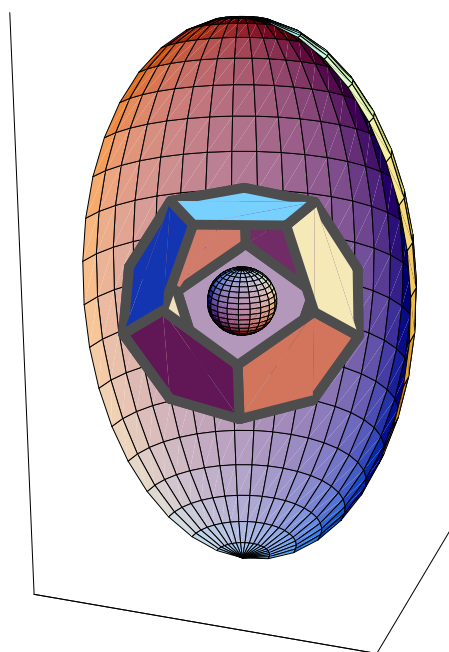


Arbeitsbuch ◇ Math ◇ Arch ◇ Ing
◇ Grundlagen — Stützkurs — Vorkurs ◇
für Architekten und Ingenieure



von

Rolf Wirz

BFH-AHB // BFH-TI

Leere Ausgabe vom 2. November 2008, V. 1.0.5 / d

Arbeitsbuch

Keiner, der nicht Mathematiker ist, soll meine Werke lesen...

Leonardo

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre

Prof. für Math.

Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI

Pestalozzistrasse 20

Büro B112 CH-3400 Burgdorf/BE

Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230

Mail: Siehe <http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html> unter „Koordinaten von R.W.“

(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
2	(I) Geometrie	9
3	(I) Grundlagen	11
3.1	Dimensionskontrolle	12
3.2	Der mathematische Lehrsatz	13
3.2.1	Der Aufbau eines mathematischen Lehrsatzes	13
3.2.2	Wahre und falsche Implikationen	14
3.2.3	Die Umkehrung einer Implikation	15
4	(I) Planimetrie	17
4.1	Winkel	18
4.1.1	Winkel an Parallelen, Winkel am Dreieck	18
4.1.2	Winkel am Kreis	19
4.2	Berechnungen am Dreieck und Viereck	20
4.2.1	Einfache Aufgaben zu Pythagoras, Katheten- und Höhensatz	20
4.2.2	Spezielle Dreiecke	21
4.2.3	Kreisberührungsaufgaben	22
4.2.4	Berechnung von Flächeninhalten und Abständen	23
4.2.5	Tangentenabschnitte, Tangentenviereck	24
4.2.6	Vermischte Probleme	25
4.3	Was im erwähnten Lehrbuch wortlos vorausgesetzt ist	26
4.3.1	Allgemeine geometrische Grundlagen	26
4.3.2	Kongruenzgeometrie	27
4.4	Berechnungen am Kreis	28
4.4.1	Kreis und Kreisring	28
4.4.2	Kreisring	29
4.4.3	Das Bogenmass	30
4.4.4	Der Kreissektor	31
4.4.5	Das Segment	32
4.4.6	Vermischte Probleme	33
4.5	Strahlensätze	34
4.5.1	Die Sätze	34
4.5.2	Der Schwerpunkt des Dreiecks	35
4.5.3	Die Winkelhalbierenden im Dreieck	36
4.6	Ähnliche Figuren	37
4.6.1	Die zentrische Streckung	37
4.6.2	Ähnliche Figuren	38
4.6.3	Ähnliche Dreiecke	39
4.6.4	Ähnlichkeit am Kreis, Sehnensatz, Sekanten-Tangentensatz	40

5 (I) Trigonometrie	41
5.1 Das rechtwinklige Dreieck	42
5.1.1 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck	42
5.1.2 Aufgaben aus der Optik	43
5.1.3 Flächeninhalt eines Dreiecks	44
5.1.4 Berechnungen am Kreis	45
5.2 Das allgemeine Dreieck	46
5.2.1 Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel	46
5.2.2 Sinussatz	47
5.2.3 Cosinussatz	48
5.2.4 Vermischte Probleme mit Parameter	49
5.3 Probleme aus Physik und Technik	50
5.3.1 Probleme aus der Statik	50
5.3.2 Probleme aus der Vermessung	51
5.4 Ähnliche Figuren	52
5.5 Trigonometrische Funktionen	53
5.5.1 Argumente im Gradmass	53
5.5.2 Argumente im Bogenmass	54
5.5.3 Angewandte Aufgaben	55
5.6 Goniometrie	56
5.6.1 Beziehungen zwischen $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$	56
5.6.2 Additionstheoreme	57
5.6.3 Funktionen des doppelten Winkels	58
5.6.4 Transzendente Gleichungen	59
6 (I) Stereometrie	61
6.1 Beziehungen im Raum	62
6.1.1 Lage von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum	62
6.1.2 Winkel im Raum	63
6.2 Ebenflächig begrenzte Körper (Polyeder)	64
6.2.1 Das Prisma	64
6.2.2 Pyramide und Pyramidenstumpf	65
6.2.3 Prismatoide	66
6.2.4 Reguläre Polyeder (Platonische Körper)	67
6.3 Krummflächig begrenzte Körper	68
6.3.1 Der Kreiszylinder	68
6.3.2 Kreiskegel und Kreiskegelstumpf	69
6.3.3 Kugel und Kugelteile	70
6.3.4 Rotationskörper	71
6.4 Ähnliche Körper	72
6.5 Extremwertaufgaben	73
7 (I) Vektorgeometrie	75
7.1 Der Vektorbegriff	76
7.2 Elementare Vektoroperationen	77
7.3 Linearkombination und lineare Abhängigkeit von Vektoren	78
7.4 Vektoren im Koordinatensystem	79
7.4.1 Vektoren in der Ebene	79
7.4.2 Vektoren im Raum	80
7.5 Das Skalarprodukt	81
7.6 Die Gerade	82
7.7 Das Vektorprodukt	83
7.8 Die Ebene	84

8 (II) Platonische und Archimedische Körper...	85
9 (II) Einleitung und Hinweise	87
9.1 Notizen	88
10 (II) Vom Umgang mit den Platonischen Körpern	89
10.1 Sprache der Form	89
10.2 Gestalt der Platonischen Körper	90
10.3 Darstellen der Platonischen Körper	91
10.4 Vom Goldenen Schnitt	92
10.5 Johannes Kepler und die Platonischen Körper	93
10.6 Gegenseitige Beziehungen	94
10.7 Polare Beziehungen	95
10.8 Durchdringungen	96
10.9 Kern und Schale	97
10.10 Umstülpungen	98
11 (II) Didaktische Bemerkungen	99
11.1 Notizen	100
12 (II) Archimedische Körper	101
12.1 Aus zweierlei Formkräften	102
12.2 Eine notwendige Einfügung	103
12.3 Abschleifen der Kanten beim Würfel	104
12.4 Aus dreierlei Formkräften	105
12.5 Die Sonderlinge	106
13 (II) Irdene und goldene Reihe	107
13.1 Notizen	108
14 (II) Übersichten	109
14.1 Eckenbildende Flächen der Platonischen Körper und ihre Abwicklungen	110
14.2 Eckenbildende Flächen der Archimedischen Körper und ihre Abwicklungen	111
15 (II) Polare Gebilde der Archimedischen Körper	113
15.1 Grundsätzliches	114
15.2 Konstruktions-Anweisungen	115
15.3 Verwandeln der polaren Formen	116
16 (II) Symmetrieeigenschaften der regelmässigen Polyeder	117
16.1 Notizen	118
17 (II) Sternartige Polyeder	119
17.1 Keplers Dodekaederstern	120
17.2 Keplers Icosaederstern	121
17.3 Bindelstern	122
17.4 Baravallestern	123
17.5 Vergleich der vier Sternkörper	124
17.5.1 Der Vielflächner aus 12 Fünfecken	125
17.5.2 Der Vielflächner aus 20 Dreiecken	126

18 (II) Räumliche Gebilde aus Diagonalen der Platonischen Körper	127
18.1 Körper aus Flächendiagonalen	128
18.1.1 Tetraederzwilling	128
18.1.2 Würfelfünfling	129
18.2 Körper aus Raumdiagonalen des Dodekaeders	130
18.2.1 Hüllenstern	130
18.2.2 Tetraederfünflinge	131
18.2.3 Doppel-Tetraederfünfling	132
18.3 Körper aus Raumdiagonalen des Ikosaeders	133
18.3.1 Oktaederfünfling, dem Ikosaeder einbeschrieben	133
18.4 Vergleich der drei Fünflinge	134
18.5 Techniken	135
18.5.1 Modellbau	135
18.5.2 Spritzen	136
18.6 Mathematische Ergänzungen	137
18.6.1 Notizen	137
18.7 Literatur, Transparente und Abwicklungen	138
18.7.1 Notizen	138
19 (III) Algebra	139
20 (III) Grundlagen	141
20.1 Grundbegriffe der Mengenlehre	142
20.1.1 Mengen und Elemente	142
20.1.2 Teilmengen	143
20.1.3 Schnittmengen, Vereinigungsmengen	144
20.1.4 Differenzmenge	145
20.1.5 Mengenalgebra	146
20.2 Rechnen mit Näherungswerten	147
20.2.1 Exakte Werte und Näherungswerte	147
20.2.2 Fehlertypen	148
20.2.3 Rechnen bei Verwendung von Näherungswerten	149
20.2.4 Rechnen bei Verwendung von Näherungswerten ohne Fehlerangabe	150
21 (III) Arithmetik	151
21.1 Zahlen, Terme, Ordnungsrelationen	152
21.1.1 Zahlenmengen	152
21.1.2 Der Betrag einer Zahl	153
21.1.3 Terme	154
21.1.4 Polynome	155
21.1.5 Ordnungsrelationen	156
21.2 Addition, Subtraktion	157
21.3 Multiplikation	158
21.3.1 Distributivgesetz, binomische und trinomische Formeln	158
21.3.2 Faktorzerlegung	159
21.4 Division	160
21.4.1 Erweitern und kürzen	160
21.4.2 Addieren und subtrahieren	161
21.4.3 Multiplizieren	162
21.4.4 Dividieren	163
21.4.5 Polynomdivision	164
21.4.6 Vermischte Probleme	165
21.5 Potenzen	166

21.5.1	Definition von a^n	166
21.5.2	Addieren und subtrahieren von Potenzen	167
21.5.3	Anwendung der Potenzsätze	168
21.5.4	Vermischte Probleme	169
21.5.5	Zehnerpotenzen	170
21.6	Wurzeln	171
21.6.1	Die Quadratwurzel	171
21.6.2	Definition der n -ten Wurzel aus a und Potenzdarstellung der n -ten Wurzel aus a	172
21.6.3	Das Rechnen mit Wurzeln	173
21.6.4	Vermischte Probleme	174
21.7	Logarithmen	175
21.7.1	Zehnerlogarithmen (dekadische Logarithmen)	175
21.7.2	Logarithmen mit beliebiger Basis	176
21.7.3	Logarithmengesetze	177
22 (III)	Gleichungen	179
22.1	Aussagen und Aussageformen	180
22.1.1	Aussagen	180
22.1.2	Verknüpfung von Aussagen	181
22.1.3	Aussageformen	182
22.1.4	Äquivalenz von Aussageformen	183
22.2	Lineare Gleichungen	184
22.2.1	Gleichungen ohne Parameter	184
22.2.2	Gleichungen mit Parametern	185
22.2.3	Lineare Ungleichungen	186
22.3	Quadratische Gleichungen	187
22.3.1	Definition	187
22.3.2	Äquivalente und nicht äquivalente Umformungen	188
22.3.3	Lösungsverfahren	189
22.3.4	Sonderfälle	190
22.3.5	Substitution	191
22.3.6	Textaufgaben	192
22.3.7	Parameteraufgaben, Satz von Vieta	193
22.3.8	Zerlegung von $ax^2 + bx + c$ in Linearfaktoren	194
22.4	Quadratische Gleichungen	195
22.4.1	Definition	195
22.4.2	Äquivalente und nicht äquivalente Umformungen	196
22.4.3	Lösungsverfahren	197
22.4.4	Textaufgaben	200
22.4.5	Parameteraufgaben, Satz von Vieta	201
22.4.6	Zerlegung von $ax^2 + bx + c$ in Linearfaktoren	202
22.5	Besondere Gleichungstypen	203
22.5.1	Bruchgleichungen	203
22.5.2	Wurzelgleichungen	204
22.5.3	Produkt = 0	205
22.5.4	Exponentialgleichungen	206
22.5.5	Logarithmische Gleichungen	207
22.6	Gleichungen mit mehreren Unbekannten	208
22.6.1	Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten	208
22.6.2	Lineare Gleichungen mit drei und mehr Unbekannten	209
22.6.3	Nicht lineare Gleichungssysteme	210
22.7	Vermischte Textaufgaben	211
22.8	Gleichungen 3. und höheren Grades, transzendente Gleichungen	212

23 (III) Funktionen	213
23.1 Kartesisches Koordinatensystem	214
23.2 Der Funktionsbegriff	215
23.3 Lineare Funktionen	216
23.3.1 Definition der linearen Funktion	216
23.3.2 Der Graph einer linearen Funktion	217
23.3.3 Aufgaben aus der Praxis	218
23.3.4 Berechnung von Flächen	219
23.3.5 Senkrechte Geraden	220
23.3.6 Abschnittsweise lineare Funktionen	221
23.3.7 Betragsfunktionen	222
23.3.8 Geradenscharen	223
23.3.9 Graphisches Lösen linearer Gleichungssysteme	224
23.4 Quadratische Funktionen	225
23.4.1 Der Graph einer quadratischen Funktion	225
23.4.2 Quadratische Ungleichungen	226
23.4.3 Bestimmung der Funktionsgleichung	227
23.4.4 Schnittpunkte von Graphen	228
23.4.5 Parabel und Tangente	229
23.4.6 Parabelscharen	230
23.4.7 Geometrische Örter	231
23.4.8 Extremwertaufgaben	232
23.4.9 Graphisches Lösen nicht linearer Gleichungssysteme	233
23.4.10 Probleme aus Physik und Technik	234
23.5 Potenzfunktionen	235
23.6 Polynomfunktionen	236
23.7 Rationale Funktionen	237
23.8 Umkehrung von Funktionen	238
23.9 Wurzelfunktionen	239
23.10 Exponentialfunktionen	240
23.11 Logarithmusfunktionen	241
23.12 Winkelfunktionen	242
23.13 Optimieren	243
23.13.1 Lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten	243
23.13.2 Lineare Optimierung	244
23.13.3 Extremwertaufgaben	245

Kapitel 1

Einführung

Dieses Buch ist als Arbeitsbuch für einen Vorkurs, Stützkurs oder Reaktivierungskurs gedacht, in dem es um die Grundlagen der Mathematik geht. Hier wird daher kein exakter Aufbau von mathematischem Wissen geboten, denn dafür sind andere Kurse geschrieben worden. Vielmehr sollen an dieser Stelle die für die Fachhochschule notwendigen Grundlagen in Richtung Architektur und verwandte Gebiete auf einen Stand gebracht werden, der müheloses Arbeiten erlaubt, damit für die kommende Praxis in den technischen Aspekten des Baubereiches ein hochschulwürdiges Wissen vorhanden ist. Dieses ist notwendig um die Sicherheit von Konstruktionen und Dimensionierungen zu verstehen, um Effizienzberechnungen anstellen zu können, um mit Finanzen rechnen zu können oder auch nur um die Normen lesen und verstehen zu können. Daneben sollte z.B. ein Architekt den Umgang mit seinem ureigensten Werkzeug, der Geometrie, auf einem hochschulwürdigen Niveau beherrschen.

„Arbeitsbuch“ bedeutet, dass der Stoff nach dem Fahrplan des Inhaltsverzeichnisses anhand der abgegebenen Werke aus der Literatur in Eigenarbeit erarbeitet werden soll. Es sind daher keine oder allenfalls nur wenige Angaben zum Stoffinhalt gemacht. Gleiches gilt für die Übungen.

Bei diesem Buch handelt es sich demnach nicht um eine schulartige Einführung in die Mathematik der genannten Stufe. Eine solche findet man unter den Skripten des Autors (siehe z.B. „Grundlagen“) via den Link (Lit. [1])

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html>

Im Herbst 2008 Der Autor

*Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.*

Konfuzius

Kapitel 2

(I) Geometrie

Kapitel 3

(I) Grundlagen

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Geometrie“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [2])

3.1 Dimensionskontrolle

Begriffe und Zusammenhänge:

Geometrische Aufgaben kann man physikalisch interpretieren, indem man die Masse (Längen, Flächeninhalten Volumeninhalte) mit Einheiten versieht.

Auf physikalische Grössen kann man die arithmetischen Elementaroperationen anwenden.

Physikalische Grössen sind Masszahlen, welche mit Einheiten versehen sind. Bei der Addition oder Subtraktion von Grössen müssen die Einheiten gleich sein. Bei der Multiplikation oder Division von physikalischen Grössen rechnet man die Einheiten entsprechend mit Hilfe der gleichen Operationen mit.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen zu beweisen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

3.2 Der mathematische Lehrsatz

3.2.1 Der Aufbau eines mathematischen Lehrsatzes

Begriffe und Zusammenhänge:

Ein mathematischer Satz ist eine wahre Aussage über einen mathematischen Inhalt. Ein solcher Satz besteht in der Regel aus einer Voraussetzung V , den Bedingungen, unter denen der Satz wahr sein soll, und der Behauptung B (darum geht es dabei) sowie dem Beweis (*Bew*).

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen zu beweisen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

3.2.2 Wahre und falsche Implikationen

Begriffe und Zusammenhänge:

Bei einem bewiesenen Satz handelt es sich um eine wahre logische Implikation (wahre Wenn–Dann–Aussage) der Form $V \Rightarrow B$. Um einen Satz zu beweisen, wendet man verschiedene Beweistechniken an.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen zu beweisen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

3.2.3 Die Umkehrung einer Implikation

Begriffe und Zusammenhänge:

Wenn ein mathematischer Satz, d.h. eine Aussage der Form $V \Rightarrow B$, wahr ist, dann braucht die umgekehrte Aussage oder Umkehrung $B \Rightarrow A$ nicht auch zwingend wahr zu sein. Sie kann sich als wahr oder auch als falsch erweisen. Wenn aber eine Aussage sowohl als auch ihre Umkehrung wahr ist, so redet man von einer Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ (A äquivalent B oder A gilt genau dann wenn B gilt).

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen zu beweisen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

Kapitel 4

(I) Planimetrie

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Geometrie“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [2])

4.1 Winkel

4.1.1 Winkel an Parallelen, Winkel am Dreieck

Begriffe und Zusammenhänge:

1. Winkel, Winkelmaß, Scheitel, Schenkel, Verwendung von griechischen Buchstaben.
2. Winkel an geschnittenen Parallelen: Stufenwinkel und Wechselwinkel, Gleichheitsbeziehungen, Ergänzung auf 180 Grad.
3. Winkel am Dreieck: Die Winkelsumme ist 180 Grad.
4. Die Aussenwinkel am Dreieck sind gleich den gegenüberliegenden Innenwinkeln.
5. Die Aussenwinkel je einseitig sind zusammen 360 Grad.
6. Gleichseitige Dreiecke: Alle Winkel sind 60 Grad.
7. Gleichschenklige Dreiecke.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen zu beweisen. Skizzen! Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

4.1.2 Winkel am Kreis

Begriffe und Zusammenhänge:

1. Peripheriewinkel und Zentriwinkel.
2. Alle Peripheriewinkel über einem Bogen sind gleich.
3. Ein Peripheriewinkel ist doppelt so gross wie der Zentriwinkel über einem Bogen.
4. Spezialfall: Wenn der Bogen gerade der Halbkreis ist, hat man den Satz von Thales. Der Peripheriewinkel misst dort 90 Grad.
5. Ein Peripheriewinkel ist gleich dem Sehnen-Tangentenwinkel an einem Bogen.
6. Ein Viereck in einem Kreis mit den Eckpunkten auf dem Kreis heisst Sehnenviereck.
7. In einem Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel auf 180 Grad.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen zu beweisen. Skizzen! Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

4.2 Berechnungen am Dreieck und Viereck

4.2.1 Einfache Aufgaben zu Pythagoras, Katheten- und Höhensatz

Begriffe und Zusammenhänge:

Pythagoras: In einem rechtwinklichen Dreieck ist das Hypothenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate.

Kathetensatz von Euklid: In einem rechtwinklichen Dreieck ist das Produkt einer Hypothenuse mit dem durch die Höhe auf die Hypothenuse bedingten Hypothenusenabschnitt gleich dem Kathetenquadrat.

Höhensatz von Euklid: In einem rechtwinklichen Dreieck ist das Quadrat der Höhe auf die Hypothenuse gleich dem Produkt der durch die Höhe bedingten Hypothenusenabschnitte.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu Beweise in Lehrbüchern. Es gibt welche, die sehr kurz und unmittelbar einsichtig sind.

4.2.2 **Spezielle Dreiecke**

Begriffe und Zusammenhänge:

Im gleichseitigen oder im gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck lassen sich bei einer bekannten Seite oder Höhe die andern Seiten oder Höhen exakt berechnen.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Berechnungen im Lehrbuch.

4.2.3 Kreisberührungsaufgaben

Begriffe und Zusammenhänge:

Z.B. im Zusammenhang mit gotischen Fenstern entstehen sehr interessante Aufgaben. Dabei gilt es Strecken oder Radien zu berechnen, wenn durch eine Figur mit wenigen Angaben gegeben sind.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Berechnungen im Lehrbuch.

4.2.4 Berechnung von Flächeninhalten und Abständen

Begriffe und Zusammenhänge:

Die Dreiecksfläche kann man als eine halbe Rechtecksfläche berechnen. Ebenso lässt sich ein Parallelogramm oder ein Trapez sehr einfach in ein berechenbares Rechteck verwandeln. Hier erkennt man, dass der Flächeninhalt gleich der mittleren Breite mal die Höhe ist.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.2.5 Tangentenabschnitte, Tangentenviereck

Begriffe und Zusammenhänge:

Zwei Tangenten an einen Kreis mit den Tangentialpunkten T_1 , T_2 schneiden sich in einem Punkt P (Tangentenschnittpunkt). Dann sind die beiden Tangentenabschnitte gleich lang:

$$|\overline{PT_1}| = |\overline{PT_2}|$$

Vier Tangenten an einen Kreis schneiden sich paarweise so, dass ein Tangentenviereck entsteht. Dabei gehören die Schnittpunkte jeweils zu zwei Tangenten an auf dem Kreis benachbarten Tangentialpunkten. Der Kreis ist jetzt Inkreis dieses Vierecks. Die Längen der entstehenden Vierecksseiten sind a , b , c und d in natürlicher Reihenfolge. Dann gilt

$$a + c = b + d$$

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.2.6 **Vermischte Probleme**

In diesem Abschnitt werden im Lehrbuch nur Übungsaufgaben präsentiert.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.3 Was im erwähnten Lehrbuch noch vorausgesetzt ist

4.3.1 Allgemeine geometrische Grundlagen

Begriffe und Zusammenhänge:

1. Grundbegriffe
2. Grundrelationen
3. Axiome der euklidischen Geometrie
4. Definitionen von geometrischen Objekten (Elemente)
5. Lemmata, Theoreme und Korollare, Konstruktionsmethoden
6. Anwendungen dazu

Spezielle Übungen:

Konsultiere dazu die an Gymnasien verwendete Schulbuchliteratur älteren Datums. Neuere Literatur ist in dieser Beziehung oft nicht mehr genügend und daher unbrauchbar. Hier muss ein Kulturverlust bedauert werden, da am Beispiel der euklidischen Geometrie die mathematische Methodik exemplarisch vortrefflich geschult werden kann.

4.3.2 Kongruenzgeometrie

Begriffe und Zusammenhänge:

Kongruenz bei geometrischen Figuren bedeutet form- und flächen- oder grössengleich. Die Form einer Figur wird durch die Winkelgrößen bestimmt. Zwei Dreiecke sind kongruent:

1. Wenn sie in allen Seiten übereinstimmen.
2. Wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
3. Wenn sie in zwei Seiten und dem Winkel übereinstimmen, welcher der grösseren der beiden Seiten gegenüber liegt.
4. Wenn sie in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Spezielle Übungen:

Konsultiere dazu die an Gymnasien verwendete Schulbuchliteratur älteren Datums. Neuere Literatur ist in dieser Beziehung oft nicht mehr genügend und daher unbrauchbar. Hier muss ein Kulturverlust bedauert werden, da am Beispiel der euklidischen Geometrie die mathematische Methodik exemplarisch vortrefflich geschult werden kann.

4.4 Berechnungen am Kreis

4.4.1 Kreis und Kreisring

Begriffe und Zusammenhänge:

Kreis mit Radius r : Umfang $u = 2\pi r$, Flächeninhalt $A = r^2\pi$.

Kreisring mit Innenradius r , mittlerem Radius r_m und Aussenradius R : Ringbreite $b = R - r$;
Flächeninhalt $A = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi = (R + r)(R - r)\pi = 2r_m b\pi$, $r_m = r + \frac{b}{2} = R - \frac{b}{2}$.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.4.2 **Kreisring**

In diesem Abschnitt werden im Lehrbuch nur Übungsaufgaben präsentiert.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.4.3 Das Bogenmass

Begriffe und Zusammenhänge:

Das Bogenmass als Winkelmaß: $b = \text{Bogenlänge}$, $r = \text{Radius} \Rightarrow \varphi = \frac{b}{r}$.

Manchmal wird das Bogenmass als Winkelmaß auch mit $\hat{\varphi}$ oder auch mit $\text{arc}(\varphi)$ bezeichnet. In der Physik, wo zu Maßzahlen immer eine Einheit gehört, hat man für das Bogenmass die künstliche Einheit *rad* eingeführt. Dabei handelt es sich aber nicht um eine physikalische Einheit, da man die Einheitsbogenlänge nicht physikalisch eichen kann. (Zu physikalischen Einheiten gibt es immer ein Eichexperiment.) In der Physik wird meistens noch das Altgradmaß verwendet, das an das mittlere Jahr angelehnt ist. (Vollwinkel 360° , $360 = \text{Mittelwert zwischen dem Sonnenjahr zu 366 Tagen und dem Mondjahr zu 354 Tagen.}$)

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.4.4 Der Kreissektor

Begriffe und Zusammenhänge:

Sei $r =$ Radius, $b =$ Bogenlänge, $\varphi =$ Zentriwinkel, $A_{Sek} =$ Flächeninhalt. Dann gilt:

$$b = \varphi \cdot r, \quad A_{Sek} = \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$$

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.4.5 Das Segment

Begriffe und Zusammenhänge:

Wenn man von einem Kreissektor das durch die beiden Radien gebildete Dreieck wegnimmt, bleibt noch das durch den Bogen und die Sehne eingeschlossene Kreissegment.

Sei r = Radius, b = Bogenlänge, φ = Zentriwinkel, s = Sehnenlänge, h = Segmenthöhe, A_{Seg} = Flächeninhalt des Segments. Dann gilt:

$$A_{Seg} = A_{Sek} - A_{Dreieck} \text{ für } \varphi < \pi$$

$$A_{Seg} = A_{Sek} + A_{Dreieck} \text{ für } \varphi > \pi$$

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.4.6 Vermischte Probleme

In diesem Abschnitt werden im Lehrbuch nur Übungsaufgaben präsentiert.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.5 Strahlensätze

4.5.1 Die Sätze

Begriffe und Zusammenhänge:

Zwei sich in P schneidende Geraden erzeugen Paare von nicht parallelen, von P ausgehenden Strahlen s_1 und s_2 . Diese Strahlen werden von zwei Parallelen g_1 und g_2 geschnitten. Wenn wir die dadurch entstehenden Streckenabschnitte von P aus nummerieren, so erhalten wir auf s_1 die Strecken mit den Längen a_1 und a_2 . Auf s_2 erhalten wir die Strecken mit den Längen b_1 und b_2 . Und auf g_1 und g_2 die Strecken mit den Längen c_1 und c_2 . Dann gelten die Strahlensätze:

Regel:

1. Strahlensatz: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$
2. 2. Strahlensatz: $\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.5.2 Der Schwerpunkt des Dreiecks

Begriffe und Zusammenhänge:

In einem Dreieck heisst der Geradenabschnitt von einer Ecke zur Mitte der gegenüberliegenden Seite Schwerlinie. Dann gilt:

1. Die drei Schwerlinien in einem Dreieck schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S .
2. Der Schwerpunkt teilt jede Schwerlinie im Verhältnis $2 : 1$.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.5.3 Die Winkelhalbierenden im Dreieck

Begriffe und Zusammenhänge:

In einem Dreieck mit den Seiten a , b und c und den Eckpunkten A , B und C wird der Winkel γ bei C halbiert. Dadurch entsteht eine Winkelhalbierende Gerade, die die Seite c in die Abschnitte c_a (an a anliegend) und c_b (an b anliegend) teilt. Dann gilt:

$$\frac{c_a}{c_b} = \frac{a}{b}$$

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.6 Ähnliche Figuren

4.6.1 Die zentrische Streckung

Begriffe und Zusammenhänge:

Wir nennen eine Abbildung eines Urbildpunktes P in einen Bildpunkt P' eine **zentrische Streckung** mit Zentrum Z und Streckungsfaktor λ , wenn gilt:

1. P' liegt auf der Geraden \overline{ZP} .
2. $|\overline{ZP'}| = \lambda \cdot |\overline{ZP}|$.

Wenn $\lambda > 0$ ist, so kann statt der Geraden \overline{ZP} der Strahl \overline{ZP} zugrunde gelegt werden. Man sagt, dass dann P in P' positiv gestreckt wird.

Wenn $\lambda < 0$ ist, so wird P in P' negativ gestreckt.

Bei $|\lambda| \in (0, 1)$ spricht man von einer Verkleinerung.

Bei $|\lambda| > 1$ spricht man von einer Vergrößerung.

Bei $|\lambda| = 1$ ist das Bild kongruent zum Original.

Regel:

1. Das Bild einer Geraden ist eine Gerade.
2. Die Urbildgerade und die Bildgerade sind parallel.
3. Das Bild einer Strecke mit der Länge a hat die Länge $|\lambda| \cdot a$. Speziell gilt das für Kreisradien.
4. Für den Flächeninhalt A' des Bildes einer Figur mit der Flächeninhalt A gilt: $A' = \lambda^2 \cdot A$.
5. Winkel behalten bei der Abbildung ihre Grösse bei.

Wir sagen: Ein konvexes Viereck A ist in einer konvexen Figur B eingeschrieben, wenn jede Ecke von A auf dem Rande von B liegt.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.6.2 Ähnliche Figuren

Begriffe und Zusammenhänge:

Wir nennen eine Figur U ähnlich zu einer Figur V , wenn man eine zentrische Streckung angeben kann, welche U so vergrößert oder verkleinert, dass das Resultat kongruent zu V ist. Symbol: $U \sim V$.

Für ähnliche Figuren U und V gilt:

1. Alle entsprechenden Winkel sind gleich gross.
2. Alle entsprechenden Strecken oder Kurven haben dasselbe Längenverhältnis λ :
 $U \mapsto V \rightsquigarrow a \mapsto a' = \lambda a$.
3. Alle entsprechenden Flächen haben dasselbe Inhaltsverhältnis λ^2 :
 $F_U \mapsto F_V \rightsquigarrow F_k \mapsto F'_k = \lambda^2 F_k$.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.6.3 Ähnliche Dreiecke

Begriffe und Zusammenhänge:

Ähnlichkeit bei geometrischen Figuren bedeutet formgleich. Die Form einer Figur wird durch die Winkelgrößen bestimmt. Zwei Dreiecke sind kongruent:

1. Wenn sie in den Verhältnissen aller Seiten übereinstimmen.
2. Wenn sie in den Verhältnissen zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
3. Wenn sie in den Verhältnissen zweier Seiten und dem Winkel übereinstimmen, welcher der grösseren der beiden Seiten gegenüber liegt.
4. Wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.
5. Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Zwei Dreiecke sind in perspektiver Lage, wenn sie durch zwei sich schneidende Geraden g_1 und g_2 und zwei Parallelen h_1 und h_2 gebildet werden, welche g_1 und g_2 je in einem Punkt schneiden.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.6.4 Ähnlichkeit am Kreis, Sehnensatz, Sekanten–Tangentensatz

Begriffe und Zusammenhänge:

Sehnensatz: Sei S ein Punkt innerhalb eines Kreises. S schneidet eine Sehne u in zwei Teile u_1 und u_2 . Ebenso schneidet S v in zwei Teile v_1 und v_2 und auch w in w_1 und w_2 . Dann gilt:

$$u_1 \cdot u_2 = v_1 \cdot v_2 = w_1 \cdot w_2$$

Sekanten–Tangentensatz: Sei S ein Punkt ausserhalb eines Kreises. Die durch S gehende Gerade g schneidet den Kreis in T_1 und T_2 . $u_1 = |ST_1|$, $u_2 = |ST_2|$. Ebenso schneidet die durch S gehende Gerade h den Kreis in H_1 und H_2 . $v_1 = |SH_1|$, $v_2 = |SH_2|$. Dann gilt:

$$u_1 \cdot u_2 = v_1 \cdot v_2$$

Der Satz gilt auch noch, wenn h eine Tangente an den Kreis ist. Dann gilt $v_1 = v_2$.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

Kapitel 5

(I) Trigonometrie

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Geometrie“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [2])

5.1 Das rechtwinklige Dreieck

5.1.1 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

5.1.2 Aufgaben aus der Optik

5.1.3 Flächeninhalt eines Dreiecks

5.1.4 Berechnungen am Kreis

5.2 Das allgemeine Dreieck

5.2.1 Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel

5.2.2 Sinussatz

5.2.3 Cosinussatz

5.2.4 Vermischte Probleme mit Parameter

5.3 Probleme aus Physik und Technik

5.3.1 Probleme aus der Statik

5.3.2 Probleme aus der Vermessung

5.4 Ähnliche Figuren

5.5 Trigonometrische Funktionen

5.5.1 Argumente im Gradmass

5.5.2 Argumente im Bogenmass

5.5.3 Angewandte Aufgaben

5.6 Goniometrie

5.6.1 Beziehungen zwischen $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$

5.6.2 Additionstheoreme

5.6.3 Funktionen des doppelten Winkels

5.6.4 Transzendente Gleichungen

Kapitel 6

(I) Stereometrie

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Geometrie“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [2])

6.1 Beziehungen im Raum

6.1.1 Lage von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum

6.1.2 Winkel im Raum

6.2 Ebenflächig begrenzte Körper (Polyeder)

6.2.1 Das Prisma

6.2.2 Pyramide und Pyramidenstumpf

6.2.3 Prismatoide

6.2.4 Reguläre Polyeder (Platonische Körper)

6.3 Krümmflächig begrenzte Körper

6.3.1 Der Kreiszyylinder

6.3.2 Kreiskegel und Kreiskegelstumpf

6.3.3 Kugel und Kugelteile

6.3.4 Rotationskörper

6.4 Ähnliche Körper

6.5 Extremwertaufgaben

Kapitel 7

(I) Vektorgeometrie

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Geometrie“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [2])

7.1 Der Vektorbegriff

7.2 Elementare Vektoroperationen

7.3 Linearkombination und lineare Abhängigkeit von Vektoren

7.4 Vektoren im Koordinatensystem

7.4.1 Vektoren in der Ebene

7.4.2 Vektoren im Raum

7.5 Das Skalarprodukt

7.6 Die Gerade

7.7 Das Vektorprodukt

7.8 Die Ebene

Kapitel 8

(II) Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt-Verlag Bern (Lit. [3])

Kapitel 9

(II) Einleitung und Hinweise

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt-Verlag Bern (Lit. [3])

9.1 Notizen

Kapitel 10

(II) Vom Umgang mit den Platonischen Körpern

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt-Verlag Bern (Lit. [3])

10.1 Sprache der Form

10.2 Gestalt der Platonischen Körper

10.3 Darstellen der Platonischen Körper

10.4 Vom Goldenen Schnitt

10.5 Johannes Kepler und die Platonischen Körper

10.6 Gegenseitige Beziehungen

10.7 Polare Beziehungen

10.8 Durchdringungen

10.9 Kern und Schale

10.10 Umstülpungen

Kapitel 11

(II) Didaktische Bemerkungen

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt-Verlag Bern (Lit. [3])

11.1 Notizen

Kapitel 12

(II) Archimedische Körper

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt-Verlag Bern (Lit. [3])

12.1 Aus zweierlei Formkräften

12.2 Eine notwendige Einfügung

12.3 Abschleifen der Kanten beim Würfel

12.4 Aus dreierlei Formkräften

12.5 Die Sonderlinge

Kapitel 13

(II) Irdene und goldene Reihe

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt-Verlag Bern (Lit. [3])

13.1 Notizen

Kapitel 14

(II) Übersichten

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt-Verlag Bern (Lit. [3])

14.1 Eckenbildende Flächen der Platonischen Körper und ihre Abwicklungen

14.2 Eckenbildende Flächen der Archimedischen Körper und ihre Abwicklungen

Kapitel 15

(II) Polare Gebilde der Archimedischen Körper

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt-Verlag Bern (Lit. [3])

15.1 Grundsätzliches

15.2 Konstruktions–Anweisungen

15.3 Verwandeln der polaren Formen

Kapitel 16

(II) Symmetrieeigenschaften der regelmässigen Polyeder

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt-Verlag Bern (Lit. [3])

16.1 Notizen

Kapitel 17

(II) Sternartige Polyeder

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt-Verlag Bern (Lit. [3])

17.1 Keplers Dodekaederstern

17.2 Keplers Ikosaederstern

17.3 Bindelstern

17.4 Baravallestern

17.5 Vergleich der vier Sternkörper

17.5.1 Der Vielfächner aus 12 Fünfecken

17.5.2 Der Vielflächner aus 20 Dreiecken

Kapitel 18

(II) Räumliche Gebilde aus Diagonalen der Platonischen Körper

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt-Verlag Bern (Lit. [3])

18.1 Körper aus Flächendiagonalen

18.1.1 Tetraederzwilling

18.1.2 Würfelfünfling

18.2 Körper aus Raumdiagonalen des Dodekaeders

18.2.1 Hüllenstern

18.2.2 Tetraederfünflinge

18.2.3 Doppel-Tetraederfünfling

18.3 Körper aus Raumdiagonalen des Ikosaeders

18.3.1 Oktaederfünfling, dem Ikosaeder einbeschrieben

18.4 Vergleich der drei Fünflinge

18.5 Techniken

18.5.1 Modellbau

18.5.2 Spritzen

18.6 Mathematische Ergänzungen

18.6.1 Notizen

18.7 Literatur, Transparente und Abwicklungen

18.7.1 Notizen

Kapitel 19

(III) Algebra

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Algebra“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [4])

Kapitel 20

Grundlagen

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Algebra“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [4])

20.1 Grundbegriffe der Mengenlehre

20.1.1 Mengen und Elemente

Begriff und Zusammenhänge:

Eine Menge ist, etwas vereinfacht gesagt, eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten des Denkens. Die Objekte nennen wir Elemente. Eine Menge, welche keine Element enthält, heisst leere Menge. Die Menge aller Objekte, welche in einem gesetzten Fall betrachtet werden sollen, heisst Grundmenge.

Schreibweise:

1. $a \in M \rightsquigarrow$ Das Element a gehört zur Menge M . (a ist in M enthalten.)
2. $a \notin M \rightsquigarrow$ Das Element a gehört nicht zur Menge M .

Eine Menge kann wir folgt gegeben sein:

1. Durch eine Aufzählung der Elemente, z.B. $M = \{1, 2, 3, \dots, 45, 46\}$.
2. Durch die Angabe von definierenden Eigenschaften der Elemente, z.B. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = \pi\}$.
3. $M = \{\}$ (leere Menge).
4. $M = U$ (universelle Menge oder Grundmenge).

Eine Menge kann endlich viele Elemente haben (endliche Menge). Sie kann aber auch unendlich viele Elemente haben (unendliche Menge). \mathbb{N} und \mathbb{R} sind unendliche Mengen.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.1.2 Teilmengen

Begriff und Zusammenhänge:

Wenn jedes Element einer Menge A auch in einer anderen Menge B enthalten ist, so heisst A Teilmenge von B .

Schreibweise:

1. $A \subset B \rightsquigarrow$ Unechte Teilmenge. B ist grösser (hat mehr Elemente) als A .
2. $A \subseteq B \rightsquigarrow$ Echte Teilmenge. B ist grösser als oder gleich zu A .

Darstellung: Durch Mengendiagramme (Euler-, früher auch Venn—Diagramme).

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.1.3 Schnittmengen, Vereinigungsmengen

Begriffe:

Die Menge der Elemente, welche sowohl in A als auch in B enthalten sind, heisst Schnittmenge $A \cap B$ von A und B .

Die Menge der Elemente, welche in A oder in B (oder in beiden zugleich) enthalten sind, heisst Vereinigungsmenge $A \cup B$ von A und B .

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.1.4 Differenzmenge

Begriff:

Die Menge der Elemente, welche in A , aber nicht in B enthalten sind, heisst Differenzmenge $A \setminus B$ von A und B .

Die Mengendifferenz einer Menge A zur Grundmenge U heisst Komplement \bar{A} von A bezüglich U .

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.1.5 Mengenalgebra

Zusammenhänge:

Für Mengen und ihre Beziehungen ($\subset, \cap, \cup, \setminus$ u.s.w.) gelten eine ansehnliche Anzahl von Regeln, die wegen ihres Umfangs hier nicht alle aufgezählt werden können. Einige davon sind:

Regel:

1. $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativgesetz)
2. $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetz)
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativgesetz)
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativgesetz)
5. $A \cup \{\} = A$ ($\{\}$ ist neutral)
6. $A \cap \{\} = \{\}$ (wie $x \cdot 0 = 0$)
7. $A \cup U = U$ (wie $x \cdot 0 = 0$)
8. $A \cap U = A$ (U ist neutral)
9. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
10. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
11. u.s.w.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.2 Rechnen mit Näherungswerten

20.2.1 Exakte Werte und Näherungswerte

Regeln und Zusammenhänge:

Bsp.:

1, 4, -6, $\frac{2}{3}$, $0.25 = \frac{1}{4}$, $0.33\bar{3}\dots = \frac{1}{3}$, π , ... sind exakte Werte.

Näherungswerte sollten dagegen immer speziell gekennzeichnet werden.

Beispiele: $F = 0.124 \pm 0.001$, $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\pi \approx 3.14159$, $\pi \approx 3.14 \pm 0.01$. Leider muss man feststellen, dass die exakte Unterscheidung zwischen exakten Werten und Näherungswerten in der Literatur oft zu wünschen übrig lässt.

Bei physikalischen Messgrößen (Zahl mit einer Einheit), die nicht Zählgrößen oder exakte Anzahlen sind, geht man davon aus, dass die letzte geschriebene Ziffer gerundet ist.

Da in den Wissenschaften oft eine „wissenschaftliche Zahlenschreibweise“ verwendet wird, muss man den Begriff der „geltenden Ziffern“ beachten. Das sind die wesentlichen Ziffern, die z.B. beim Messen an der Skalierung ablesbar sind, ohne eventuelle Ziffern 0, welche nur vom Masssystem abhängen.

Beispiele: $1.32 \text{ m} = 0.00132 \text{ km} = 13.2 \text{ dm} = 1.32 \cdot 10^3 \text{ mm} \approx 1320 \text{ mm}$. Hier hat man die geltenden Ziffern 1, 2 und 3.

Rundungen:

Regel:

1. Ist ein abbrechender Dezimalbruch als gerundet (als unexakt) gekennzeichnet, so geht man davon aus, dass nur die letzte geschriebene Ziffer z_n unexakt, d.h. gerundet ist.
2. Für die Rundung ist die nächste, nicht mehr geschriebene Ziffer z_{n+1} entscheidend.
3. Ist $z_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, so wird abgerundet (Konvention).
4. Ist $z_{n+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, so wird aufgerundet (Konvention).

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.2.2 Fehlertypen

Definitionen und Zusammenhänge:

Exakte Fehler bei bekannten exakten Werten

Seien a = exakter Wert und \bar{a} = Näherungswert. Dann ist $\varepsilon = |a - \bar{a}|$ der absolute Fehler.

Dazu bezeichnet man $\rho = \frac{\varepsilon}{|a|}$ als den relativen Fehler.

Der relative Fehler kann auch in Prozent angegeben werden: $\rho\% = \rho \cdot 100\%$

Unbekannte Fehler bei unbekanntem exaktem Wert

Bei Messwerten ist in der Regel der exakte Wert unbekannt. Dafür kann man aber verlässliche Toleranzen oder Fehlerschranken angeben. Z.B. liegt eine Messung a im Intervall zwischen $\bar{a} - \Delta a$ und $\bar{a} + \Delta a$ ($\Delta a > 0$). Dann schreibt man: $a = \bar{a} \pm \Delta a$.

Δa heisst hier absoluter Fehler und $\rho = \frac{\Delta a}{|a|}$ relativer Fehler. Der Messwert und der absolute Fehler sollten immer gleich viele Dezimalstellen aufweisen, da die Schreibweise nur so Sinn macht.

$\rho\% = \frac{\Delta a}{|a|} \cdot 100\%$ ist der relative Fehler in Prozent.

Bsp.: $10.0 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm} = 10.0 \text{ cm} \pm 1\%$

Regel:

1. Absolute und relative Fehler sollten immer aufgerundet werden.
2. Absolute und relative Fehler sollten immer auf höchstens zwei geltende Ziffern genau angegeben werden.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.2.3 Rechnen bei Verwendung von Näherungswerten

Regel:

1. Fehlt bei einem Wert die Fehlerangabe, so geht man davon aus, dass die letzte Ziffer einen absoluten Fehler von ± 1 hat.
Beispiel: $3.8 \text{ cm} = 3.8 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$.
2. In der Regel ist bei einer Verrechnung von Näherungswerten das Fehlerfortpflanzungsgesetz anzuwenden. Dieses Gesetz kann hier aber mangels Theorie nicht behandelt werden. Es ist aber üblich, mit folgenden Näherungen zu arbeiten:
3. Bei einer Addition oder Subtraktion von Werten mit verschiedenen absoluten Fehlern gilt für das Resultat der grösste vorkommende absolute Fehler. Beispiel: $14 + 2.4 - 0.68 \approx 14 + 2.4 - 0.7 = 14 + 1.7 \approx 14 + 2 = 16$
4. Bei der Multiplikation und der Division wird oft so verfahren, dass man im Resultat die gleiche Anzahl geltende Ziffern verwendet wie der ungenaueste verrechnete Näherungswert aufweist. Diese Regel wird aber aus pragmatischen Gründen (mangels Mathematik-Kenntnissen) und daher ohne Begründung verwendet. Man soll ja ein Resultat liefern und hat dabei vorerst keine andere Möglichkeit als so vorzugehen (Prinzip von Descartes für das methodische Vorgehen bei der Interpretation von Messungen).

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.2.4 Rechnen bei Verwendung von Näherungswerten ohne Fehlerangabe

Beispiele:

Siehe Lehrbuch.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

Kapitel 21

(III) Arithmetik

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Algebra“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [4])

21.1 Zahlen, Terme, Ordnungsrelationen

21.1.1 Zahlenmengen

Begriffe:

1. Definition der natürlichen Zahlen \mathbb{N} als Anzahlen oder Mächtigkeiten von Mengen, dazu etwas Theorie. Bemerkung zu der axiomatischen Definition von \mathbb{N} .
2. Definition der ganzen Zahlen \mathbb{Z} als Lösungen von $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{N}$, dazu etwas Theorie.
3. Definition der rationalen Zahlen \mathbb{Q} als Lösungen von $a \cdot x = b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, dazu etwas Theorie. Dichtheit von \mathbb{Q} .
4. Das Problem der irrationalen Zahlen: \mathbb{Q} ist zwar dicht, jedoch hat \mathbb{Q} Löcher: Z.B. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (Beweis).
5. Definition der irrationalen Zahlen „Menge der Löcher in \mathbb{Q} “, dazu etwas Theorie.
6. Definition der reellen Zahlen \mathbb{R} als $\mathbb{Q} \cup$ „Menge der Löcher in \mathbb{Q} “, dazu etwas Theorie.
7. Darstellung von \mathbb{R} als Menge von Dezimalbrüchen, dazu etwas Theorie: Problem der Doppeldeutigkeit.
Z.B. $1.00\dots = 0.99\dots$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.1.2 Der Betrag einer Zahl

Begriff und Zusammenhänge:

Definition: Betrag von a :

$$|a| = a \text{ für } a \geq 0, -|a| = a \text{ für } a < 0.$$

$|a|$ entspricht dem (positiven) Abstand bei Längenmessungen an Gegenständen oder zwischen zwei Punkten in einem Koordinatensystem.

Regel:

1. $|a - b| = |b - a|$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ für $b \neq 0$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.1.3 Terme

Begriff und Zusammenhänge:

Terme werden durch folgende Regeln aufgebaut:

1. Zahlen, Parameter, Variable und Produkte von Zahlen, Parameter und Variablen sind Terme.
2. Summen (und Differenzen) von Termen sind Terme.
3. Produkte und Quotienten von Termen sind Terme.

Bsp.: $0, 1, -1, 3.414, \pi, -\frac{7}{9}, a, b, x, x^2, x^9, -2+4\cdot x-8x^2+a\cdot\frac{7}{9}\cdot x^9, \frac{7x-ax^3}{9+4x^2-6x^5}\dots$

Zur Zahl 0:

1. $\pm 0 + a = a$
2. $0 \cdot a = 0$
3. $\frac{0}{a} = 0, a \neq 0$
4. $\frac{a}{0}$ ist nicht definiert. ($\frac{a}{0} = b$ führt auf $a = 0 \cdot b = 0\dots$)

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.1.4 Polynome

Begriff:

Polynome $p(x)$ in einer Variablen x sind Terme, die man in folgender Form schreiben kann:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \text{ Dabei ist } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_n \neq 0.$$

n heisst Grad des Polynoms $p(x)$.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.1.5 Ordnungsrelationen

Begriffe:

Die reellen Zahlen sind geordnet, z.B. im Gegensatz zu den Geraden des Raumes. Man weiss daher, ob eine gegebene Zahl grösser, gleich oder kleiner als eine gegebene andere Zahl ist.

1. $a < b \rightsquigarrow a$ ist kleiner b .
2. $a \leq b \rightsquigarrow a$ ist kleiner oder gleich b .
3. $a > b \rightsquigarrow a$ ist grösser b .
4. $a \geq b \rightsquigarrow a$ ist grösser oder gleich b .
5. $a < 0 \rightsquigarrow a$ ist negativ.
6. $a > 0 \rightsquigarrow a$ ist positiv.
7. $a < x < b \rightsquigarrow a$ kleiner x kleiner $b \rightsquigarrow x$ liegt zwischen a und b , ist aber nicht gleich a oder b .
8. $a \leq x \leq b \rightsquigarrow a$ kleiner oder gleich x kleiner oder gleich $b \rightsquigarrow x$ liegt zwischen a und b oder ist gleich a oder b .
9. U.s.w.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.2 Addition, Subtraktion

Zusammenhänge:

1. Terme, welche Additions- und Subtraktionszeichen enthalten, können zur besseren Übersicht mit Klammern geschrieben werden.
2. Zwecks Vereinfachung durch Ausführung der Addition oder Subtraktion bei Teilen mit gleichen Variablenanteilen können Terme, welche Additions- und Subtraktionszeichen enthalten, ohne Klammern geschrieben werden.
3. Wenn vor einer Klammer ein Pluszeichen steht, so kann diese Klammerung weggelassen werden.
4. Wenn vor einer Klammer ein Minuszeichen steht, so kann diese Klammerung nur dann weggelassen werden, wenn vorher alle Plus- und Minuszeichen vor klammerlosen Termen oder geklammerten Termen ausgewechselt worden sind. Die Plus- und Minuszeichen in etwa vorkommenden inneren Klammern dürfen jedoch nicht geändert werden.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.3 Multiplikation

21.3.1 Distributivgesetz, binomische und trinomische Formeln

Regeln:

1. $a(bc) = (ab)c = abc$ (Assoziativgesetz)
2. $a(b+c) = ab+ac$ (Distributivgesetz)
3. $a(b-c) = ab-ac$ (Distributivgesetz)
4. $(a+b)^2 = (b+a)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Binomische Formel)
5. $(a-b)^2 = (b-a)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (Binomische Formel)
6. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (Binomische Formel)
7. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (Binomische Formel)
8. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (Binomische Formel)
9. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ (Binomische Formel)

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.3.2 Faktorzerlegung

Methoden:

1. Ausklammern eines gemeinsamen Faktors, Beispiel:

$$12a^4b^2 - 4a^3b^3 + 6ab^2 = 2ab^2(6a^3 - 2a^2b + 3)$$

2. Mehrmaliges Ausklammern, Beispiel:

$$x^2 - xy - xz - 3x + 3y + 3z = x(x - y - z) - 3(x - y - z) = (x - 3)(x - y - z)$$

3. Nach dem Muster von Binomen, Beispiel $(a^2 - b^2)$:

$$(u + 3)^2 - (u - 3)^2 = ((u + 3) + (u - 3))((u + 3) - (u - 3)) = 2u \cdot 6 = 12u$$

4. Nach dem Muster von Binomen, Beispiel $((ax + b)(x + c) = ax^2 + (ac + b)x + a \cdot c)$:

$$u^2 - 3u - 28 = (u - 7)(u + 4)$$

Hinweis: Man setze $u^2 - 3u - 28 = (u + b)(u + c) \Rightarrow b \cdot c = -28 = (-1) \cdot 7 \cdot 4$. Dann verteile man die Zahlen (-1) , 7 , 4 auf b und c und probiere aus, ob das mittlere Glied bei der gewählten Verteilung richtig ist. Falls nicht, so wähle man die Verteilung anders und probiere wieder, bis es passt.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.4 Division

21.4.1 Erweitern und kürzen

Methoden:

1. Regel 1:

$$\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$$

2. Regel 2:

$$\frac{x-y}{y-x} = -1$$

3. Erweitern mit $x+y$, Beispiel:

$$\frac{3u}{4v} = \frac{3u(x+y)}{4v(x+y)} = \frac{3ux+3uy}{4vx+4vy} \quad \text{für } 4v(x+y) \neq 0$$

4. Kürzen mit $x+y$, Beispiel:

$$\frac{3ux+3uy}{4vx+4vy} = \frac{3u(x+y)}{4v(x+y)} = \frac{3u}{4v} \quad \text{für } 4v(x+y) \neq 0$$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.4.2 Addieren und subtrahieren

Methode erklärt an einem Beispiel, angelehnt an das Lehrbuch:

Behandle den folgenden Ausdruck:

$$\frac{u^2 - 8u}{2u^2 + u - 15} - \frac{u^2}{5u - 2u^2}$$

1. Kürze die einzelnen Brüche:

$$\frac{u^2 - 8u}{2u^2 + u - 15} - \frac{u^2}{5u - 2u^2} = \frac{u^2 - 8u}{2u^2 + u - 15} - \frac{u}{5 - 2u}$$

2. Bestimme den Hauptnenner (kgV):

$$N_1 = 2u^2 + u - 15 = (2u - 5)(u + 3), \quad N_2 = (-1)(2u - 5) \Rightarrow \text{kgV} = (2u - 5)(u + 3)$$

3. Erweitere die einzelnen Brüche bis der Hauptnenner erreicht ist, Beispiel:

$$= \frac{u^2 - 8u}{2u^2 + u - 15} - \frac{u}{5 - 2u} = \frac{u^2 - 8u}{(2u - 5)(u + 3)} + \frac{u}{2u - 5} = \frac{u^2 - 8u}{(2u - 5)(u + 3)} + \frac{(u + 3)u}{(u + 3)(2u - 5)}$$

4. Addiere oder subtrahiere dann und vereinfache gegebenenfalls, Beispiel:

$$= \frac{u^2 - 8u}{(2u - 5)(u + 3)} + \frac{(u^2 + 3u)}{(u + 3)(2u - 5)} = \frac{2u^2 - 5u}{(2u - 5)(u + 3)} = \frac{(2u - 5)u}{(2u - 5)(u + 3)} = \frac{u}{u + 3}$$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.4.3 Multiplizieren

Methode erklärt an einem Beispiel, angelehnt an das Lehrbuch:

Behandle den folgenden Ausdruck:

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)^2 \left(1 + \frac{b^2}{b^2 + b}\right) \left(2 - \frac{2b^2 + 2b - 1}{b^2 + b}\right)$$

1. Kürze die einzelnen Brüche:

$$= \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2 \left(1 + \frac{b^2}{b^2 + b}\right) \left(2 - \frac{2b^2 + 2b - 1}{b^2 + b}\right) = \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2 \left(1 + \frac{b}{b+1}\right) \left(2 - \frac{2b^2 + 2b - 1}{b(b+1)}\right)$$

2. Schreibe alle Faktoren als Brüche:

$$= \left(\frac{b+1}{b}\right)^2 \left(\frac{b+b+1}{b+1}\right) \left(\frac{2b^2 + 2b - 2b^2 - 2b + 1}{b(b+1)}\right) = \left(\frac{(b+1)^2}{b^2}\right) \left(\frac{2b+1}{b+1}\right) \left(\frac{1}{b(b+1)}\right)$$

3. Bringe alles auf einen Bruchstrich und kürze, Beispiel:

$$= \frac{(b+1)^2 (2b+1)}{b^2 (b+1) b(b+1)} = \frac{(b+1)^2 (2b+1)}{b^3 (b+1)^2} = \frac{2b+1}{b^3}$$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.4.4 Dividieren

Methoden, Beispiele:

1. Brüche werden dividiert, indem man den Nennerbruch umstürzt und multipliziert:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a d}{b c}$$

2. Beim Dividieren sind Klammerungen notwendig:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b c} \neq \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{\left(\frac{a}{1}\right)}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a c}{b}$$

3. Bringe im Zähler sowie auch im Nenner alles auf je einen Bruchstrich und kürze, Beispiel:

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}}{\frac{3}{12} + \frac{2}{12}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{1} = 2$$

Hier ist das kgV von 2, 3, 4, 6 gleich 12.

4. Kettenbrüche sind Brüche der Form

$$\frac{a}{b + \frac{c}{d + \frac{e}{f + \dots}}}$$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe und Zusammenhänge klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Made dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.4.6 Vermischte Probleme

Die Übungen beziehen sich auf die vorangegangenen Abschnitte.

Spezielle Übungen:

Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.5 Potenzen

21.5.1 Definition von a^n

Definitionen und Regeln:

a^n heisst **Potenz**. Dabei ist a die **Basis** und n der **Exponent**.

1. $a^1 = a$.

2. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, $n \geq 2$.
 n Faktoren

3. Sei $a \neq 0$: $a^0 = 1$.

4. Sei $a \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}$: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

5. Sei $a b \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}$: $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$.

6. Sei $n \in \mathbb{N}$: $(-1)^{2n} = 1$, $(-1)^{2n+1} = -1$.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe und Zusammenhänge klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.5.2 Addieren und subtrahieren von Potenzen

Regel:

$$1. \quad a x^n + b x^{n+r} - c x^{n+s} = (a + b x^r - c x^s) x^n$$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Zusammenhänge klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.5.3 Anwendung der Potenzsätze

Regeln:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $b \neq 0$
2. $a^n \cdot a^n = (a \cdot b)^n$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Zusammenhänge klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.5.4 Vermischte Probleme

Spezielle Übungen:

Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.5.5 Zehnerpotenzen

Definitionen und Regeln:

10^r heisst **10–er Potenz**. Dabei ist 10 die **Basis** und r der **Exponent**.

$a \cdot 10^k$ mit $a \in [1, 10]$ heisst **wissenschaftliche Zahlenschreibweise**.

Beispiele: $153.952 = 1.53952 \cdot 10^2$, $0.00153952 = 1.53952 \cdot 10^{-3}$

Faktoren und Bezeichnungen:

Vorsatz	Symbol	Faktor
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	k	10^3
Hekto	h	10^2
Deka	da	10^1
Dezi	d	10^{-1}
Zenti	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Piko	p	10^{-12}

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe und Zusammenhänge klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.6 Wurzeln

21.6.1 Die Quadratwurzel

21.6.2 Definition von $\sqrt[n]{a^m}$ und Potenzdarstellung von $\sqrt[n]{a^m}$

21.6.3 Das Rechnen mit Wurzeln

21.6.4 Vermischte Probleme

21.7 Logarithmen

21.7.1 Zehnerlogarithmen (dekadische Logarithmen)

21.7.2 Logarithmen mit beliebiger Basis

21.7.3 Logarithmengesetze

Kapitel 22

(III) Gleichungen

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Algebra“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [4])

22.1 Aussagen und Aussageformen

22.1.1 Aussagen

22.1.2 Verknüpfung von Aussagen

22.1.3 Aussageformen

22.1.4 Äquivalenz von Aussageformen

22.2 Lineare Gleichungen

22.2.1 Gleichungen ohne Parameter

22.2.2 Gleichungen mit Parametern

22.2.3 Lineare Ungleichungen

22.3 Quadratische Gleichungen

22.3.1 Definition

22.3.2 Äquivalente und nicht äquivalente Umformungen

22.3.3 Lösungsverfahren

22.3.4 Sonderfälle

Allgemeiner Fall

22.3.5 Substitution

22.3.6 Textaufgaben

22.3.7 Parameteraufgaben, Satz von Vieta

22.3.8 Zerlegung von $ax^2 + bx + c$ in Linearfaktoren

22.4 Quadratische Gleichungen

22.4.1 Definition

22.4.2 Äquivalente und nicht äquivalente Umformungen

22.4.3 Lösungsverfahren

Sonderfälle

Allgemeiner Fall

Substitution

22.4.4 Textaufgaben

22.4.5 Parameteraufgaben, Satz von Vieta

22.4.6 Zerlegung von $ax^2 + bx + c$ in Linearfaktoren

22.5 Besondere Gleichungstypen

22.5.1 Bruchgleichungen

22.5.2 Wurzelgleichungen

22.5.3 Produkt = 0

22.5.4 Exponentialgleichungen

22.5.5 Logarithmische Gleichungen

22.6 Gleichungen mit mehreren Unbekannten

22.6.1

Lineare Gleichungen mit zwei

22.6.2 Lineare Gleichungen mit drei und mehr Unbekannten

22.6.3 Nicht lineare Gleichungssysteme

22.7 Vermischte Textaufgaben

22.8 Gleichungen 3. und höheren Grades, transzendente Gleichungen

Kapitel 23

(III) Funktionen

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Algebra“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [4])

23.1 Kartesisches Koordinatensystem

23.2 Der Funktionsbegriff

23.3 Lineare Funktionen

23.3.1 Definition der linearen Funktion

3.3.6 Abschnittsweise lineare Funktionen 3.3.7 Betragsfunktionen 3.3.8 Geradenscharen 3.3.9 Graphisches Lösen linearer Gleichungssysteme

23.3.2 Der Graph einer linearen Funktion

23.3.3 Aufgaben aus der Praxis

23.3.4 Berechnung von Flächen

23.3.5 Senkrechte Geraden

23.3.6 Abschnittsweise lineare Funktionen

23.3.7 Betragsfunktionen

23.3.8 Geradenscharen

23.3.9 Graphisches Lösen linearer Gleichungssysteme

23.4 Quadratische Funktionen

23.4.1 Der Graph einer quadratischen Funktion

23.4.2 Quadratische Ungleichungen

23.4.3 Bestimmung der Funktionsgleichung

23.4.4 Schnittpunkte von Graphen

23.4.5 Parabel und Tangente

23.4.6 Parabelscharen

23.4.7 Geometrische Örter

23.4.8 Extremwertaufgaben

23.4.9 Graphisches Lösen nicht linearer Gleichungssysteme

23.4.10 Probleme aus Physik und Technik

23.5 Potenzfunktionen

23.6 Polynomfunktionen

23.7 Rationale Funktionen

23.8 Umkehrung von Funktionen

23.9 Wurzelfunktionen

23.10 Exponentialfunktionen

23.11 Logarithmusfunktionen

23.12 Winkelfunktionen

23.13 Optimieren

23.13.1 Lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten

23.13.2 Lineare Optimierung

23.13.3 Extremwertaufgaben

Literaturverzeichnis

- [1] <http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html>, Grundlagen
- [2] Mathematik für Mittelschulen, Geometrie, Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag
Siehe unter dem Link <http://www.sauerlaender.ch>
- [3] Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde, Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt-Verlag Bern
- [4] Mathematik für Mittelschulen, Algebra, Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag
Siehe unter dem Link <http://www.sauerlaender.ch>

ENDE