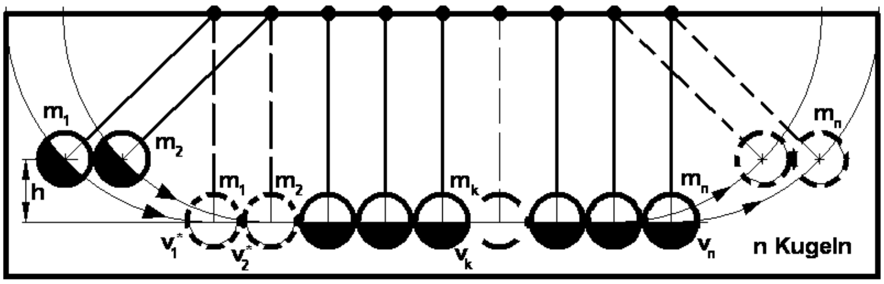
Übungen zu Modell und Realität ◇ Ph. / H I / zu Kap. 6 ◇



Problem:

n gleiche Kugeln mit gleicher Masse $m = m_1 = m_2 = \ldots = m_n$ hängen in einer Reihe an gleich langen Fäden an einem Balken. Die 2 äusseren linken Kugeln (siehe Figur) werden nach aussen in der Vertikalebene aller Kugeln auf die Höhe h über der Ruheposition hochgezogen und losgelassen. Diese Kugeln schwingen darauf nach unten und prallen dort auf die andern Kugeln. Man beobachtet nahezu elastische Stösse, die in idealer Form rechnerisch behandelt werden sollen. Weiter beobachtet man, dass die Stösse sich über alle n Kugeln bis zu den letzten beiden fortpflanzen und dass darauf diese nach rechts oben schwingen. Da jedoch die andern Kugeln oft auch noch etwas schwingen oder wackeln, soll man durch eine Rechnung mit Hilfe des Energiesatzes und des Impulssatzes abklären, ob das genannte Wackeln von Ungenauigkeiten in der Ausführung des Experiments (ungenauen Massengleichheiten, ungenaue Fadenlängen usw.) herrührt oder ob es theoretisch falsch ist, dass nur die letzen beiden Kugeln nach rechts schwingen müssen, während die andern Kugeln ruhen sollten.

Lösung:

Annahmen: Für die Massen gelte: $m = m_1 = m_2 = \ldots = m_n$. Und für die Höhen der Kugelschwerpunkte unter der horizontalen Balkenlinie gelte $h = h_1 = h_2 = \ldots = h_n > 0$. Zudem gilt links unmittelbar vor dem Stoss für die Maximalgeschwindigkeiten: $v_1^* = v_2^* := v_0$.

Energiebilanz am Anfang:

$$E_{pot.,links} = 2 \cdot (m \cdot g \cdot h) = E_{kin.,links} = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2)$$

$$\Rightarrow\ 2 \cdot m \cdot g \cdot h = m \cdot v_0^2\ \Rightarrow\ 2 \cdot g \cdot h = v_0^2\ \Rightarrow\ v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} > 0$$

Unterwegs pflanzt sich die kinetische Energie derart fort, dass nach dem Stoss z.B. die Kugel mit der Nummer k die Geschwindigkeit v_k besitzt, $1 \leq k \leq n$. Die Energiebilanz zeigt die Beziehung:

$$E_{kin.,links} = m \cdot v_0^2 = E_{kin.,unterwegs} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_n^2 = \frac{1}{2}\, m \sum_{k=1}^{n} v_k^2$$

Dabei kann man $\sum_{k=1}^{n} v_k^2$ als Skalarprodukt eines Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$ mit sich selbst deuten.

Es gilt also: $\sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \vec{w} \circ \vec{w} = |\vec{w}|^2$. Damit dürfen wir folgern:

$$m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |\vec{w}|^2 \;\;\Rightarrow\;\; 2\,v_0^2 = |\vec{w}|^2$$

Zur Impulsbilanz zwischen dem Anfang des Stosses links und der Impulsfortpflanzung danach:

$$p_{links,\,vor\,Stoss} = 2 \cdot (m \cdot v_0) = p_{nach\,Stoss} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 + \ldots + m_n \cdot v_n$$
$$= m\,(v_1 + \ldots + v_n) \;\;\Rightarrow\;\; 2\,v_0 = v_1 + \ldots + v_n$$

Hier treffen wir die Annahme, dass alle $v_k \neq 0$ sind. Ansonst würden wir diejenigen v_k mit $v_k = 0$ weglassen, wodurch n etwas kleiner werden würde.

Der Ausdruck $v_1 + \ldots + v_n = v_1 \cdot 1 + \ldots + v_n \cdot 1$ kann man aber als Skalarprodukt der folgenden Vektoren deuten:

$$v_1 \cdot 1 + \ldots + v_n \cdot 1 = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}}_{\vec{w}} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{d}_n} = |\vec{w}| \cdot \underbrace{|\vec{d}_n|}_{\sqrt{n}} \cdot \cos(\underbrace{\angle(\vec{w},\,\vec{d}_n)}_{:=\varphi}) = |\vec{w}| \cdot \sqrt{n} \cdot \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow\;\; 2\,v_0 = v_1 + \ldots + v_n = |\vec{w}| \cdot \sqrt{n} \cdot \cos(\varphi) \;\;\Rightarrow\;\; |\vec{w}| = \frac{2\,v_0}{\sqrt{n} \cdot \cos(\varphi)}$$

Wegen $2\,v_0^2 = |\vec{w}|^2$ erhalten wir damit *ein nicht sehr erstaunliches Resultat:*

$$2\,v_0^2 = |\vec{w}|^2 = \frac{2^2\,v_0^2}{(\sqrt{n})^2 \cdot \cos^2(\varphi)} = \frac{4\,v_0^2}{n \cdot \cos^2(\varphi)} \;\;\Rightarrow\;\; 1 = \frac{2}{n \cdot \cos^2(\varphi)} \;\;\Rightarrow\;\; \cos^2(\varphi) = \frac{2}{n} \leq 1 \;\;\Rightarrow\;\; n \geq 2$$

Damit können wir uns wegen $n \geq 2$ zuerst mit dem Fall $n = 2$ beschäftigen. Hier reduziert sich das eingangs mittels Energiebilanz und Impulsbilanz gewonnene Gleichungssystem respektive das reduzierte System rechts wie folgt:

$$\begin{aligned} m \cdot v_0^2 &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2) \\ 2 \cdot m \cdot v_0 &= m\,(v_1 + \ldots + v_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot v_0^2 &= v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 && (1) \\ 2 \cdot v_0 &= v_1 + \ldots + v_n && (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot v_0^2 &= v_1^2 + v_2^2 && (3) \\ 2 \cdot v_0 &= v_1 + v_2 && (4) \end{aligned}$$

Aus Gleichung (4) findet man $v_1 = 2\,v_0 - v_2$ und erhält dann eingesetzt in (3):

$$2 \cdot v_0^2 = (2\,v_0 - v_2)^2 + v_2^2 = 4\,v_0^2 - 4\,v_0\,v_2 + v_2^2 + v_2^2 \;\;\Rightarrow\;\; 0 = 2\,v_0^2 - 4\,v_0\,v_2 + 2\,v_2^2$$
$$\Rightarrow\;\; v_0^2 - 2\,v_0\,v_2 + v_2^2 = (v_0 - v_2)^2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; v_0 = v_2$$

Damit ergibt sich $v_1 = 2\,v_0 - v_2 = 2\,v_0 - v_0 = v_0 \;\;\Rightarrow\;\; v_2 = v_2 = v = 2$. Man hat also eine eindeutige Lösung, was allerdings bei $n = 2$ nicht erstaunlich ist.

Nun kommt die Frage auf, was jetzt für $n > 2$ passiert, zum Beispiel für $n = 3$. Da hat man wiederum wegen der Energiebilanz und der Impulsbilanz das hier gültige Gleichungssystem:

$$2 \cdot v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \tag{5}$$
$$2 \cdot v_0 = v_1 + v_2 + v_3 \tag{6}$$

Es handelt sich da um 2 Gleichungen mit den 3 Unbekannten v_1, v_2, v_3, wobei die eine der Gleichungen dazu noch quadratisch ist. Eine weitere Gleichung ist nicht auszumachen, womit man feststellen muss, dass für eine der Unbekannten ein Wert innerhalb der Schranken der Vernunft frei wählbar sein muss. Damit hätte man unendlich viele Lösungen, was nicht mit der praktischen Realität übereinstimmt, zeigt doch das Experiment immer dasselbe Resultat. Wo liegt das Problem?

Die **Lösung** dieses Dilemmas findet sich in der *Unzulänglichkeit des Modells*. Um zu einer akzeptablen Erklärung zu kommen müssen wir in unserem Fall das Modell „mikroskopisieren“, das heisst wir müssen die Vorgänge der Impuls und der Energieübertragung in genügend kleinen Zeitintervallen betrachten.

Am Anfang schwingen die Kugeln mit den Nummern 1 und 2 zusammen nach unten. Sie werden dabei in der Regel eine winzige positive Distanz zwischeneinander aufweisen. Beim Aufprall stösst dann zuerst die Kugel 2 auf die Kugel 3 und überträgt ihre Energie sowie ihren Impuls. Dazu benötigt sie eine sehr kleine Zeitspanne. Wir können nun wie folgt argumentieren: Danach oder schon während der eben geschilderten Energie– und Impulsübertragung übertägt die Kugel 1 ihre Energie und ihren Impuls auf die Kugel 2. Danach schwingen demnach diese beiden Kugeln (3) und (2) nach rechts. Man hat hier demnach eine Energie– und Impulsübertragung zwischen drei Kugeln: Zwischem dem Paar (1, 2) und dem Paar (2, 3), symbolisch: $\begin{pmatrix} 2 \to 3 \\ 1 \to 2 \end{pmatrix}$.

Befindet sich noch eine Kugel 4 rechts anschliessend an die Kugel 3, so folgt auf die Übertragung $\begin{pmatrix} 2 \to 3 \\ 1 \to 2 \end{pmatrix}$ unmittelbar anschliessend die Übertragung $\begin{pmatrix} 3 \to 4 \\ 2 \to 3 \end{pmatrix}$, zusammengenommen also $\begin{pmatrix} 2 \to 3 \to 4 \\ 1 \to 2 \to 3 \end{pmatrix}$. Dieses Argumentationsverfahen können wir auch auf n Kugeln anwenden. So erhalten wir die gesamte Übertragung $\begin{pmatrix} 2 \to 3 \to 4 \to \ldots \to n \\ 1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to n-1 \end{pmatrix}$.

Fazit: Dieses Beispiel lehrt uns, dass wir mit Hilfe eines einfachen Modells nicht immer jedes Problem, welches physikalisch eine eindeutige Lösung hat, durch Modellrechnung auch eindeutig lösen können. Dann muss eine Modellerweiterung stattfinden. Das heisst, wir müssen neue physikalische Argumentationen finden, um zu einer Lösung zu kommen.

Wir1 / im März 2011