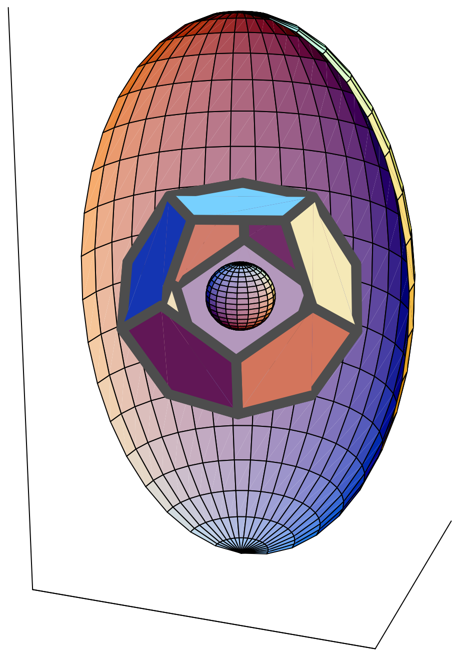
Script ◇ Math ◇ Ing
◇ Anhang: Datensatzänderung ◇
◇ Wahrscheinlichkeitssituationen ◇
◇ kurz & bündig ◇



Scripta bilingua

von

Rolf Wirz

BFH Departemente AHB und TI

V.1.1.1 / 28. Januar 2009 **Deutsche Version!**

WIR/Win XP/ PC–TeX/AnhangDatensathaenderung.tex

Produziert mit LaTeX PCTeX / Win XP.

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Konfuzius)

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Adresse des Autors:

Inhaltsverzeichnis

1 Anhang: Datensatzänderung **1**

1.1 Die Problemstellung . . . 1

1.1.1 Beurteilung einer Korrekturmöglichkeit . . . 1

1.2 Die Minimaleigenschaft des Mittelwerts . . . 2

1.2.1 Varianz, Standardabweichung und Wahrscheinlichkeitsfunktion . . . 2

1.2.2 Minimaleigenschaft des Mittelwerts . . . 3

1.3 Verkleinerung der StD bei Erweiterung eines Datensatzes . . . 3

1.3.1 Verkleinerung . . . 3

1.3.2 Konsequenzen für den Mittelwert . . . 4

1.4 Vergrösserung der StD bei Erweiterung eines Datensatzes . . . 4

1.5 Umrechnung des Mittelwerts und der empirischen StD . . . 6

1.5.1 Eine Formel für den Mittelwert . . . 6

1.5.2 Eine Formel für die empirische Varianz . . . 6

1.5.3 Anwendung: Berechnung einer veränderten StD . . . 7

1.6 Beispiel . . . 8

1.7 Übung . . . 8

2 Anhang: Spezielle Wahrscheinlichkeitssituationen **9**

2.1 Kreuztabellen, Beispiel . . . 9

2.2 Ein Beispiel mit einem Taxi, das Fragen aufwirft . . . 11

2.3 „Wie alt ist der Kapitän?“ . . . 15

Kapitel 1

Anhang: Datensatzänderung

1.1 Die Problemstellung

Situation:

Aus einer Publikation (Archiv) kennt man statistische Kenngrössen eines Datensatzes, der aus $n = a$ Messungen eines Merkmals bestanden hat (a steht für „alte"). Die einzelnen Messungen stehen nicht mehr zur Verfügung. Mit diesem Datensatz ist jetzt ein Problem entstanden: Man hat erfahren, dass von den $m = a$ Messungen deren $m_1 = f$ garantiert falsch eingetragen waren, wobei man die verwechselten Werte kennt (f steht für „falsche"). An einer Messvorrichtung ist ein systematischer Fehler entdeckt worden. Weiter hat man herausgefunden, dass $m_2 = v$ Werte in der Statistik nicht erfasst worden sind, denn die Daten von einer Messvorrichtung sind damals verloren gegangen, jetzt aber wieder aufgetaucht (v steht für „verlorene").

Problem:

Welche statistischen Kenngrössen kann man jetzt im Nachhinein korrigieren und wie stellt man dies an?

1.1.1 Beurteilung einer Korrekturmöglichkeit

Minimum, Maximum, Spanne

Wir stellen uns eine Strichliste oder ein Histogramm der damals vorhandenen Daten vor. Anhand einer beliebig angenommenen Konstellation sehen wir, dass Minimum, Maximum und Spanne von einzelnen Daten abhängen. Anhand der Korrekturdaten können wir feststellen, ob die genannten Kenngrössen richtig oder flasch sind.

Konsequenz:

Minimum, Maximum und Spanne können in der gegebenen Situation korrigiert werden.

Median und Modus

Da wir die einzelnen Daten nicht mehr kennen und damit auch über ihre Rangliste und ihre Frequenztabelle nichts wissen, kann über den Median und den Modus nichts ausgesagt werden. Dazu sind jetzt die Grundlagen nicht mehr vorhanden.

Mittelwert, Varianz und Standardabweichung

Für diese Kenngrössen ist eine Korrektur sehr wohl möglich. Nachfolgend werden wir das Vorgehen dazu mittels einer vertieften Diskussion der Sache erhellen.

Methode:

Der Einfachheit halber gehen wir nach den Korrekturen (1) $m_1 = f$ und (2) $m_2 = v$ getrennt und unabhängig vor. In der Praxis kann man dann z.B. zuerst die Korrektur (1) vornehmen und die so erhaltene Situation dann als Ausgangsbasis (mit $n = a$) für die Korrektur (2) verwenden.

1.2 Die Minimaleigenschaft des Mittelwerts

1.2.1 Varianz, Standardabweichung und Wahrscheinlichkeitsfunktion

Bemerkung: Nachfolgend benützen wir die Abkürzung **StD** für die **Standardabweichung** *(<u>St</u>andard<u>D</u>eviation)*, **StD**$:= \hat{\sigma}$

Aus der Literatur ersieht man, dass allgemein als **erwartungstreuer Schätzer der Standardabweichung** σ

$$V(X) = \sigma^2 = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

die folgende Grösse (empirische Standardabweichung) Verwendung findet ($V(X)$ = Varianz):

$$\hat{\sigma} = StD = s_X^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \ \ (var = s_X^*)^2 = \hat{\sigma}^2)$$

Der vermutlich von „Uneingeweihten“ vorerst als StD erwartete Maximum–Likelihood–Schätzer (für eine Normalverteilung)

$$s_{ML}^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

weicht für grosse n normalerweise nicht sehr viel von s_X^* ab. Dabei ist jeweils $(s^*)^2 = var$ die empirische Varianz.

Wir führen die nachfolgenden Betrachtungen mit s_X^* aus. Mit s_{ML}^* wäre das Vorgehen und die Resultate analog.

Wir betrachten nun die zur empirischen StD gehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion mit der Variablen $\bar{X}$:

$$f(\bar{X}) = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2\right)^{\frac{1}{2}} \ \Rightarrow \ StD = s_X^* = f(\bar{x}).$$

Dabei ist hier $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ der arithmetische Mittelwert des Datensatzes $DS_n := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

1.2.2 Minimaleigenschaft des Mittelwerts

Satz: $$\bar{X} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{minimiert} \quad f(\bar{X}) \text{ und } (f(\bar{X}))^2, \quad n > 1.$$

Beweis:

$$\bar{X} = \bar{x} \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i) - n\cdot\bar{X} = n\cdot\bar{x} - n\cdot\bar{X} = n\cdot\bar{x} - n\cdot\bar{x} = 0$$

$$\Rightarrow\; f\,'(\bar{X}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}2\cdot(x_i-\bar{X}) =$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{(n-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(n-1)}\right)}_{\neq 0}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})}_{=0,\quad \bar{X}=\bar{x}} = 0$$

$\rightsquigarrow \quad \Rightarrow\; f\,'(\bar{X}) = 0$ für und nur für $\bar{X} = \bar{x}$.

Da $f(\bar{X})$ in X unter der Wurzel quadratisch ist mit positiver Parabelöffnung, ist in $\bar{x}$ und nur in $\bar{x}$ ein Minimum von $f(\bar{X})$ vorhanden. q.e.d.

Daraus folgt, dass $f(\bar{X})$ für ein anderes $x^* \neq \bar{x}$ grösser wird als $f(\bar{x}) = StD$.

Korollar: $$x^* \neq \bar{x} \;\Rightarrow\; f(x^*) > f(\bar{x}) = StD$$

1.3 Verkleinerung der StD bei Erweiterung eines Datensatzes

1.3.1 Verkleinerung

Wir wollen hier zeigen, dass man einen gegebenen Datensatz $\{x_1, x_2 \ldots x_n\}$ durch hinzufügen neuer Daten $x_1\,', x_2\,', \ldots, x_m\,'$ so erweitern kann, dass der neue Datensatz $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1\,', x_2\,', \ldots, x_m\,'\}$ eine kleinere StD besitzt. Die $x_k\,'$ wählen wir geeignet.

Seien $$f_n(\bar{X}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad f_{n+m}(\bar{X}) = \frac{1}{n+m-1}\left(\underbrace{(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2) + (\sum_{k=1}^{m}(x_k\,'-\bar{X})^2)}_{:=\sum_{i=1}^{n+m}(x_i-\bar{X})^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Wähle $$x_k\,' := \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \;\rightsquigarrow\; \sum_{k=1}^{m}(x_k\,'-\bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{m}(\bar{x}-\bar{x})^2 = 0$$

$$\rightsquigarrow\quad f_n(\bar{X}) \geq f_n(\bar{x}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{n+m-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + 0\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{n+m-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{k=1}^{m}(x_k{}'-\bar{x})^2)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+m-1}\left(\sum_{i=1}^{n+m}(x_i-\bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leadsto \quad StD_n = f_n(\bar{x}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{n+m-1}\left(\sum_{i=1}^{n+m}(x_i-\bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}} = f_{n+m}(\bar{x}) = StD_{n+m}$$

Die Standardabweichung StD_{n+m} des erweiterten Datensatzes ist im betrachteten Falle also kleiner als die Standardabweichung StD_n des ursprünglichen Datensatzes. Die gegebene Erweiterung mit $x_k{}' = \bar{x}$ ist in jedem Falle möglich.

Satz: Zu einem Datensatz existiert immer eine Erweiterung mit kleinerer Standardabweichung.

1.3.2 Konsequenzen für den Mittelwert

Seien $\bar{x}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \;\; x_k{}' = \bar{x}_n \qquad \Rightarrow \; \bar{x}_{n+m} = \frac{1}{n+m}\left((\sum_{=1}^{n} x_i) + (\sum_{k=1}^{m} x_k{}')\right) =$

$$= \frac{1}{n+m}\left((n\cdot\bar{x}_n)+(m\cdot\underbrace{\bar{x}_m{}'}_{=\bar{x}_n})\right) = \frac{1}{n+m}\,((n\cdot\bar{x}_n)+(m\cdot\bar{x}_n)) = \frac{1}{n+m}\,(n+m)\cdot\bar{x}_n = \bar{x}_n$$

Sei $\bar{x}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{x}_m{}' := \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{k} x_k{}' = \bar{x}_n \qquad \Rightarrow \; \bar{x}_{n+m} = \frac{1}{n+m}\left((\sum_{=1}^{n} x_i) + (\sum_{k=1}^{m} x_k{}')\right) =$

$$= \frac{1}{n+m}\left((n\cdot\bar{x}_n)+(m\cdot\underbrace{\bar{x}_m{}'}_{=\bar{x}_n})\right) = \frac{1}{n+m}\,((n\cdot\bar{x}_n)+(m\cdot\bar{x}_n)) = \frac{1}{n+m}\,(n+m)\cdot\bar{x}_n = \bar{x}_n$$

Korollar: **Vor.:**

In einem Datensatz mit dem Mittelwert $\bar{x}_n$ werden neue Daten der Form $x_1{}', x_2{}', \ldots, x_m{}'$ hinzugefügt.

Dabei gelte: $\bar{x}_m{}' := \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{k} x_k{}' = \bar{x}_n$. (Spezialfall: $x_k{}' = \bar{x}_n$)

Beh.:

Dann bleibt der gesamte Mittelwert unverändert:

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n+m}$$

1.4 Vergrösserung der StD bei Erweiterung eines Datensatzes

Man kann einen Datensatz auch so erweitern, dass gilt: $StD_n < StD_{n+m}$. Wir konstruieren dazu ein Beispiel. Dabei wählen wir nochmals den oben behandelten Fall mit $\bar{x}_n = \bar{x}_{n+m} := \bar{x}$.

Abkürzungen: Seien $QDS_n := \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, $QDS'_m := \sum_{i=1}^{m}(x_k{}'-\bar{x})^2$,
$QDS_{n+m} := \sum_{i=1}^{n+m}(x_i-\bar{x})^2 := QDS_n + QDS'_m$ $\qquad$ ($QDS :=$ „Quadratdifferenzsumme„).

Wir verlangen:

$$StD_n^2 = \frac{1}{n-1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}_{=QDS_n} \leq StD_{n+m}^2 = \frac{1}{n+m-1} \underbrace{\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}_{=QDS_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} ({x_k}' - \bar{x})^2}_{=QDS_m{}'} \right)}_{QDS_{n+m}} = StD_{n+m}^2$$

Daraus müsste folgen:

$$(n+m-1)\, QDS_n = (n-1)\, QDS_n + m\, QDS_n \leq (n-1)(QDS_n + QDS_m{}') = (n-1)\, QDS_n + (n-1)\, QDS_m{}'$$

Resultat: $\Rightarrow \underbrace{m \cdot QDS_n \leq (n-1) \cdot QDS_m{}'}_{\text{gegeben}} \qquad \Rightarrow \frac{m}{n-1} \cdot QDS_n \leq QDS_m{}' = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} ({x_k}' - \bar{x})^2}_{{x_k}' \text{ wählbar}}$

Wenn wir die ${x_k}'$ hier so wählen, dass $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{k} {x_k}' = \bar{x}_n$ gilt, wo können wir obige Ungleichung erfüllen. Es ist keine wesentliche Einschränkung, wenn wir z.B. ${x_k}' = {x_{2\,j}}' = \bar{x}_n + z_j,\; {x_k}' = {x_{2\,j+1}}' = \bar{x}_n - z_j$ wählen und ein allfälliges letztes ${x_k}' = {x_m}' = {x_{2\,j+1}}' = \bar{x}_n$, also hier das entsprechende ${z_j}' = {z_m}' = 0$ setzen.

Dann gilt: $\sum\limits_{i=1}^{m} ({x_k}' - \bar{x})^2 = 2 \sum\limits_{i=1}^{[\frac{m}{2}]} z_j^2$. (Hier ist $[\frac{m}{2}]$ der Gauss–Klammer–Ausdruck, siehe Analysis I.)

Da wir nun die z_j beliebig gross wählen können, kann $QDS_m{}'$ und damit auch QDS_{n+m} einen beliebigen positiven Wert annehmen. Daher kann man bei fixen n und m sowie QDS_n, also bei fixem StD_n^2 wegen

$$StD_n^2 \leq \frac{1}{n+m-1}\, QDS_{n+m} = StD_{n+m}^2,$$

durch die Wahl der z_j den Ausdruck StD_{n+m}^2 so vergrössern, wie man will.

Satz: Man kann einen gegebenen Datensatz immer auch so erweitern, dass die Standardabweichung grösser wird.

Weiter oben haben wir schon festgestellt: Wählt man die $z_j = 0$, so wird StD_{n+m}^2 kleiner als StD_n^2. Da nun StD_{n+m}^2 stetig von den z_j abhängt, kann man letztere auch so wählen, dass $StD_n^2 = StD_{n+m}^2$ gilt. Kleiner als $\frac{n-1}{n+m-1}\, StD_n^2$ kann man die Standardabweichung jedoch durch eine Erweiterung des Datensatzes nicht drücken, da bei einer Erweiterung zu QDS_n keine negativen Werte werden entstehen können (Quadratsumme). Daraus folgt:

Korollar: Bei einer Erweiterung eines Datensatzes kann StD_{n+m}^2 alle Werte grösser gleich $\frac{n-1}{n+m-1}\, StD_n^2$ annehmen.

Bemerkung: Analoge Betrachtungen kann man für eine Verkleinerung eines Datensatzes anstellen. Dies sei dem Leser überlassen.

1.5 Umrechnung des Mittelwerts und der empirischen StD

1.5.1 Eine Formel für den Mittelwert

A. Bei Veränderung von Datenwerten

Problem: Gegeben sei ein Datensatz $DS_n := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_j$ sollen nun in $x_1{}', x_2{}', \ldots, x_j{}'$ geändert werden. Was passiert dann mit dem Mittelwert $\bar{x}_n$?

Man berechnet den neuen Mittelwert $\bar{x}_n{}'$, indem man im alten Mittelwert die zu ersetzenden Daten subtrahiert und anschliessend die neuen, korrigierten Daten addiert:

Formel:
$$\bar{x}_n{}' = \frac{1}{n}\left(n \cdot \bar{x} - \sum_{i=1}^{j} x_i + \sum_{i=1}^{j} x_i{}'\right)$$

B. Bei Hinzunahme von weiteren Datenwerten

Problem: Gegeben sei ein Datensatz $DS_n := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Neu hinzukommen sollen nun die Werte $x_1{}', x_2{}', \ldots, x_m{}'$. Das ergibt den neuen Datensatz $DS_{n+m} := \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1{}', x_2{}', \ldots, x_m{}'\}$. Was passiert mit dem Mittelwert $\bar{x}_n$? D. h. wie berechnet sich der neue Mittelwert $\bar{x}'_{n+m}$?

Man berechnet den neuen Mittelwert $\bar{x}'_{n+m}$, indem man im alten Mittelwert die neuen, korrigierten Daten addiert und die Dimension anpasst:

Formel:
$$\bar{x}'_{n+m} = \frac{1}{n+m}\left(n \cdot \bar{x} + \sum_{i=1}^{m} x_i{}'\right)$$

1.5.2 Eine Formel für die empirische Varianz

Es gilt: $var = \hat{\sigma}^2 = StD_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. Dabei ist

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\,x_i\,\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\,\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - 2 \cdot \bar{x} \cdot n \cdot \bar{x} + n \cdot \bar{x}^2$$

$$\rightsquigarrow \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \qquad \Rightarrow \; var = \hat{\sigma}^2 = StD_n^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \frac{n}{n-1}\,\bar{x}^2$$

Satz:
$$var = \hat{\sigma}^2 = StD_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \frac{n}{n-1}\,\bar{x}^2$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ist hier die quadrierte Länge des Datenvektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = |\vec{x}|^2$, wie man aus dem Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst sieht.

Korollar:
$$var = \hat{\sigma}^2 = StD_n^2 = \frac{1}{n-1}\,|\vec{x}|^2 - \frac{n}{n-1}\,\bar{x}^2$$

Bemerkung: Wird ein Datensatz erweitert, so wird der Vektor $\vec{x}$ länger. Ebenfalls wird seine Dimension n grösser. Damit wird $\dfrac{1}{n-1}$ kleiner und $|\vec{x}|^2$ grösser. $\dfrac{n}{n-1}\,\bar{x}^2$ muss dabei nicht sehr ändern. Ob das zu einer Verkleinerung oder zu einer Vergrösserung von $var = \hat{\sigma}^2 = StD_n^2$ führt, hängt sehr von den einzelnen Werten $x_k\,'$ ab. Eine allgemeine und markante Aussage in eine gewisse Richtung kann hier damit nicht abgelesen werden.

1.5.3 Anwendung: Berechnung einer veränderten StD

Aus der letzten Formel lässt sich eine Möglichkeit der Berechnung einer veränderten StD eines veränderten Datensatzes gewinnen:

Sei $QS_n := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ (**Quadratsumme**). $\rightsquigarrow$ $QS_n := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = (n-1)\,StD_n^2 + n\,\bar{x}^2$.

Satz:
$$QS_n := \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (n-1)\,StD_n^2 + n\,\bar{x}^2$$

Anwendungsmethoden:

Wir stützen uns auf die Formel $StD_n = \left(\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \dfrac{n}{n-1}\,\bar{x}_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{n-1}\,QS_n - \dfrac{n}{n-1}\,\bar{x}_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Diese Formel gewinnen wir durch Wurzelziehen im Satz auf Seite 6. In dieser Formel müssen wir jetzt die QS_n sowie den Mittelwert $\bar{x}_n$ anpassen.

A. Bei Veränderung von Datenwerten

Ändern wir im Datensatz $DS_n := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_j$ in $x_1\,', x_2\,', \ldots, x_j\,'$, so begegnen uns folgende Veränderungen:

1. Änderung der QS_n: Die Quadratsumme ändert sich in $QS_n\,' = QS_n - \sum\limits_{i=1}^{j} x_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{j} (x_i\,')^2$.
2. Änderung von $\bar{x}_n$: Der Mittelwert ändert sich in $\bar{x}_n\,' = \dfrac{1}{n}\left(n \cdot \bar{x} - \sum\limits_{i=1}^{j} x_i + \sum\limits_{i=1}^{j} x_i\,'\right)$
3. Damit wird die veränderte Standardabweichung wie folgt:

Formel:
$$StD_n\,' = \left(\frac{1}{n-1}\,QS_n\,' - \frac{n}{n-1}\,(\bar{x}_n\,')^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

B. Bei Hinzunahme von weiteren Datenwerten

Nehmen wir im Datensatz $DS_n := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ die Werte $x_1\,', x_2\,', \ldots, x_m\,'$ neu hinzu, so begegnen uns folgende Veränderungen:

1. Änderung der QS_n: Die Quadratsumme ändert sich in $QS_{n+m} = QS_n + \sum\limits_{k=1}^{m} (x_k\,')^2$.

2. Änderung von $\bar{x}_n$: Der Mittelwert ändert sich in $$\bar{x}_{n+m} = \frac{1}{n+m}\left(n \cdot \bar{x} + \sum_{k=1}^{m} {x_k}'\right)$$

3. Damit wird die veränderte Standardabweichung wie folgt:

Formel: $$StD_{n+m} = \left(\frac{1}{n+m-1}\,QS_{n+m} - \frac{n+m}{n+m-1}\,(\bar{x}_{n+m})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.6 Beispiel

Gegeben ist von einem Datensatz mit $n = 4984$ Messungen der gerundete Mittelwert $\bar{x}_n = 652$ und die gerundete Standardabweichung $StD = 184$. Weiter ist bekannt, dass die Messungen in Klassen eingeteilt worden waren. Es handelt sich also hier approximativ um Mittelwert und Standardabweichung von mittleren Klassenwerten.
Nun ist bekannt geworden, dass eine Messvorrichtung, mit der $j = 196$ Werte gemessen worden sind, die Klassenwerte 650 statt richtig 670 geliefert hat. Ebenfalls sind bei dieser Messvorrichtung 212 Werte der Klassengrösse 750 als unsinnig abgetan und unterdrückt worden. n ist also zu klein eingerechnet. Berechne den korrigierten Mittelwert und die korrigierte Standardabweichung in 2 Stufen.

Bemerkung zur Lösung: Diese soll mit einem Rechner ausgeführt werden. Eine Musterlösung wird bei Gelegenheit unter dem folgenden Link bereitgestellt:

Link: http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/UEMAlg16_zus.pdf

1.7 Übung

Überlege dir, ob über Parameter wie die Schiefe u.s.w. ebenfalls entsprechende Aussagen möglich sind.

Kapitel 2

Anhang: Spezielle Wahrscheinlichkeitssituationen

2.1 Kreuztabellen, Beispiel

Viele Probleme lassen sich übersichtlich begreifen, indem man **Kreuztabellen** oder **Kontingenztafeln** verwendet. Damit gewinnt man eine Darstellungsart, welche die Übersichtlichkeit erhöht. Wir wollen die Sache an einem Beispiel studieren:

Problem: Ein Edelmetall verarbeitendes Unternehmen besitzt 90 gewöhnliche und 10 gepanzerte Lieferwagen, letztere für den Transport von Ware mit sehr hohem Wert. Die beiden Wagentypen kann man von aussen kaum voneinander unterscheiden. Im Mittel machen alle Wagen etwa gleich lange Tagesrouten. Die Firma beschäftigt gleichviele Fahrer und Fahrerinnen, zusammen soviele wie die Lieferwagen, wobei die Fahrer aus Sicherheitsüberlegungen vier mal soviel für Sicherheitstransporte in gepanzerten Fahrzeugen eingesetzt werden wie die Fahrerinnen. Die Beschäftigten wissen auf ihren Transporten nicht, was der Inhalt der transportierten verschlossenen Metallkisten ist. Nun studiert man in der Firma mitten im Frieden einen möglichen ersten Überfall. Infolge der Struktur der Belegschaft darf angenommen werden, dass niemand von der eigenen Firma am Überfall beteiltigt sein kann. Alle Wagen sind im Einsatz.

1. Erstelle eine Kreuztabelle (Kontingenztafel) für die Situation an diesem Tag, an dem alle Wagen und Fahrer resp. Fahrerinnen im Einsatz sind.
2. Was ist die Chance, dass es im Falle eines ersten Überfalles an einem solchen Tag einen Sicherheitstransport trifft?
3. Was ist die Chance, dass im Falle eines ersten Überfalles ein Sicherheitstransport mit einer Frau am Steuer überfallen wird?
4. Was ist die Chance, dass im Falle eines ersten Überfalles ein Sicherheitstransport überfallen wird unter der Voraussetzung (resp. der Bedingung), dass eine Frau am Steuer sitzt? (Dies somit unter der Annahme, dass die Übeltäter gezielt Transporte mit Frauen auswählen.)

Lösung:

1. **Kontingenztafel oder Kreuztabelle:**

   Wir benutztn nun eine rechteckige Tabelle mit den Zeileneingängen „Männer“ und „Frauen“ und den Spalteneingängen „gepanzert“ und „ungepanzert“. Dazu kommen die Totale.
   Zuerst tragen wir dann jeweils die 50, die 100, die 90 und die 10 in die Tafel ein. Anschliessend

ermitteln wir die mittlere Anzahl Männer und Frauen in den gepanzerten Wagen. Da die Männer dort vier mal mehr eingesetzt werden, kommmen auf eine Frau vier Männer. Total muss das 10 Personen ergeben. Somit erhalten wir 2 Frauen und $4 \cdot 2 = 8$ Männer, denn $2 + 8 = 10$. Die Zahlen sind hier so, dass es immer ganze Werte gibt, dass man sich also nicht über Bruchanteile von Personen wundern muss. Anschliessend können wir den Rest der Tabelle durch Ermittlung der fehlenden Differenzen ausfüllen.
Die damit erhaltene Tabelle heisst **Kontingenztafel oder Kreuztabelle**.

Fahrer	Wagen ungepanzert	Wagen gepanzert	Total Zeile
Männer: 50	$50 - 8 = 42$	$4 \cdot 2 = 8$	50
Frauen: 50	$50 - 2 = 48$	$1 \cdot 2 = 2$	50
Total Spalte: 100	90	10	100

Wenn wir eine Spalte summieren, so schreiben wir die Summe in die letzte Zelle der Spalte unten. Wenn wir eine Zeile summieren, so schreiben wir die Summe in die letzte Zelle der Zeile rechts. Wir haben in unserem Falle 2 mal 2 nicht summierte Zellen.

Aus dieser Tafel kann man jetzt Wahrscheinlichkeiten nach der Wahrscheinlichkeitsdefinition im Sinne von Laplace ablesen: $P = \dfrac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$.

2. Chance, dass im Falle dieses ersten Überfalles an einem solchen Tag ein Sicherheitstransport überfallen wird: Es hat 10 Sicherheitstransporte (günstige Fälle), aus denen einer gewählt wird. Dazu hat es total 100 Transporte (mögliche Fälle).

$$P = \frac{10}{100} = 0.1$$

3. Chance, dass im Falle eines ersten Überfalles ein Sicherheitstransport mit einer Frau am Steuer überfallen wird: Es hat 2 Sicherheitstransporte (günstige Fälle), aus denen einer gewählt wird. Total hat es dazu 100 Transporte (mögliche Fälle).

$$P = \frac{2}{100} = 0.02$$

4. Was ist die Chance, dass im Falle eines ersten Überfalles ein Sicherheitstransport überfallen wird unter der Voraussetzung (resp. der Bedingung), dass eine Frau am Steuer sitzt? Es hat 2 Sicherheitstransporte (günstige Fälle), aus denen einer gewählt wird und total 50 Transporte, bei denen eine Frau am Steuer sitzt (mögliche Fälle).

$$P = \frac{2}{50} = 0.04$$

2.2 Ein Beispiel mit einem Taxi, das Fragen aufwirft

Nachstehend ist ein Problem wiedergegeben, das von einem Kollegen in einem nicht genannten Buch entdeckt worden ist. Die vermutlich vom Autor angegebene Lösung hat dazu veranlasst, *über das Wesen von Wahrscheinlichkeit nachzudenken*. In diesem Problem wurde nach einer Wahrscheinlichkeit gefragt. Zuvor muss klar sein, in welchen Fällen man von Wahrscheinlichkeit reden kann. Dadurch sind Fragen aufgeworfen worden, die unten kurz angedeutet werden sollen. Hier folgt der Text der Aufgabe aus dem Buch, der angeblich von zwei Wirtschaftswissenschaftlern formuliert worden sein soll:

Problem:

„Ein Taxi streift in einer Winternacht ein anderes Auto. Es gibt in der Stadt zwei Taxigesellschaften: eine mit blauen Wagen, die andere mit grünen. Die mit grünen Wagen beherrscht 85 % des Marktes. Eine Zeugin sagt aus, das Unfalltaxi sei blau gewesen. Unabhängige Tests ergeben, dass sie in 80 % der Fälle eine richtige Aussage macht. Welche Farbe hatte das Taxi wirklich? Fast jeder wird glauben, dass es blau war, weil er sich auf die hohe Glaubwürdigkeit der Zeugin stützt. Die entscheidende Frage ist aber, wie weit ihre Glaubwürdigkeit die Tatsache beeinflusst, dass ein zufällig ausgewähltes Taxi mit 85–prozentiger Wahrscheinlichkeit grün ist. Kombiniert man die beiden Wahrscheinlichkeiten, ist die Chance, dass das fragliche Taxi *grün war*, 59 %. Die Wahrscheinlichkeit für grün ist also grösser als die für blau. Zu diesem Schluss können wir nie intuitiv kommen, dazu müssen wir *rechnen*.“

Eine andere Person hat dann sofort unter Verwendung einer Kreuztabelle eine Lösung präsentiert nach dem Muster des letzten Abschnitts. Denn ohne Kreuztabelle ist es schwieriger, sich der Sache zu nähern. Verglichen mit dem Beispiel im letzten Abschnitt handelt es sich um den dort erwähnten Fall: “Was ist die Chance, dass im Falle eines ersten Überfalles ein Sicherheitstransport überfallen wird unter der Voraussetzung (resp. der Bedingung), dass eine Frau am Steuer sitzt? (Dies unter der Annahme, dass die Übeltäter gezielt Transporte mit Frauen auswählen.)“

Nachfolgend ist die Kreuztabelle wiedergegeben. Die Konstruktion lässt sich einfach nachvollziehen. Dabei wird formal wie folgt gerechnet:
Zuerst nehmen wir an, wir hätten statt 100 % Marktanteil jetzt 100 Taxis. Damit können wir einfacher argumentieren. Dann gäbe es 85 grüne und 15 blaue Taxis. Dagegen ist nichts einzuwenden.
Weiter argumentieren wir: Die Zeugin, so heisst es, sagt mit einer Wahrscheinlichkeit $P = 0.8$ jeweils das Richtige. Wenn sie daher sagt „das Taxi sei blau gewesen“, ergibt das im Falle der 15 blauen Taxis $15 \cdot P = 15 \cdot 0.8 = 12$. Das tragen wir ein. Da es hier nur 15 blaue Taxis gibt, muss die Zeugin daher in $15 - 12 = 3$ Fällen „grün“ sagen. Das tragen wir auch ein. Dass sie etwa gar keine Aussage macht, das schliessen wir einfach aus — ohne Grund natürlich.
Ebenso würden wir im Falle, dass die Zeugin behauptete, das Taxi sei grün gewesen, dies mit der Wahrscheinlichkeit $P = 0.8$ akzeptieren. Da es hier 85 grüne Taxis gibt, ergäbe das dann $85 \cdot P = 85 \cdot 0.8 = 68$. Auch das wird jetzt eingetragen. Die Differenz, d.h. der Fall dass die Zeugin blau sagt, das Taxi aber grün ist, ergibt sich zu $85 - 68 = 17 = 85 \cdot (1 - 0.8) = 85 \cdot 0.2 = 17$. Damit können wir die Tabelle fertig stellen und rechts noch die Zeilensummen 71 und 29 eintragen.

	Taxi ist grün	Taxi ist blau	Total
Zeugin sagt grün	68	3	71
Zeugin sagt blau	17	12	29
Total	85	15	100

Jetzt kann man die Wahrscheinlichkeit, dass „das Taxi grün ist im Falle dass die Zeugin sagt, es sei blau gewesen“, ablesen. Man erhält:

$$P = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl günstige Fälle}} = \frac{17}{29} = 0.59 \mathrel{\hat{=}} 59\,\%$$

Man könnte aber auch wie folgt argumentieren: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeugin „blau“ sagt, ist $0.15 \cdot 0.8 + 0.85 \cdot 0.2 = 0.12 + 0.17 = 0.29$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeugin bei einem grünen Taxi „blau“ sagt, ist $0.85 \cdot 0.2 = 0.17$. Hier ist gemeint, dass das Taxi, ausgewählt aus allen Taxis, ein grünes ist und das die Zeugin aus ihren möglichen Aussagen diejenige betreffend blau abgibt, womit $P(\text{blau} = 0.8)$ zu verwenden ist, da eine Aussage mit dieser Chance als richtig genommen wird. D.h. man lässt dazu noch die Wahrscheinlichkeiten 0.8 für Treffer sowie diejenige für Irrtümer mit $1 - 0.8 = 0.2$ gelten, dies bezüglich allen Taxis (was bestritten werden könnte, wie weiter unten gezeigt wird). Durch die Konjunktion „und“ hat man die Produktwahrscheinlichkeit für die Schnittmenge „$\{\text{Aussage der Zeugin falsch}\} \cap \{\text{Taxi ist wirklich grün}\}$“ gegeben, also $0.2 \cdot 0.85 = 0.17$. Als Wahrscheinlichkeit verwendet man hier jeweils die relative Häufigkeit.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Taxi grün ist und die Zeugin jedenfalls „blau“ sagt, ist $P(\text{Taxi grün eingeschränkt auf Fälle mit „Zeugin sagt blau“}) = \dfrac{P(\text{Taxi grün})}{P(\text{Zeugin sagt „blau“})} = \dfrac{0.17}{0.29} = 0.59.$ Hier hat man somit die Wahrscheinlichkeit bei Einschränkung der Grundmenge auf die Teilmenge mit Zeugenaussagen „blau“ in einer Gesamtmenge, welche weiter nicht mehr interessiert: $P(\text{Taxi grün eingeschränkt auf Fälle mit „Zeugin sagt blau“})$. Man begegnet hier auch dem Problem, dass jene, welche nicht täglich mit dem „Fachchinesich der Datenanalyse“ und seinen definierten Bezügen konfrontiert sind, den Text nicht selbstverständlich so verstehen können, wie es die Autoren vielleicht beabsichtigen. Das Problem dieser oft vorliegenden effektiven, manchmal von den Betroffenen gar nicht wahrgenommenen Unverständlichkeit, hat man in allen Fachrichtungen. Es ist eines der wahren Übel unserer Zeit. Denn es gibt im Hause der Fachgebiete inzwischen mehr solche als nur jene, in die ein Mensch in Anbetracht seiner beschränkten Zeit heute Einblick gewinnen kann.

Gegen die formale Herleitung dieses Resultats 0.59 ist nichts einzuwenden. Jedoch gibt die intentionale Ebene zu diskutieren: Es stellt sich das Problem der *Realitätstreue*, wenn man die konkrete Situation dieses Falles überdenkt.

Im Text steht: „Ein Taxi streift in einer *Winternacht* ein anderes Auto.“ Es muss daher dunkel gewesen sein. In der Dunkelheit kann ein erwachsener Mensch aber nur schwer grün von blau unterscheiden. Jeder kennt doch den Ausspruch: „In der Nacht sind alle Katzen grau.“ Also auch orange–rote, braungelbe oder gar weisse Katzen erscheinen grau, sofern sie nicht etwa durch genetische Veränderungen reflektierende Pigmente eingebaut haben...
Weiter liest man da: „Unabhängige Tests ergeben, dass sie in 80 % der Fälle eine richtige Aussage macht.“ Hat man daher mit der Zeugin wohl Reihenuntersuchungen gemacht? Dafür hätte man viel Zeit gebraucht und sie daher reich entlöhnen müssen, was angesichts des Schadens bei einer Streifkollision wohl kaum denkbar ist. Oder hat man etwa Nachbarn über ihren Leumund befragt und daraus $p = 0.8$ errechnet? Dann wäre dieses 0.8 wohl soviel wert wie das Resultat einer Volksabstimmung unter Laien über die Existenz einer als Arbeitshyothese angenommenen unbekannten Lösung einer mathematischen Gleichung. In diesem Fall darf man schon die Unsinnsvermutung aufstellen!
Konkret ist hier zu fragen: Wie kann man der Richtigkeit einer Zeugenaussage eine Wahrscheinlichkeit beimessen? Man müsste dabei drei Fälle unterscheiden:

1. Die Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die Farb–Wahrnehmungsfähigkeit der Zeugin bei Dunkelheit.
2. Die Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die Aufrichtigkeit und die Wahrheitstreue der Zeugin bei der Abgabe einer Aussage im konkreten Fall.
3. Man hat eine Situation, in die beide vorgenannten Fälle gemischt eingehen.

Der Text sagt nichts zu den drei Fällen. Einfach den ersten obigen Fall zu postulieren wäre praktizierte Naivität, die das errechnete Resutat sehr fraglich erscheinen lässt. Man hätte die Zeit besser investieren können, als derart kopflos zu rechen. Und ob die Verlässlichkeit des Farbsehens der Zeugin bei Dunkelheit anlässlich nachträglicher Tests ermittelt werden kann, ist ebeso fraglich. Es könnte ja sein, dass die

Zeugin abends damals etwas getrunken hätte, dies nur beiläufig, ohne es richtig zu werten, sich so nicht eines nachgelassenen Sehvermögens bewusst war, dass sie später aber dann anlässlich der Tests nüchtern war. Und so weiter.
Noch schlimmer ist es bei der Aufrichtigkeit und die Wahrheitstreue. Würde die Zeugin zugeben, dass ihr Schwager im Eventualfall der Fahrer des Taxis war, er in diesem Falle also ein grünes Taxi fuhr? Wer kennt nicht die hochgradig zuverlässigen Manager und Bankdirektoren, die sich während Jahrzehnten nichts zuschulden kommen liessen, dann aber plötzlich als Verbrecher da standen: „Und die Bank war Pleite." So liesst man am 23. 1. 2008 in Zeitungen die Schlagzeilen: „Ex–Chef der Deutschen Post Klaus Zumwinkel gesteht Steuerhinterziehung in Millionenhöhe". Wohlverstanden nicht freiwillig, sondern nachdem sich der deutsche Geheimdienst Daten und Informationen über Konten bei lichtensteinischen Finanzunternehmen auf dem Schwarzmakt zusammengekauft hatte... Zudem kann ein Mensch über Jahre konstant ein Verhalten zeigen, sich dann aber plötzlich aus freien Stücken zu einem anderen, mit dem vorhergehenden Verhalten nicht mehr zu vereinbaren neuen Verhalten mutieren: „Vertrauen ist gut, Kontrolle ist besser".
Wenn man statistische Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten akzeptieren will, so muss man die Streubreite und die Konstanz in der Entwicklung lanfristig untersuchen und gegebenenfalls korrigierend anpassen. Eine Zahl alleine wie 0.8 hat daher keinen akzeptablen, verlässlichen Wert. Damit kann man bei der obigen Geschichte die Zeugin nur als Einzelphänomen in die Überlegung einbeziehen. Man darf ihr also keinenfalls die Rolle der Lieferantin eines zentralen Zahlenwertes zubilligen, der ein rechnerisches Resultat wesentlich beeinflusst.
Weiter weiss man nicht (wie oben erwähnt), ob aus $P(\text{Zeugin sagt Wahrheit}) = 0.8$ folgt, dass $P(\text{Zeugin sagt Unwahrheit}) = 0.2$ ist. Denn die Zeugin könnte ja auch schweigen, d.h. die Aussage verweigern. Dieser Fall bleibt in der obigen Rechnung völlig ignoriert.
Wenn man aber die Zeugin nicht beachtet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein blaues Taxi daher zu fahren kommt, gleich 0.15. Auch wenn man in einem Test mit 100 Taxis, 85 grüne und 15 blaue, herausfände, dass die Zeugin in 29 Fällen „blau" sagt und in den restlichen Fällen dann „grün", falls sie überhaupt etwas sagt, lässt noch keinen Schluss auf den Unfallabend zu. Was bei der Sache schlimm erscheint, ist der selbstauferlegte Zwang, hier zu meinen etwas rechnen zu müssen. Vermutlich hat nicht zuletzt diese Haltung dazu beigetragen, dass in den lezten Monaten des Jahres 2008 in der Weltwirtschaft eine Dollarsumme vernichtet worden ist von mindestens der Höhe eines 4-stelligen Milliardenbetrages! Das war eine gigantische Katastrophe, wie sie ähnlich seit fast 100 Jahren nicht mehr vorkam.
Ein Grund dazu liegt in der ahnungslosen, unreflektierten, primitiv gutgläubigen, aus Gier und Naivität blinden Einschätzung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Den Hintergrund finden wir in psychologischen Faktoren. Darüber handelt das nächste Kapitel. Es geht dort um die Frage „Wie alt ist der Kapitän?" Diese Frage steht unter dem Scheinwerfer der Vernunft gesehen auch im Zusammenhang mit dem Wahrscheinlichen, dem wahr Scheinenden und dem wahr Seienden.

Zusammenfassend sind daher folgende Punkte bezüglich ihrer Realitätskonformität wesentlich und daher im Falle realitätsbezogener Wahrscheinlichkeitsaussagen relevant:

1. Im gestellten Problem wird voraussetzungslos gefragt, welche Farbe das Taxi wirklich hatte: „Welche Farbe hatte das Taxi wirklich?" Bedinge Wahrscheinlichkeiten sind an Voraussetzungen gebunden. Eine Zeugenaussage ist dabei ein Eingriff in das Geschehen, ein quasi zufälliger Eingriff in die Voraussetzungen also. Hätte man andere Zeugen, würden diese vielleicht anders urteilen. Vielleicht gibt es sogar welche. Nur haben sie sich nicht gemeldet. Oder man wollte sie nicht, weil sie vielleicht nicht die Aussage machten, die man wünschte. Das wird jetzt vielleicht verschwiegen. Ganz sicher aber hängt eine berechnete Wahrscheinlichkeit von der Anzahl der Zeugen und ihrer Beschaffenheit ab.

2. Die Wahrscheinlichkeit für grün wird mit 0.59 und die für blau mit $1 - 0.59 = 0.41$ angegeben. Es handelt sich hier um bedingete Wahrscheinlichkeiten. So wird z.B. im Falle von grün die Wahrscheinlichkeit nur für jene Konstellation berechnet, die vorhanden ist in der Situation, in welcher die Zeugin „blau" sagt.

3. Man stellt angeblich in Tests fest, dass die Zeugin mit einer Wahrscheinlichkeit 0.8 richtige Antworten gibt, also in $\frac{4}{5}$ der Fälle. Für diese Feststellung muss man zuerst minimal 5 Fälle gezählt haben. Man hat also wiederholt beobachten müssen. Die Umstände dieser Beobachtung sind unbekannt. Man weiss nicht, ob es sich um eine Wahrnehmungsuntersuchung oder um eine Anfälligkeit für situationsgebundene Lügen handelt. Letzteres kann man kaum experimentell behandeln, da die Vielfallt der möglichen Situationen das Erfassbare übersteigt. Daher ist die Bonität der Zahl 0.8 als sehr klein einzuschätzen.

4. Aus $P(\text{Antwort der Zeugin richtig}) = 0.8$ folgt nicht, dass $P(\text{Antwort der Zeugin falsch}) = 0.2$ gilt. Denn die Zeugin könnte die Antwort auch verweigern oder nicht finden. Weiter gibt zu denken:

5. Um Wahrscheinlichkeitsaussagen machen zu können, muss man eine gewisse *Reliabilität oder Zuverlässigkeit* haben: Bei Wiederholung des Experimentes unter gleichen Rahmenbedingungen sollte man das gleiche Messergebnis erzielen. Ebenso müsste man bürgen können für eine gewissen *Validität*, d.h. ein gewisses argumentatives Gewicht. Und nicht zuletzt sollte man eine gewisse Objektivität haben, d.h. das Ergebnis sollte unabhängig von der Beschreibung eines Sachverhalts durch den Beobachter sein.

6. Damit ein Text objektiv verstanden werden kann, muss er objektiviert gestaltet sein. Fehlende Angaben werden vom Leser nach seinen subjektiven kulturellen Gepflogenheiten eingefüllt und damit unterschoben. Kein Leser eines Textes kann sich beim Lesen einer Wertung entziehen, welche mit seiner situationsabhängigen Einschätzung von Verhältnismässigkeit auf seinen Erfahrungsschwerpunkten basiert. So kümmert sich z.B. ein Wirtschaftswissenschaftler kaum um die Herkunft und die Zuverlässigkeiten von Wahrscheinlichkeitsaussagen, wie die Weltfinanzkrise vom Jahr 2008 beweist. Die Schreiber des behaldelten Textes sind aber, so der Text, Wirtschaftswissenschaftler. Sie kennen die Geschehnisse aus der Optik über ihrem Schreibtisch, nicht aus der massgebenden Realität.

7. Das Verhalten eines Zeugen bei einer Zeugenaussage ist keine Massenerscheinung, der eine Wahrscheinlichkeit zukommt. Für solche Fälle sind keine gültigen oder verlässlichen Verteilungsfunktionen bekannt. Denn man wundert sich ja immer wieder, wie Personen in den höchsten staatlichen Positionen, denen am meisten Vertrauen zukommen sollte, plötzlich nochmals unverhofft öffentlich als Lügner entlarvt und gebrandmarkt werden. So lesen wir z.B. am 22. Jauar 2008 auf Swissinfo.ch:

> *„Schweizer Regierung kuschte vor den USA“*
> *Der Bundesrat habe nicht souverän, jedoch feige und unter grober Missachtung der Rechtsstaatlichkeit gehandelt. — So kommentiert die Schweizer Presse den Bericht zur Aktenvernichtung im Fall der mutmasslichen Atomschmuggler Familie Tinner.*
> *Der Bundesrat habe im Fall Tinner auf der ganzen Linie versagt, kommentiert die Basler Zeitung: „Er hat sich durch die Regierung der USA instrumentalisieren lassen. Er hat die Souveränität unseres Landes missachtet und durch mutwillige Sabotage eines Gerichtsverfahrens dem Ansehen des Rechtsstaates Schweiz geschadet.“*
> *Nicht nur der damals federführende Justizminister Christoph Blocher mache „eine jämmerliche Figur“, so die Basler Zeitung, der Bundesrat in Corpore habe sich „in dieser üblen Affäre fast wie das Regime einer Bananenrepublik“ benommen.*
> *Die Süddeutsche Zeitung stellt fest, der Bericht der parlamentarischen Aufsicht zur Aktenvernichtung lasse die Schweiz „als eine Art Bananenrepublik am Gängelband der USA“ erscheinen.*
> *Weiter aus der Presse: Vorher sei in öffentlichen Auftritten bezüglich dieses Themas im vollen Wissen um die Tatsachen immer alles abgestritten, beschönigt oder übergangen worden. Nicht nur das Volk (der Souverän also), auch das Parlament sei an der Nase herum und hinters Licht geführt worden. . .*

Nun weiter zu den psychologischen Faktoren:

2.3 „Wie alt ist der Kapitän?“

Problem:

In einem dem Autor zugängig gemachten Text der Didaktik-Dozentin S. Müller von der Uni Münster stehen folgende Zeilen zu lesen:

Im Jahr 1989 erregte das Buch „Wie alt ist der Kapitän?“ von Stella Baruk großes Aufsehen. 76 von 97 befragten Zweit– und Drittklässlern (Anmerkung: Bei uns Primarschule) *hatten die Aufgabe: „Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?“ „gelöst“, üblicherweise mit „36 Jahren“. Eine Ausweitung der (französischen) Untersuchung auf mehr Aufgaben und mehr Schüler auch anderer Jahrgangsstufen bestätigte das erschütternde Ergebnis.*

Ebenso erwähnte Prof. Dr. G. Steiner, Ordinarius für Psychologie an der Uni Basel und vormals angeblich Mathematiklehrer, ähnliche Ergebnisse in einem vom Autor besuchten Didaktik–Weiterbildungskurs für Hochschul–Dozenten, wobei bei Prof. Steiner die Aufgabe etwas komplizierter gelautet hat. Frei nachempfunden etwa so: „Auf einem Schiff befinden sich der Kapitän, 12 Matrosen, 80 Pferde und 6 Hühner. Wie alt ist der Kapitän.“.

Es soll nun im Sinne der Mitteilung von Prof. Steiner versucht werden, in der Art der Schüler beim Experiment die Aufgabe zu lösen. Im Text genannt sind die Anzahlen 12, 80, 4 und dazu 1 für den Kapitän. Etwaiges Vorgehen eines durchschnittlichen Schülers:

1. Ein Schüler versucht zu rechnen: $12 + 80 + 4 + 1 = 97$. Diese Zahl ist zu gross. So alt kann er nicht sein, also muss man anders rechnen.
2. $12 \cdot 80 \cdot 4 \cdot 1 = 3'840$. Diese Zahl ist unmöglich. So alt kann er nicht sein, also muss man anders rechnen.
3. $80 - 12 - 4 - 1 = 63$. Das ist zwar alt, aber nicht umöglich. Das ginge also. Aber vielleicht ist es falsch. Somit nochmals probieren!
4. $80 - 12 \cdot 4 - 1 = 31$ — das ginge ja sehr gut! Aber noch besser wäre folgendes:
5. $80 - 12 \cdot 4 + 1 = 33$ — das ist ausgezeichnet! Das ist ja so alt wie Christus. Dann muss es stimmen. Denn der Lehrer wählt immer Aufgaben, die ein einsichtiges Ergebnis haben. Also doppelt unterstreichen und abgeben. Dann ist man des Lobes gewiss.

Prof. Steiner hat auch mitgeteilt, dass etwa ein Schüler pro Klasse gemerkt hat, dass es sich bei der Aufgabe um Unsinn handelt, und dies dann als Resultat dem Lehrer mitgeteilt hat. Etwa einer hat also jeweils gewagt, den Sachverhalt der Aufgabe logisch zu erfassen. Die andern haben gleich, wie auf einen militätischen Befehl hin, zu rechnen begonnen: „Kopf einziehen und durch!“

Es fragt sich nun, wieso durschschnittlich intelligente Schüler, welche nach ca. 10 Jahren zu ehrbaren und vernunftsbegabten Bürgern herangewachsen sind, solchen Unsinn produzieren können. Prof. Steiners Erklärung war sinngemäss die folgende:

Der Schüler ist gewohnt, dass bei einer Mathematikaufgabe mit solchen Zahlen als Resultat eine Zahl gefunden werden muss, die einerseits in der Situation als brauchbar gelten kann und die andererseits dann doppelt unterstrichen werden muss. Das Resultat ist unbrauchbar, wenn es nicht doppelt unterstrichen ist oder wenn die Zahl fehlt. Dann nämlich ist die Aufgabe nicht gemacht. So etwas abzugeben wäre gefährlich. Die Erfahrung hat das ja gelehrt. Im schlimmsten Fall könnte man dafür Schläge einstecken. Weiter wird das Resultat als falsch bewertet, wenn die Zahl undenkbar ist, wie z.B. beim Alter von $3'840$ Jahren für den Kapitän. Dafür gibt es nicht Schläge, sondern nur eine schlechte Note.

Wenn der Schüler jedoch den Lehrer kritisiert, ihm also mitteilt, diese von ihm gestellte Aufgabe sei Unsinn, so wäre das gewiss eine Beleidigung für den ehrbaren und unfehlbaren Lehrer. Der Schüler müsste mit Rausschmiss, Anzeige beim Rektor und bei den Eltern rechnen. Dann würden ihm zur Strafe vom Lehrer weiter zudem auch noch von den Eltern als Strafe die Ferien gestrichen, zusammen wohl mit einer Kürzung des Sackgelds. Das ist die allergefährlichste Variante!
Also wählt der Schüler die ungefährlichere Variante: Er macht lieber den Unsinn gleich mit.

Wir entdecken da, dass ein Strategieproblem vorliegt. Der Schüler strebt nicht nach der Wahrheit, hier also nicht nach einem vernünftigen Resultat zur gegebenen Frage. Sondern er strebt nach der Minimierung der Gefahr, dass ihm Unglück zustossen könnte. Damit entwickelt er nicht Lösungskonzepte für mathematische Aufgaben, sondern Strategiern zur Minimierung der Gefahren, die auf ihn lauern. Denn es geht ihm zur Hauptsache um das sorglose Überleben, damit also um den grössten eigenen Profit. Es geht ihm nicht um das Erkunden von Wahrheit in einem kleinen ihn betreffenden Teilbereich in Form einer Mathematikstunde unter vielen anders gearteten Stunden im Leben.

Das erklärt nun vieles. Es erklärt auch, wieso in einem Buch die von Wirtschaftswissenschaftlern erfundene und oben wiedergegebene Wahrscheinlichkeitsaufgabe gefunden werden kann. . .