2]$$

$$i. \text{ Berechne das Linienintegral} \quad W = \int_0^2 \vec{F} \cdot \vec{x}_t' dt = \int_0^2 \langle \vec{F}, \vec{x}_t' \rangle dt$$

$$ii. \text{ Berechne das Linienintegral} \quad W = \int_{|\gamma|} |\vec{F}| d|\gamma|$$

$$(b) \text{ Sei nun } \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ 5z \\ 10x \end{pmatrix}, \quad \gamma: t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 2t^2 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$i. \text{ Berechne das Linienintegral} \quad W = \int_0^2 \vec{F} \cdot \vec{x}_t' dt = \int_0^2 \langle \vec{F}, \vec{x}_t' \rangle dt$$

$$ii. \text{ Berechne das Linienintegral} \quad W = \int_{|\gamma|} |\vec{F}| d|\gamma|$$

$$(c) \text{ Sei nun } \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ 5z \\ 10x \end{pmatrix}, \quad \gamma: t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \\ 1 + \sin(3t) \end{pmatrix}$$

$$i. \text{ Berechne das Linienintegral} \quad W = \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot \vec{x}_t' dt = \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}, \vec{x}_t' \rangle dt$$

$$ii. \text{ Berechne das Linienintegral} \quad W = \oint_{|\gamma|} |\vec{F}| d|\gamma|$$

Probl. (3) Spezielle Differentialgleichungen

- (a) Studiere die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \alpha y(x) = f(x)$$

- (b) Studiere die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = f(x)$$

- (c) Studiere die der Differentialgleichung

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = f(x)$$

$$\text{mit } \alpha = 2, \beta = -1, c_1 = 1, c_2 = 1, f(x) = \cos(x)$$

- (d) Studiere die der Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - y(x) = \cos(x + 1), y(x) = 1, y'(x) = 0$$