

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

1 Organisatorisches – Quant à l’organisation	1
2 Aussagenlogik – Log.d. prop.	3
2.1 Elementare Logik – Logique élém.	3
2.2 Wichtig – Important	3
2.3 Bsp. f. Wahrheitstab. – Ex. p. tab. d. vér.	4
2.4 Aussageformen – Formes propos.	4
2.5 Spez. Aussageformen – Formes propos. spéc.	5
2.6 Korr. log. Schluss – Concl. log. corr.	6
2.7 Polnische Notation – Notation polonaise	6
2.8 Quantoren – Quantificateurs	7
2.9 Normalformen – Formes normales	7
2.10 Resultate – Résultats	8
2.11 Literatur – Littérature	9
3 Mengen Rel., Abb. – Ensembles, rel., appl.	11
3.1 Mengen – Ensembles	11
3.1.1 Definitionen – Définitions	11
3.1.2 Neue Mengen – Nouveaux ensembles	11
3.1.3 Mengenverknüpfungen – Compositions	12
3.2 Relationen – Relations	13
3.2.1 Definitionen – Définitions	13
3.2.2 Spezielle Relationen – Relations spéciales	14
3.2.3 Partitionen – Partitions	16
3.3 Abb. u. Funktionen – Applications et fonc.	17
3.3.1 Definitionen – Définitions	17
3.3.2 Verkettungen von Funktionen – Composition de fonctions	18
3.4 Lösungsmengen — Ensembles de solution	20
4 Zahlen, Indukt., Rekurs. – Nombres, ind. rékurs.	23
4.1 Nat. Zahlen \mathbf{N} – Nombres nat. \mathbf{N}	23
4.1.1 Axiomatische Einführung – construction axiomatique	23
4.1.2 Operationen auf \mathbf{N} – Opérations sur \mathbf{N}	24
4.1.3 Vollständige Induktion – Induction complète	25
4.1.4 Rekursion – Récursion	27
4.1.5 Ordnungsrelation – Relation d’ordre	28
4.1.6 Potenzen in \mathbf{N} – Puissances dans \mathbf{N}	29
4.1.7 Teiler, Vielfache – Diviseurs, multiples	29
4.2 Ganze Zahlen \mathbf{Z} – Nombres entiers \mathbf{Z}	29

4.2.1	Konstruktion von \mathbf{Z} – construction de \mathbf{Z}	29
4.2.2	Operationen auf \mathbf{Z} – Opérations sur \mathbf{Z}	30
4.2.3	Interpretation \mathbf{Z} – Interprétation \mathbf{Z}	30
4.2.4	0 und neegative \mathbf{Z} – 0 et \mathbf{Z} négatifs	31
4.2.5	Struktur – Structure	31
4.2.6	Ordnungsrelation – Relation d'ordre sur \mathbf{Z}	32
4.2.7	Weitere Ausdehnungen – Autres extensions	32
4.2.8	Teiler – Diviseurs	33
4.2.9	Kongruenzen – Congruences	35
4.2.10	Restklassenrechnen – Calcul avec classes de restes	35
4.2.11	Polynomringe – Anneaux de polynômes	37
4.2.12	Positionssysteme – Des systèmes de position	38
4.3	Ergänzungen – Annexe	38
4.3.1	Ausblick – Autres faits divers	41
4.4	Rat. Zahlen \mathbf{Q} – Nombres rationnels \mathbf{Q}	42
4.4.1	Definition – Définition	42
4.4.2	Operationen – Opérations	43
4.4.3	Einbettung – Plongement	43
4.4.4	Ordnungsrelation – Relation d'ordre	44
4.4.5	Eigenschaften – Qualités	44
4.5	Die Wurzel — La racine	45
4.5.1	Die Quadratwurzel — La racine carrée	45
4.5.2	Die n -te Wurzel — La n -ème racine	46
4.6	Reelle Zahlen und Folgen — Nombres réels et suites	47
4.6.1	Darstellungsarten — Façons de représentation	47
4.6.2	Zahlenerweiterung — Elargir les ensembles de nombres	49
4.6.3	Das Problem der Mächtigkeiten — Le problème de la puissance	50
4.6.4	Weitere Resultate — D'autres résultats	54
5	Vektoren – Vecteurs	57
5.1	Koordinatenunabhängig – Sans système de coordonnées	57
5.1.1	Inhalt – Contenu	57
5.1.2	Addition – Addition	58
5.1.3	Streckung – Allongement	59
5.1.4	Allgemeine Definition – Définition générale	60
5.1.5	Unterraum, direkte Summe – Sous-espace vectoriel, somme directe	61
5.1.6	Lineare Abhängigkeit – Dépendance linéaire	62
5.1.7	Basen – Des bases	65
5.1.8	Spezielle Vektoren – Des vecteurs spéciaux	68
5.2	Koordinatenabhängig – Dans un système de coordonnées	69
5.2.1	Grundlagen – Fondements	69
5.2.2	Normalsysteme – Systèmes normaux	70
5.2.3	Koordinatenvektoren – Vecteurs aux coordonnées	71
5.2.4	Basiswechsel – Changement de base	75
5.2.5	Vektor in einer neuen Basis – Vecteur dans une nouvelle base	75
5.2.6	Nach dem Austauschverfahren – d'après la méthode d'échange des vecteurs	75
5.2.7	Anwendungen — Applications	78
5.3	Geometrie – Géométrie	78
5.3.1	Elementare geometrische Sätze – Théorèmes géométriques élémentaires	79
5.3.2	Weitere Begriffe und Folgerungen – D'autres notions et conséquences	84
5.3.3	Sätze – Théorèmes	86
5.3.4	Drehungen – Rotations	90
5.3.5	Additionstheoreme – Théorèmes d'addition	92

5.3.6	Leben wir in einem 4-dim. Raum? – Vivons-nous dans un espace de dim. 4?	93
5.4	Skalarprodukt – Produit scalaire	94
5.4.1	Zur Definition – Quant à la définition	94
5.4.2	In Komponenten – Dans les composants	96
5.4.3	Anwendungen – Applications	97
5.4.4	Drehung eines Vektors — Déplacement angulaire d'un vecteur	98
5.5	Geradengleichungen – Equations de droites	99
5.5.1	Parametergleichungen – Equations paramétriques	99
5.5.2	Komponentengleichungen – Equations de composants	99
5.5.3	Gerade in Grundebene – Droite dans le plan fondamental	100
5.5.4	Andere Formen — D'autres formes	101
5.5.5	Winkel zwischen Geraden – Angle entre différentes droites	101
5.6	Ebenengleichungen – Equations de plans	102
5.6.1	Parametergleichungen – Equations paramétrique	102
5.6.2	Komponentengleichungen – Equations de composants	102
5.6.3	Koordinatengleichungen – Equations de coordonnées	102
5.6.4	Interpretation von Gleichungen – Interprétation d' équations	103
5.6.5	Spezielle Lage – Position spéciale	103
5.6.6	Übersicht – Vue générale	104
5.6.7	Hess'sche Normalform – Forme normale de Hess	105
5.7	Anwendungen – Applications	107
5.7.1	Abstand eines Punktes – Distance d'un point	107
5.7.2	Winkelhalbierende – Bissectrice	107
5.7.3	Kreis, Kugel, Ellipse – Cercle, sphère, ellipse	107
5.7.4	Spezielle Kreise, Kugeln – Cercles, sphères spéciales	108
5.7.5	Kegelschnitte – Sections des cônes	109
5.7.6	Tangente – Tangente	110
5.7.7	Polare — Polaire	111
5.7.8	Anwendung — Application	112
5.7.9	Potenz — Puissance	113
5.8	Vektorprodukt — Produit vectoriel	114
5.8.1	Flächenprodukt — 'Produit de surface'	114
5.8.2	Anwendungen — Applications	116
5.8.3	Vektorprodukt — Produit vectoriel	117
5.8.4	Definition Vektorprodukt — Définition produit vectoriel	117
5.8.5	Regeln — Règles	118
5.8.6	Anwendungen — Applications	120
5.9	Spatprodukt — Produit triple	121
5.9.1	Definition — Définition	121
5.9.2	Cramer — Cramer	124
5.9.3	Weitere Produkte — Autres produits	124
5.9.4	Kegel und Zylinder — Cône et cylindre	125
5.9.5	Ausblick — Perspectives	126
5.10	Berechnungen — Calculs	128
5.10.1	Koord'gleichung einer Ebene — Equation de coord. d'un plan	128
5.10.2	Spiegeln eines Punktes — Refléter un point	129
6	Komplexe Zahlen — Nombres complexes	131
6.1	Definition — Définition	131
6.1.1	Zahlenmenge — Ensemble de nombres	131
6.1.2	Operationen — Opérations	132
6.1.3	Einbettung — Plongement	134
6.1.4	Imaginäre Zahlen — Nombres imaginaires	134

6.1.5	Weitere Begriffe — D'autres notions	135
6.2	Eigenschaften — Qualités	135
6.2.1	Ordnung — Ordre	135
6.2.2	Rechenregeln — Règles de calcul	137
6.2.3	Multiplikation geometrisch — Multiplication géométriquement	138
6.2.4	Exponentialschreibweise — Notation exponentielle	138
6.2.5	Anwendung (Zeigerdiagramme) — Application (Diag. d. coord.)	140
6.3	Wurzeln in \mathbf{C} — Racines dans \mathbf{C}	141
6.3.1	Das Problem — Le problème	141
6.3.2	Ausblicke — Perspectives	143
6.4	Hauptsatz der Algebra — Théorème principal de l'algèbre	146
6.4.1	Der Satz — Le Théorème	146
6.4.2	Anwendungen — Applications	148
6.4.3	Kubische Gleichung — Equation cubique	150
6.4.4	Herleitung des Hauptsatzes — Dédution du théorème principal	151
6.5	Weitere Anwendungen — Autres applications	155
6.5.1	Summe der Einheitswurzeln — Somme des racines de l'unité	155
6.5.2	Formeln von De Moivre — Formules de De Moivre	155
6.5.3	Fourierentwicklung — Séries de Fourier	156
7	Komplexe Funktionen — Fonctions complexes	157
7.1	Differenzierbarkeit, Wege — Dérivés, chemins	157
7.1.1	Grundlagen — Fondements	157
7.1.2	Differenzierbarkeit — Dérivabilité	159
7.1.3	Differenzierbarkeitsregeln — Règles pour dérivabilité	160
7.1.4	Wege in \mathbf{C} — Chemins dans \mathbf{C}	161
7.1.5	Differenzierbare Wege — Chemins dérivables	162
7.2	Konforme Abbildungen — Applications conformes	163
7.3	Möbius-Transformationen — Transformations de Möbius	164
7.4	Definitionen — Définitions	164
7.4.1	Eigenschaften — Qualités	165
7.5	Cauchy-Riemann — Cauchy-Riemann	167
7.5.1	Herleitung — Dédution	167
7.5.2	Harmonische Funktionen — Fonctions harmoniques	167
7.6	Exp-, Log'funktion — Fonct. exp., log.	168
7.7	Trig. Funkt. — Fonct. trig.	171
7.8	Anwendungen — Applications	172
7.8.1	Idee — Idée	172
7.8.2	Smith-Diagramm — Diagramme de Smith	173
7.8.3	Joukowski-Profil — Profil de Joukowski	174
7.8.4	Zeigerdiagramme — diagrammes-vecteurs	175
7.9	Darstellung komplexer Funktionen — Représentation de fonct. compl.	175
7.9.1	Beispiel einer Kurve — Exemple d'une courbe	175
7.9.2	Beispiel einer rationalen Funktion — Exemple: Fonction rationnelle	176
8	Gleichungssysteme — Systèmes d'équations	179
8.1	Lösungsraum — Espace de solutions	179
8.1.1	Lineare Gleichung — Equation linéaire	179
8.1.2	Lineare Mannigfaltigkeit — Variété linéaire	180
8.1.3	Büschel, Bündel — Faisceau, gerbe	182
8.1.4	„Homogenisierung“ — „Homogénéiser“	183
8.1.5	Gleichungssysteme — Systèmes d'équations	183
8.2	Gauss-Jordan — Gauss-Jordan	186

8.2.1	Beispiel — Exemple	186
8.2.2	Allgemeine Lösung — Solution générale	188
8.2.3	Anwendung — Application	193
9	Matrizen, Determinanten — Matrices, déterminants	195
9.1	Gleich'syst., Matrizen — Syst.d'équ., matr.	195
9.1.1	Begriff — Notion	195
9.1.2	Matrixprodukt — Produit matriciel	197
9.2	Determinanten — Déterminants	200
9.2.1	Determinanten für n grösser 3 — Déterminants pour n plus grand 3	200
9.2.2	Entwicklungssatz — Théorème du développement	203
9.2.3	Berechnungsmethoden — Méthodes de calculer	209
9.2.4	Cramer für n grösser 3 — Cramer pour n plus grand 3	210
9.3	Allg. Matrixprodukt — Prod. matriciel général	211
9.3.1	Rechenregeln — Règles de calcul	211
9.3.2	Matrixprodukt, lineare Abbildung — Produit matriciel, application linéaire	212
9.3.3	Nochmals Matrixmultiplikation — Multiplication matricielle encore une fois	215
9.3.4	Untermatrizen — Des sous-matrices	216
9.4	Spez. Matrizen, Inverse — Matrices spéciales, inverse	216
9.4.1	Spezielle geometrische Abbildungen — Applications géométriques spéciales	216
9.4.2	Reguläre Matrizen — Matrices régulières	219
9.4.3	Übersicht — Vue d'ensemble	224
9.4.4	Berechnung der Inversen — Calculer l'inverse	227
9.4.5	Transponierte und Produkt — Transposé et produit	230
9.4.6	Schwach besetzte Matrizen — Matrices aux éléments minuscules	231
9.4.7	Rechenbeispiele — Exemples de calcul	232
9.5	Nochmals geometrische Anwendungen — D'autres applications géométriques	232
9.5.1	Matrixkomposition — Composition de matrices	232
9.5.2	Matrix zur Geradenspiegelung — Matrice pour la réflexion à une droite	233
9.5.3	Projektion auf Ebene, Matrix — Projection sur un plan, matrice	234
9.5.4	Drehung um Raumachse — Révolution autour d'une axe dans l'espace	235
9.6	Matrixprod., Basiswechsel — Prod. d. matr., changement de base	237
9.6.1	Determinantenmultiplikationssatz — Multiplication des déterminants	237
9.6.2	Determinantenmult. vereinfacht — Multipl. des déterm. simplifiée	241
9.6.3	Lineare Abbildung, Basisabbildung — Application linéaire, application de base	241
9.7	Gauss-Algorithmus mit Matrizen — Algorithme de Gauss avec des matrices	243
9.8	Iterative Berechnung der Inversen — Calcul itératif de l'inverse	244
9.8.1	Methode — Méthode	244
9.8.2	Rahmen der Methode — Cadre de la méthode	246
9.8.3	Jacobi-Verfahren f. Gleich'syst. — Méth. de Jacobi p. d. syst. d'éq.	247
9.8.4	Jacobi-Verfahren, inverse Matrix — Méth. de Jacobi, matrice inverse	249
9.9	D'Gl und Differenzenmethode — Eq. diff. et méthode d'éq. aux différences	250
10	Eigenwertprobleme — Problèmes des valeurs propres	253
10.1	Eigenwerte, Eigenvektoren — Valeurs propres, vecteurs propres	253
10.2	Berechn. Eigenw., Eigenvekt. — Calcul d. val. prop., vect. prop.	254
10.2.1	Charakteristisches Polynom — Polynôme caractéristique	254
10.2.2	EW und EV der Inversen — EW et EV de l'inverse	256
10.2.3	Beispiele — Exemples	257
10.3	Eigensch. EW, EV — Qualités val. prop., vect. prop.	258
10.3.1	Lineare Unabhängigkeit — Indépendance linéaire	258
10.3.2	Nicht reguläre Matrizen — Matrices non régulières	259
10.3.3	Transponierte Matrizen — Matrices transposées	260

10.3.4	Matrixpotenzen — Puissances de matrices	260
10.3.5	Diagonalisierung regulärer Matrizen — Diagonalisation de matrices régulières	260
10.3.6	Anwend. auf Matrixpotenz. — Applic. p.d. puissances de matr.	261
10.3.7	EW der Diagonalmatrix — EW de la matrice diagonale	262
10.3.8	Spur und Determinante — Trace et déterminant	263
10.4	Ähnliche Matrizen — Matrices semblables	265
10.4.1	Grundlagen — Fondements	265
10.4.2	Abbildungen im Eigenraum — Applications dans l'espace propre	267
10.5	Konstruktion einer Matrix — Construction d'une matrice	268
10.6	Diag. spez. Matrizen — Diag. de matr. spéc.	269
10.6.1	Definitionen — Définitions	269
10.6.2	Wichtige Eigenschaften — Qualités importantes	270
10.7	Ausbau und Ergänzungen — Complètement des notions	274
10.7.1	Rang und Defekt — Rang et défaut	274
10.7.2	Caley-Hamilton, Nilpotenz — Caley-Hamilton, nilpotence	274
10.7.3	Hauptvektoren, Spektrum — Vecteurs principaux, spectre	277
10.7.4	Beispiele — Exemples	281
10.7.5	Polynomnullstellen und EW — Zéros de polynomes et VP	282
10.8	Geometrische Anwendungen — Applications géométriques	283
10.8.1	Morphismen — Morphismes	283
10.8.2	Lineare Abbildung, Basisabbildung — Application linéaire, application de base	283
10.8.3	Affinitäten — Affinités	289
10.8.4	Isometrien — Isométries	293
10.8.5	Kollineationen — Collinéations	294
10.8.6	Kegelschnitte — Sections coniques	297
10.9	Anwendungen bei Rekursionen — Applications aux récursions	301
10.10	Anwendungen der Matrizenrechnung — Applications du calcul matriciel	303
10.10.1	Ausgleichsrechnung — Calcul d'ajustement de données	303
10.10.2	Überbestimmte Gleichungssysteme — Systèmes d'équations surdéterminés	304
11	Ausblick — Perspective	311
11.1	Quaternionen, Raumdrehungen — Quaterniones, révolutions dans l'espace	311
11.2	Algebraische Kurven — Courbes algébriques	313
11.2.1	In der Ebene — Dans le plan	313
11.2.2	Diskussion — Discussion	313
11.2.3	Beispiele — Exemples	314
11.2.4	Im Raum — Dans l'espace	315
11.3	Polyedersatz — Théorème des polyèdres	316
11.3.1	Begriffe — Notions	316
11.3.2	Der Satz — Le théorème	317
11.3.3	Platonische Körper — Corps platoniques	319
12	Anhang 1: Ellipsen, Kegelschnitte — Ellipses, sections coniques	323
12.1	Ellipsenbeziehungen und Flächensatz	323
12.1.1	Die Erde im Ekliptikalsystem	323
12.1.2	Beziehungen an der Ellipse	324
12.2	Zusammenfassung: Eigenschaften von Kegelschnitten	329
12.2.1	Allgemeine Bemerkung	329
12.2.2	Übersicht	329

13 Anhang 2: Gleichungstypen – Annexe 2: Types d'équations	333
13.1 Typen von Gleichheitszeichen und Gleichungen	333
13.2 Arten von Bestimmungsgleichungen	333
13.2.1 Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten	333
13.2.2 Gleichungen und Systeme von Gleichungen	333
13.2.3 Gleichungen mit Standardfunktionen von einer Unbekannten	334
13.2.4 Lineare Gleichungssysteme	334
14 Anhang 3: Kryptologie – Annexe 3: Cryptologie	335
14.1 Public key, RSA-Verfahren	335
14.2 Durchführung des RSA-Verfahrens — Exécution de la méthode RSA	335
14.2.1 Wahl der Primzahlen — Choisir les nombres premiers	336
14.2.2 Bestimmung der beiden Schlüssel — Calculer des deux clefs	336
14.2.3 Verschlüsselung (Codierung) — Chiffrement (codage)	337
14.2.4 Entschlüsselung (Decodierung) — Décodage (déchiffrement)	337
14.2.5 Das Sicherheitsproblem — Le problème de la sécurité	338
14.2.6 Hinweise — Indications	338
15 Anhang 4: Verschiedenes – Annexe 4: Diverses choses	339
15.1 Abkürzungen – Abréviations	339
15.2 Mathematica-Programme – Prog. pour Mathematica	340
16 Anhang „Bemerkungen“ — Annexe	341
16.1 Bemerkung zu Drehung und Gegendrehung	341
16.2 Winkelhalbierende im Dreieck — Bissectrice d. le triangle	342