

# Inhaltsverzeichnis • Table des matières

<b>1 Organisatorisches — Quant à l'organisation</b>	<b>1</b>
<b>2 Differentialgleichungen — Equations différentielles</b>	<b>3</b>
2.1 Einführung — Introduction	3
2.2 Lösung bei D'Gl 1. Ordn. — Solutions d'éq'diff d'ordre 1	6
2.2.1 Lösung, Integralkurve — Solution, courbe d'intégrale	6
2.2.2 Linienelement, Richtungsfeld — Élément de ligne, champs de direction	7
2.2.3 Isoklinen — Isoclines	9
2.2.4 Zentrale Fragen — Questions centrales	10
2.3 Anfangswertproblem — Problème de valeur initiale	13
2.3.1 Idee — Idée	13
2.3.2 Verallgemeinerung des Problems — Généralisation du problème	14
2.3.3 Randwertprobleme — Problèmes aux limites	15
2.3.4 Veränderte Problemstellung — Changer le problème	15
2.4 Existenz und Eindeutigkeit — Existence et univocité	16
2.4.1 Existenzsatz von Peano — Théorème d'existence de Peano	16
2.4.2 Eindeutigkeit — Univocité	17
2.4.3 Existenzsatz und Eindeutigkeit — Existence et univocité	19
2.4.4 Beispiel mit einer singulären Lösung — Exemple avec une solution singulière	22
2.5 Gleich'typen, Lös'methoden — Types d'éq., méthodes de solution	22
2.5.1 Iterationsverfahren von Picard — Méthode d'iteration de Picard	22
2.5.2 Separationsverfahren — Méthode de séparation des variables	23
2.5.3 „Beinahe“ separable D'Gl — Eq. diff. "presque séparable"	24
2.5.4 Substitutionsmethode — Méthode de substitution	25
2.5.5 Exakte D'Gl — Eq.diff. exacte	26
2.5.6 Eulersche Multiplikatoren — Multiplicateurs d'Euler	27
2.5.7 Eine Anwendung: Einhüllende — Une application: Enveloppe	30
2.6 Theorie der linearen D'Gl — Théorie des eq.diff. linéaires	32
2.6.1 Einführung, Definitionen — Introduction, définitions	32
2.6.2 Homogenes System — Système homogène	33
2.6.3 Inhomogenes System — Système inhomogène	38
2.7 Lineare D'Gl mit konst. Koeff. — Eq.diff. linéaires avec coeff. const.	40
2.7.1 Homogenes Problem — Problème homogène	40
2.7.2 Inhomogenes Problem — Problème non homogène	44
2.7.3 Potenzreihenansatz — Partir d'une série de puissance	45
2.8 Numerische Verfahren — Méthodes numériques	46
2.8.1 Das Verfahren von Euler — La méthode d'Euler	46
2.8.2 Die Methode von Runge–Kutta — La méthode de Runge–Kutta	48

2.8.3	D'Gl und Differenzenmethode — Eq. diff. et méthode d'éq. aux différences . . . .	50
2.9	Allgemeine Maschinenlösungen — Solutions générales par l'ordinateur . . . . .	53
2.9.1	<i>Mathematica</i> -Lösung — Solutions par <i>Mathematica</i> . . . . .	53
2.9.2	Selbst gerechnete Lösung — Solution calculée personnellement . . . . .	54
2.10	Artillerie-Methode — Méthode selon l'artillerie . . . . .	56
2.11	Anwendungen — Applications . . . . .	59
2.11.1	Biegelinie — Ligne élastique ou axe neutre . . . . .	59
2.11.2	Knickung — Problème de flambage . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Laplace-Transformationen — Transformations de Laplace</b>	<b>61</b>
3.1	Einführung — Introduction . . . . .	61
3.1.1	Übersicht — Vue générale . . . . .	61
3.1.2	Der Trick — Le truc . . . . .	61
3.2	Exist. u. Eindeut'probleme — Probl. d'exist. e. d'univoc. . . . .	63
3.2.1	Definitionen — Définitions . . . . .	63
3.2.2	Existenzprobleme — Problèmes d'existence . . . . .	64
3.2.3	Eindeutigkeitsprobleme — Problèmes d'univocité . . . . .	65
3.3	Aufbau des Kalküls — Constr. de la théorie formalisée . . . . .	67
3.3.1	Elementare Regeln — Règles élémentaires . . . . .	67
3.3.2	Linearitätsregeln — Linéarité . . . . .	68
3.3.3	Streckung im Urbildbereich — Extension dans le domaine de déf. . . . .	68
3.3.4	Differentiationsregel — Règle de la dérivation . . . . .	69
3.3.5	Anwendung auf eine D'Gl — Application pour une éq.diff. . . . .	69
3.3.6	Integrationsregel — Règle d'intégration . . . . .	69
3.3.7	Verschiebungssätze — Théorème de retard . . . . .	70
3.3.8	Multiplikationsregel — Règle de la multiplication . . . . .	71
3.3.9	Divisionsregel — Règle de la division . . . . .	72
3.3.10	Faltung — Plissement . . . . .	72
3.3.11	Periodische Funktionen — Fonctions périodiques . . . . .	75
3.3.12	Anfangs- und Endwerte — Valeurs initiales et finales . . . . .	76
3.3.13	Transformation rationaler Funktionen — Transformation de fonctions rationnelles	78
3.4	Musterbeispiele — Exemples modèles . . . . .	80
3.4.1	Rücktransformationen — Transformations inverses . . . . .	80
3.4.2	Lösen von D'Gl — Résoudre des éq.diff. . . . .	80
3.4.3	D'Gl 2. Ordnung — Eq.diff. d'ordre 2ème . . . . .	81
3.4.4	Systeme von D'Gl — Systèmes d'éq.diff. . . . .	82
3.4.5	Anwendung der Faltung — Application du plissement . . . . .	83
3.5	Distributionen — Distributions . . . . .	84
3.5.1	Idee, Dirac-Stoss — Idée, impulsion unité de Dirac . . . . .	84
3.5.2	Die Transformierte der Dirac-Funktion — La transformée de la fonction de Dirac .	86
3.5.3	Anwendung auf ein AWP — Application pour un PVI . . . . .	87
3.5.4	Stoss zur Zeit 0 — Coup au temps 0 . . . . .	87
3.5.5	Stoss zur Zeit $t_0$ — Coup au temps $t_0$ . . . . .	87
3.6	Probleme aus der Praxis — Problèmes de la pratique . . . . .	89
3.6.1	Schwingungen und Oszillatoren — Oscillations et oscillateurs . . . . .	89
3.6.2	Stabilitätsverhalten von Lösungen — Comportement de stabilité de solutions . . .	90
3.6.3	Stabilitätskriterium — Critère de stabilité . . . . .	93
3.6.4	Randwertprobleme — Problèmes de valeurs aux limites . . . . .	93
3.6.5	Randwertprobleme — Problèmes de valeurs aux limites . . . . .	94
3.7	LTI-Systeme — Systèmes LTI . . . . .	94
3.7.1	Grundlagen — Fondements . . . . .	94
3.7.2	Beispiele, Systemverknüpfungen — Exemples, liaisons de systèmes . . . . .	95

<b>4</b>	<b>Fourierreihen — Séries de Fourier</b>	<b>99</b>
4.1	Einführung — Introduction	99
4.1.1	Verwendung — Utilisation	99
4.1.2	Periodische Funktionen — Fonctions périodiques	99
4.1.3	Trigonometrische Reihen — Séries trigonométriques	100
4.2	Fourierreihen und Fourieranalyse — Séries et analyse de Fourier	101
4.2.1	Das Darstellungsproblem — Le problème de la représentation	101
4.2.2	Das Konvergenzproblem — Le problème de la convergence	103
4.2.3	Folgerungen und Konsequenzen — Conclusions et conséquences	108
4.2.4	Sinus- und Cosinusreihen — Séries de sinus et cosinus	110
4.2.5	Eulersche Formeln, Periode T — Formules d'Euler, période T	111
4.3	Harmonische Analyse — Analyse harmonique	112
4.3.1	Beispiele — Exemples	112
4.3.2	Lineare Kombinationen — Combinaisons linéaires	114
4.3.3	Parsevalsche Gleichung — Equation de Parseval	115
4.3.4	Die Formel — La formule	115
4.3.5	Anwendung — Application	116
4.4	Komplexe Darstellung — Représentation complexe	117
4.4.1	Komplexe Fourierkoeffizienten — Coefficients de Fourier complexes	117
4.4.2	Berechnung der Koeffizienten — Calculer les coefficients	117
4.4.3	Amplitudenspektrum, Phasenspektrum — Spectre d'amplitude, spectre de phase	118
4.4.4	Reelle Interpretation der Spektren — Interprétation réelle des spectres	120
4.4.5	Das Phänomen von Gibbs — Le phénomène de Gibbs	121
4.5	Diskrete Fouriertransformation — Transf. de Fourier discrète	123
4.5.1	DFT und Fouriersynthese — DFT et synthèse de Fourier	123
4.5.2	FFT — FFT	125
4.6	Fouriertransformation — Transformation de Fourier	127
4.6.1	Fourierintegral — Intégrale de Fourier	127
4.6.2	b-Band-Beschränktheit, Shannon — Borné à la bande b, Shannon	133
4.6.3	Lösen von D'Gl — Résoudre des éq.diff.	135
<b>5</b>	<b>z-Transformationen — Transformations en z</b>	<b>137</b>
5.1	Einführung — Introduction	137
5.1.1	Verwendung — Utilisation	137
5.1.2	Gegenstand der Betrachtung — Objet de la considération	137
5.1.3	z-Transformierte — Transformée en z	138
5.2	Regeln, Calculus — Règles, calcul	139
5.2.1	Geometrische Folgen — Suites géométriques	139
5.2.2	Differentiation von Transformierten — Différentiation de transformées	139
5.2.3	Linearität, Einheitsimpuls — Linéarité, impulsion d'unité	140
5.2.4	Exponential und trig. Folgen — Suites exp. et trig.	140
5.2.5	Verschiebungen — Décalages	142
5.2.6	Gliedweise Mult. mit einer Folge — Mult. avec une suite terme p. terme	143
5.2.7	Anfangs- und Endwertsatz — Théorème des valeurs aux limites	144
5.2.8	Inverse z-Transformation — Transformation en z inverse	146
5.2.9	Auffinden der Inversen — Trouver l'inverse	146
5.3	Praktische Anwendungen — Applications pratiques	148
5.3.1	Differenzgleichungen — Equations aux différences	148
5.3.2	Diskrete lineare Systeme — Systèmes linéaires discrets	150
5.3.3	Impuls- und Schrittwort — Réponse d'impulsion et indicielle	154
5.3.4	Schrittwort — Réponse indicielle	155
5.4	Stabilität — Stabilité	157
5.4.1	Der Begriff — La notion	157

5.4.2	Stabilitätskriterium — Critère Pour la stabilité	158
5.4.3	Stabilitätskriterium — Critère pour la stabilité	159
5.5	Faltung, Konvolution — Plissement	160
5.5.1	Die Idee — L'idée	160
5.6	Laplace- und z-Transformation — Transf. de Laplace et en z	162
5.7	Ingenieur Anwendungen — Applications d'ingénieur	163
<b>6</b>	<b>Vektoranalysis — Analyse vectorielle</b>	<b>165</b>
6.1	Grundlagen — Les bases	165
6.1.1	Einführung — Introduction	165
6.1.2	Operatoren — Opérateurs	165
6.2	Felder — Champs	167
6.2.1	Der Feldbegriff — La notion du champ	167
6.2.2	Feldtypen — Types de champs	169
6.3	Gradient, Divergenz, Rotation — Gradient, divergence, rotationnel	171
6.3.1	Laplace- und Nabla-Operator — Opérateurs de Laplace et nabla	171
6.3.2	Definition von grad, div und rot — Définition de grad, div et rot	171
6.3.3	Formeln mit grad, div und rot — Formules avec grad, div et rot	172
6.3.4	Bedeutung von grad, div und rot — Signification de grad, div et rot	173
6.4	Konservative Felder — Champs conservateurs	176
6.4.1	Linienintegrale — Intégrales curvilignes	176
6.4.2	Gradientenfelder und Pot'felder — Champs de vect. lam. et champs de potent.	178
6.4.3	Konservative Felder — Champs conservateurs	179
6.4.4	Eigenschaften, Beispiele — Qualités, exemples	182
6.4.5	Konservative Felder und Rotation — Champs conservateurs et rotationnel	184
6.4.6	Bsp.: Stromdurchflossener Leiter — Expl.: Conduct. alimenté de courant électr.	186
6.5	Die Integralsätze — Les théorèmes de l'intégrale	188
6.5.1	Der Begriff Fluss — La notion de flux	188
6.5.2	Definition des Flusses — La définition du flux	188
6.5.3	Fluss durch geschlossene Flächen — Flux à travers des surfaces fermées	190
6.5.4	Anwend.: Wieso r-quadrat-Gesetze? — Applic.: Pourq. d. lois de r au carré?	191
6.5.5	Übersicht über die Integralsätze — Aperçu des théorèmes de l'intégrale	192
6.5.6	Die Sektorformel — La formule de secteur	194
6.5.7	Konsequenzen aus den Integralsätzen — Conséquences des théorèmes de l'intégrale	196
6.5.8	Quellenfreie Potentialfelder — Champs de potentiel libres de sources	197
6.5.9	Beispiele zu Stockes — Exemples concernant Stockes	198
6.5.10	Abgeleitete Formeln — Formules dérivées	198
6.5.11	Koord'unabhängige Def.n der Rotation — Déf. du rotationnel indép. de coord.	199
6.5.12	Zur Divergenz des elektr. Feldes — Quant à la divergence d'un champ électr.	200
6.6	Beweisideen z.d. Int'sätzen — Idées d. preuves p.l. théor.d. l'intégr.	201
6.6.1	Zum Satz von Gauss — Quant au théorème de Gauss	201
6.6.2	Zum Satz von Stockes — Quant au théorème de Stockes	203
6.7	Zirkulation, Vektorpotential — Circulation, potentiel vectoriel	205
6.7.1	Zirkulation und Rotation — Circulation et rotationnel	205
6.7.2	Das Vektorpotential — Le potentiel vectoriel	209
<b>7</b>	<b>Rayleigh-Quotient (Anhang — Annexe 1)</b>	<b>213</b>
7.1	Grundlagen zur Methode mit dem Rayleigh-Quotienten	214
7.1.1	Übersicht: Problem und Ziel	214
7.1.2	Theorie bezüglich Rayleigh-Quotient	214
7.1.3	Berechnung des Rayleigh-Quotienten	219
7.1.4	Eine genauere numerische Näherung für den 1. Eigenwert	224
7.1.5	Bemerkung zum Ritz-Galerkin-Verfahren	226

7.1.6	Übersicht . . . . .	226
7.1.7	Die Methode . . . . .	226
<b>8</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen (Anhang — Annexe 2)</b>	<b>233</b>
8.1	Partielle Differentialgleichungen . . . . .	234
8.1.1	Quasilineare part. D'gl 1. Ordnung mit zwei Variablen . . . . .	234
8.1.2	Klassifikation bei part. D'gl. 2. Ordnung . . . . .	236
8.1.3	Verfeinerung der Klassifikation . . . . .	236
8.1.4	Das Beispiel der Wärmeleitgleichung . . . . .	237
8.1.5	Koordinatentransformationen bei Operatoren . . . . .	242
8.1.6	Lineare Operatoren . . . . .	247
8.1.7	Zur schwingenden Membran . . . . .	248
8.1.8	Die Poisson-Gleichung . . . . .	250
8.1.9	Exkurs: Wichtige Formeln . . . . .	253
8.1.10	Plattengleichung und biharmonischer Operator . . . . .	254
8.1.11	Das Modellierungsbeispiel der an vier Punkten aufgehängten Platte . . . . .	255
8.1.12	Das Modellierungsbeispiel Kreisplatte . . . . .	255
8.1.13	Numerische Methoden . . . . .	257
8.1.14	Numerische Beispiele: Differenzenverfahren . . . . .	258
8.1.15	Numerische Beispiele: Iterationsverfahren . . . . .	262
8.2	Schritte in die Variationsrechnung . . . . .	268
8.2.1	Der Begriff der ersten Variation . . . . .	268
8.2.2	Die Euler-Lagrange-Differentialgleichung . . . . .	269
8.2.3	Die Herleitung der Potentialgleichung . . . . .	270
8.2.4	Die Kettenlinie . . . . .	270
8.2.5	Ein isoperimetrisches Problem und die Lagrange-Funktion . . . . .	272
8.2.6	Das Prinzip der kleinsten Wirkungen und erste Variation . . . . .	273
8.2.7	Bernoullis Brachystochronen-Problem . . . . .	275
8.2.8	Variation und finite Elemente: Triangulationsmethode . . . . .	277
8.2.9	Weitere Probleme . . . . .	281
8.3	Schwingungen und partielle Differentialgleichungen . . . . .	282
8.3.1	Die homogene Wellengleichung, Voraussetzungen . . . . .	282
8.3.2	Separationsansatz und stehende Welle . . . . .	282
8.3.3	Schwingung eines dünnen Balkens . . . . .	284
8.3.4	Die schwingende dünne Platte . . . . .	286
8.3.5	Ausblick über Eigenwerte und Eigenfunktionen . . . . .	292
8.4	Fouriertransformationen und partielle Diff'gleichungen . . . . .	292
8.4.1	Entwicklung der Methode an einem Beispiel . . . . .	292
8.4.2	Beispiel einer konkreten Anwendung . . . . .	294
8.5	Zur Idee der Greenschen Funktion . . . . .	294
8.5.1	Einführung und Begriff . . . . .	294
8.5.2	Ein Schulbeispiel . . . . .	295
8.6	Bemerkung zur Delta-Funktion . . . . .	297
8.7	Ausblick . . . . .	299
<b>9</b>	<b>Mathematische Modellierung (Anhang — Annexe 3)</b>	<b>301</b>
9.1	Einige Kurven . . . . .	302
9.1.1	Die Klothoide . . . . .	302
9.1.2	Kettenline contra Seilkurve . . . . .	304
9.1.3	Eine Schleppkurve . . . . .	306
9.2	Balken und Biegelinie . . . . .	307
9.2.1	Schnittkräfte und Momente am Balken . . . . .	307
9.2.2	Die Biegelinie des Balkens . . . . .	311

9.2.3	Zur Knickung . . . . .	313
9.3	Gekoppelte Pendel . . . . .	314
9.3.1	Problemmodellierung . . . . .	314
9.3.2	Beispiellösung . . . . .	315
9.4	Weitere Beispiele zur Modellierung . . . . .	315
9.4.1	Ausblick auf weitere Beispiele und Themenbereiche . . . . .	315
9.4.2	Bemerkung zu autonomen und dynamischen Systemen . . . . .	317
<b>10</b>	<b>Anhang 4 — Annexe 4</b>	<b>319</b>
10.1	Hinweise – Indications . . . . .	319
10.1.1	Abkürzungen – Abréviations . . . . .	319
10.1.2	Literatur — Littérature . . . . .	319