

# Probleme und Aufgaben

Praktikum  
Uebungen  
Selbststudium

Empfohlen:  
Softwarepaket  
Mathematica

# Distanzschätzen

ISB, WIR90

Synergie-Demonstration (syn: griech mit; en: griech-im; ergos: griech. Werk, Tat)  
 ---> "Zusammenarbeit"

**Aufgabe: Schätzen Sie die Distanz von Zürich aus!**

	Einzel- Rangfolge	Differenz	Gruppen- Rangfolge	Differenz	Effektive Rangfolge
Manchester					
Reims					
Göteborg					
Odessa					
Perugia					
Oslo					
Linz					
Gagliari					
Regensburg					
Catania					
Toulon					
Budapest					
Glasgow					
Bremerhaven					
Cordoba					

*(Nach einer Quelle aus "Management Zentrum St. Gallen")*

# Aufgaben aus Aufnahmeprüfungen

Ingenieurschule  
Biel

(ISB)

# Tanne im Filz mit Handschuh, Margarine und Betrachter

## Kriminalkunst

Josef Beuys: "Das Kunstwerk entsteht dann im Betrachter."  
Kriminalpolizist: "Zum Fall von Herrn Blümli im Strassen-  
graben. Gibt an, beim Betrachten von moderner Kunst Opfer  
einer Kunstschändervandalenbande geworden zu sein, die  
sich den Umsturz der Leersockelkunst vorgenommen hat."



Nein, das ist kein Druckfehler!  
Das ist wirklich so gemeint!

**Kleingetrucktes: Wie auch trotzdem und ohne Passkontrolle Studibus es schaffte, in den Fachhimmel zu kommen:**  
Professor will wissen: "Wie gross ist die Chance, beim Jassen zu gewinnen und trotzdem tags darauf durch die Prüfung zu kommen?"  
Studibus: "Das ist wie beim Würfeln, Sie lehren ja Wahrscheinlichkeit! - Man hat unendlich viele Möglichkeiten."  
Professor versteht natürlich nicht.  
Studibus erklärt: "Man kann würfeln die Zahlen 1 bis 6. Dann kann ich aber auch Ecke oder Kante würfeln, Ecke meine ich, wenn der Würfel auf der Ecke stehen bleibt. Die Wahrscheinlichkeit dazu ist nicht 0. Dann kann man 6 haben, obwohl man eine 1 gewürfelt hat. Allerdings wenn ich 1 hätte, obwohl ich 6 gewürfelt habe, ja, das wäre für mich ein Rekursgrund gegen den Spielleiter. Dann kann man mit einem Würfel aber auch 6 und 1 oder 5 und 2 etc. würfeln - oder 6 und 1/2 und 1/2 oder - was, sie fragen 'wie'? - Ganz einfach natürlich: 6 und 1 würfeln sie mit einem Würfel, dann, wenn sie so stark würfeln, dass der Würfel in zwei Teile zerspringt und darauf 6 und 1 nach oben zu liegen kommen. - Ich sehe, sie verstehen."  
Professor: "Ich verstehe jetzt viel mehr als Sie denken! Aha! - Sie können mir jetzt sicher erklären, wieso auf Ihrer Abmeldung von der letzten Prüfung da 'Ubumfall' unter 'Begründung' zu lesen war. Sie können also Ecke und Kante würfeln! Zwar habe ich selbst diesen Fall noch nie beobachtet, doch ihr 'Bumfall' beweist, dass Sie ein eifriger Experimentiergenie sind und so durchaus auch als wertvolles Glied unserer Berufskette gelten können."  
**Anleitung:** Man nehme statt einem Würfel ein hartgesottenes Ei und setze es auf einer flachen horizontalen Tischplatte in starke Rotation. Was beobachtet man? Hat also Kolumbus vielleicht doch zu schnell draufgehauen?  
Und übrigens - wussten Sie schon, wie die Schildbürger es anstellten, die Schildläuse zu meiken? (Damals, als sie ihre Ställe verkauften und dann von Zinsen, die sie bezahlten - reich geworden sind? - Ideen muss man haben und schweigen, das genügt schon immer!)



## Algebra

## Serie 1

**Bedingungen:**

Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist der Taschenrechner, aber keine Formelsammlung. Lösungen ohne klaren und vollständigen Lösungsweg mit Angabe der Zwischenergebnisse werden **nicht akzeptiert**. Ungültige Teile der Arbeit sind deutlich durchzustreichen und Resultate sind doppelt zu unterstreichen.

1. Berechnen Sie *alle* Lösungen der folgenden Gleichungen, in denen  $x$  die Unbekannte ist ( $c$  ist gegeben):

$$\frac{1}{c \cdot x \cdot (c + 1)} = x + \frac{1}{c \cdot (c + 1)}$$

Das Resultat muss *so stark wie möglich vereinfacht* werden!

2. Lösen Sie die Gleichung

$$7 \sqrt[a^2-b^2]{x^{a+b}} + 2 \sqrt[6]{x^2} - 5 = 0$$

für die Werte  $a = 37$  und  $b = 34$ .

3. Jean, Peter und Aldo machen zusammen eine Erbschaft von Fr. 96'000.-. Peter ist Besitzer einer Firma. Er erhält deswegen Fr. 24'000.- weniger als Jean und Aldo zusammen. Mit seinem Teil der Erbschaft kauft Jean 3 Aktien von Peters Firma. Aldo könnte mit seinem Teil 7 solche Aktien kaufen. *Wieviel kostet* kostet eine Aktie von Peters Firma?

4. Vereinfachen Sie so weit als möglich den Ausdruck:

$$\frac{(a^4 - 3a^2b^2 - 4b^4) : (a^2 + b^2)}{2\left(\frac{5}{27} a^2 - \left(2 + \frac{6}{27}\right) ab + \frac{50}{27} ba\right) : \left(4 + \frac{4}{54}\right)}$$

$$\frac{\quad}{\left(2 + \frac{3}{4}\right) a + \frac{3}{2} a \left(5 + \frac{1}{2}\right)}$$

Fortsetzung: Rückseite

5. Eine Strecke der Länge 1 Meter wird in zwei gleiche Teile geteilt. Die Längen der beiden Teile erfüllen die folgenden Bedingungen:

$$\text{kleiner Teil} : \text{grosser Teil} = \text{grosser Teil} : \text{ganze Strecke.}$$

*Berechnen Sie die Länge des grossen der beiden Teile.*

6. Vor 9 Jahren war Vater Janarius zweimal so alt wie seine beiden Söhne Victorious und Ursus. Zu jener Zeit bemerkte Ursus, dass er genau zweimal so alt war wie Victorious.  
Heute ist Janarius genau 3 mal so alt wie sein jüngster Sohn.  
Wie alt ist Ursus, der heute gerade Geburtstag feiert?

**Conditions à observer:**

Seul outil autorisé: la calculatrice de poche. Les formulaires et autres documents de tout genre sont interdits. Des solutions obtenues sans développement clair et compréhensible et les résultats intermédiaires en rapport **ne sont pas acceptés**. Les parties non valables du travail doivent être dûment tracées en diagonale, et les résultats finaux doivent être soulignés deux fois.

---

1. Calculer toutes les solutions de l'équation suivante, où  $x$  est l'inconnue ( $c$  est donné):

$$\frac{1}{c x (c + 1)} = x + \frac{1}{c (c + 1)}$$

Le résultat doit être *simplifié autant que possible* !

2. Résoudre l'équation

$$7 \sqrt[a^2-b^2]{x^{a+b}} + 2 \sqrt[6]{x^2} - 5 = 0$$

pour les valeurs  $a = 37$  et  $b = 34$ .

3. Jean, Peter et Aldo font ensemble un héritage de Fr. 96'000.-. Peter est propriétaire d'une entreprise, et reçoit de ce fait Fr. 24'000.- de moins que Jean et Aldo réunis. Avec sa part de l'héritage, Jean achète 3 actions de l'entreprise de Peter. Aldo pourrait, avec sa part, acheter 7 de ces mêmes actions. *Combien coûte* une action de l'entreprise de Peter?

4. *Simplifier* autant que possible l'expression suivante:

$$\frac{(a^4 - 3a^2b^2 - 4b^4) : (a^2 + b^2)}{2\left(\frac{5}{27} a^2 - \left(2 + \frac{6}{27}\right) ab + \frac{50}{27} ba\right) : \left(4 + \frac{4}{54}\right)}{(2 + \frac{3}{4}) a + \frac{3}{2} a \left(5 + \frac{1}{2}\right)}$$

Suite au verso

- 
5. Une ligne de longueur 1 m doit être divisée en deux parties, de telle sorte que les longueurs des deux parties respectives satisfassent le rapport suivant:

$$\text{petite partie} : \text{grande partie} = \text{grande partie} : \text{ligne entière.}$$

*Calculer la longueur de la plus longue des deux parties.*

6. Il y a 9 ans, l'âge du père Janarius était égal à deux fois la somme des âges de ses deux fils Victorious et Ursus. A cette époque, Ursus avait remarqué que son âge était exactement égal à deux fois celui de Victorious. Aujourd'hui, l'âge de Janarius est égal à 3 fois celui de son plus jeune fils. Quel est l'âge de Ursus, qui fête aujourd'hui même son anniversaire?

## Algebra

## Serie 2

**Bedingungen:**

Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist der Taschenrechner, aber keine Formelsammlung. Lösungen ohne klaren und vollständigen Lösungsweg mit Angabe der Zwischenresultate werden **nicht akzeptiert**. Ungültige Teile der Arbeit sind deutlich durchzustreichen und Resultate sind doppelt zu unterstreichen.

1. Berechnen Sie *alle* Lösungen der folgenden Gleichungen, in denen  $y$  die Unbekannte ist ( $b$  ist gegeben):

$$y = \frac{1}{(b-1)by} - \frac{1}{(b-1)b}$$

Das Resultat muss *so stark wie möglich vereinfacht* werden!

2. Lösen Sie die Gleichung

$$4 \sqrt[a^2-b^2]{x^{a+b}} - \sqrt[12]{x^3} - 7 = 0$$

für die Werte  $a = 50$  und  $b = 46$ .

3. John, Paul und Alfred machen zusammen eine Erbschaft von Fr. 130'000.-. Paul ist Besitzer einer Firma. Er erhält deswegen Fr. 34'000.- weniger als John und Alfred zusammen. Mit seinem Teil der Erbschaft kauft John 8 Aktien von Pauls Firma. Alfred könnte mit seinem Teil 12 solche Aktien kaufen. *Wieviel kostet* kostet eine Aktie von Pauls Firma?

4. Vereinfachen Sie so weit als möglich den Ausdruck:

$$\frac{(81a^4 - 18a^2b^2 + b^4) : (9a^2 + b^2)}{3\left(-\frac{4}{5}ab + \left(1 - \frac{2}{15}\right)b^2 - \frac{3}{5}b^2\right) : \left(5 + \frac{18}{30}\right)}$$

$$\frac{\quad}{\left(7 + \frac{5}{8}\right)b - \frac{5}{2}b \left(3 - \frac{11}{4}\right)}$$

Fortsetzung: Rückseite

- 
5. Eine Strecke der Länge 10 Meter wird in zwei gleiche Teile geteilt. Die Längen der beiden Teile erfüllen die folgenden Bedingungen:

$$\text{grosser Teil} : \text{kleiner Teil} = \text{ganze Strecke} : \text{grosser Teil.}$$

*Berechnen Sie die Länge des kürzeren der beiden Teile.*

6. Vor 24 Jahren war Vater Jakob 3 mal so alt wie sein älteres Mädchen Ursula. Zu jener Zeit bemerkte Ursula, dass sie genau zweimal so alt war wie ihre junge Schwester Victoria. Heute ist Jakob gleich alt wie seine beiden Mädchen Ursula und Victoria zusammen. Wie alt ist Ursula, die heute gerade Geburtstag feiert?

**Conditions à observer:**

Seul outil autorisé: la calculatrice de poche. Les formulaires et autres documents de tout genre sont interdits. Des solutions obtenues sans développement clair et compréhensible et les résultats intermédiaires en rapport **ne sont pas acceptées**. Les parties non valables du travail doivent être dûment tracées en diagonale, et les résultats finaux doivent être soulignés deux fois.

---

1. Calculer toutes les solutions de l'équation suivante, où  $y$  est l'inconnue ( $b$  est donné):

$$y = \frac{1}{(b-1)by} - \frac{1}{(b-1)b}$$

Le résultat doit être *simplifié autant que possible* !

2. Résoudre l'équation

$$4 \sqrt[4]{\frac{a^2-b^2}{x^{a+b}}} - \sqrt[12]{\frac{12}{x^3}} - 7 = 0$$

pour les valeurs  $a = 50$  et  $b = 46$ .

3. John, Paul et Alfred font ensemble un héritage de Fr. 130'000.-. Paul est propriétaire d'une entreprise, et reçoit de ce fait Fr. 34'000.- de moins que John et Alfred réunis. Avec sa part de l'héritage, John achète 3 actions de l'entreprise de Paul. Alfred pourrait, avec sa part, acheter 7 de ces mêmes actions. *Combien coûte* une action de l'entreprise de Paul?

4. Simplifier autant que possible l'expression suivante:

$$\frac{(81a^4 - 18a^2b^2 + b^4) : (9a^2 + b^2)}{3\left(\frac{4}{5}ab + \left(1 - \frac{2}{15}\right)b^2 - \frac{3}{5}b^2\right) : \left(5 + \frac{18}{30}\right)} \\ \frac{\quad}{\left(7 + \frac{5}{8}\right)b - \frac{5}{2}b \left(3 - \frac{11}{4}\right)}$$

Suite au verso

5. Une ligne de longueur 10 m doit être divisée en deux parties, de telle sorte que les longueurs des deux parties respectives satisfassent le rapport suivant:

$$\text{grande partie} : \text{petite partie} = \text{ligne entière} : \text{grande partie}.$$

Calculer la longueur de la plus courte des deux parties.

6. Il y a 24 ans, l'âge du père Jacob était égal à 3 fois l'âge de sa fille aînée Ursula. A cette époque, Ursula avait remarqué que son age était exactement égal à deux fois celui de sa jeune soeur Victoria.  
Aujourd'hui, l'âge de Jacob est égal à la somme des âges de Ursula et Victoria.  
Quel est l'âge de Ursula, qui fête aujourd'hui même son anniversaire?



Geometrie

Serie 1

**Bedingungen:**

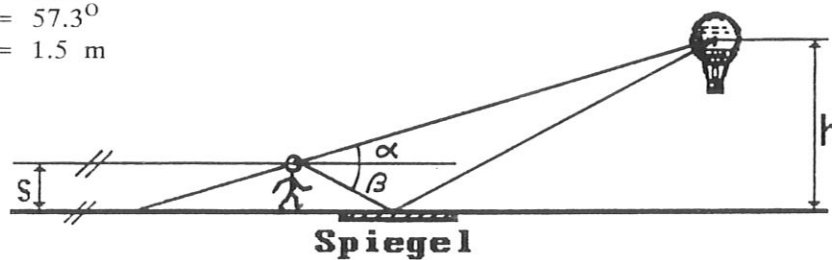
Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist der Taschenrechner, aber keine Formelsammlung. Lösungen ohne klaren und vollständigen Lösungsweg mit Angabe der Zwischenergebnisse werden **nicht akzeptiert**. Ungültige Teile der Arbeit sind deutlich durchzustreichen und Resultate sind doppelt zu unterstreichen.

1. Berechnen Sie die Höhe  $h$  des Ballons bezüglich des Bodens unter Verwendung der Angaben in der Figur:

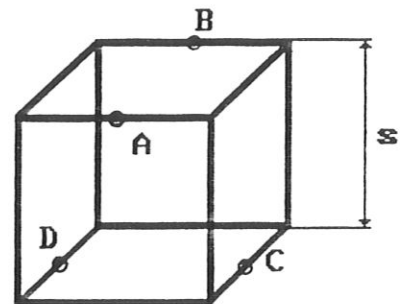
$$\alpha = 56.2^\circ$$

$$\beta = 57.3^\circ$$

$$s = 1.5 \text{ m}$$



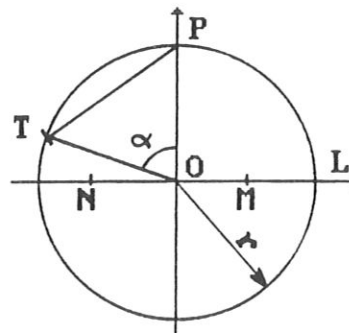
2. A, B, C und D seien die Kantenmitten des gezeichneten Würfels mit der Kantenlänge  $s$ . Durch geradliniges Verbinden der vier Punkte erhält man ein Tetraeder. Berechnen Sie den totalen Oberflächeninhalt des Tetraeders.



3. Der Kreisradius  $r$  in untenstehender Figur misst  $10 \text{ cm}$ . Zudem ist bekannt, dass M die Streckenmitte von  $OL$  ist. Es gilt:  $MN = MP$  und  $PN = PT$  für diese Streckenlängen.

Berechnen Sie:

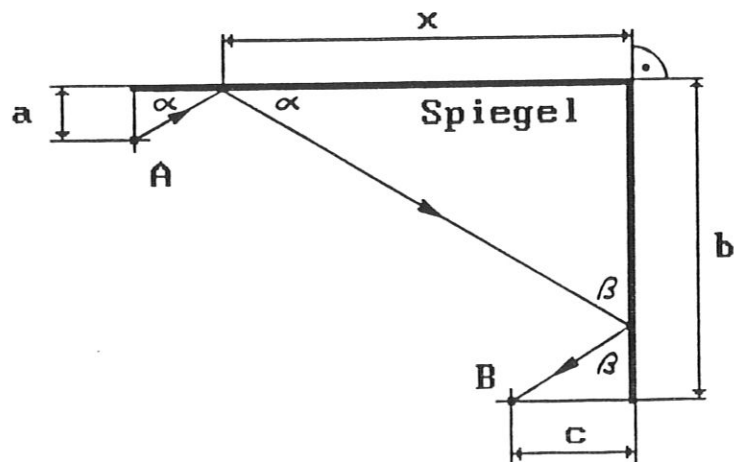
- a) die Streckenlänge  $PT$ ,  
 b) den Winkel  $\alpha$  in Grad.



Fortsetzung: Rückseite

4. Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$ .  $\overline{AB}$  misst 4.0 cm,  $\overline{BC}$  5.0 cm. Der Winkel der Ecke  $B$  beträgt  $165^\circ$ .
- Konstruieren Sie das Dreieck mit Zirkel und Lineal.
  - Konstruieren Sie nur mit Zirkel und Lineal einen Punkt  $P$ , von dem aus die Strecke  $\overline{AB}$  und ebenso die Strecke  $\overline{BC}$  je unter einem Winkel von  $30^\circ$  erscheinen.  
Es muss eine stichwortartige Konstruktionsbeschreibung dazu gemacht werden.
5. Wir betrachten ein regelmässiges 7-Eck  $E_7$ . Wir kennen die Distanz  $d = 7.0$  cm von einer Ecke von  $E_7$  zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt von  $E_7$ .
  - Berechnen Sie den Umkreisradius von  $E_7$ .
6. Ein Lichtstrahl, der vom Punkt  $A$  aus via zwei Spiegel den Punkt  $B$  trifft (vgl. Skizze), durchläuft eine gesamte Weglänge von 12.0 cm.
- Konstruieren Sie den exakten Lichtweg.
  - Berechnen Sie  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $x$ .

$$\begin{aligned} a &= 2.0 \text{ cm} \\ b &= 4.0 \text{ cm} \\ c &= 3.0 \text{ cm} \end{aligned}$$



Geométrie

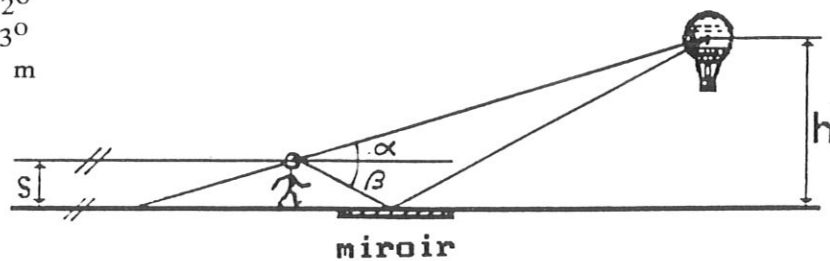
Série 1

Conditions à observer:

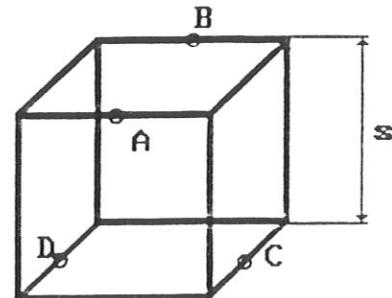
Seul outil autorisé: la calculatrice de poche. Les formulaires et autres documents de tout genre sont interdits. Des solutions obtenues sans développement clair et compréhensible et les résultats intermédiaires en rapport **ne sont pas acceptés**. Les parties non valables du travail doivent être dûment tracées en diagonale, et les résultats finaux doivent être soulignés deux fois.

1. Calculez la hauteur  $h$  de la montgolfière par rapport au sol en employant les indications de l'esquisse.

$\alpha = 56.2^\circ$   
 $\beta = 57.3^\circ$   
 $s = 1.5 \text{ m}$



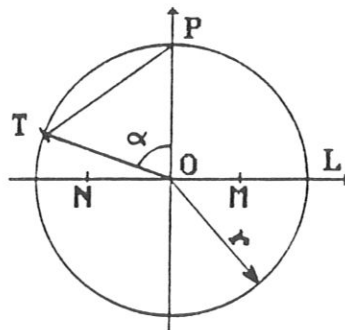
2. Soient A, B, C et D les centres des arêtes du cube dessiné. Ces arêtes sont de longueur  $s$ . En joignant les quatre points par des lignes droites, on obtient un tétraèdre. Calculez la superficie totale de ce tétraèdre.



3. Le rayon  $r$  du cercle de la figure ci-dessus mesure 10 cm. On sait que M est le centre du segment OL. De plus, on a les relations  $MN = MP$  et  $PN = PT$  pour les longueurs des segments.

Calculez:

- a) la longueur du segment  $\overline{PT}$ ,  
 b) l'angle  $\alpha$  en degrés.



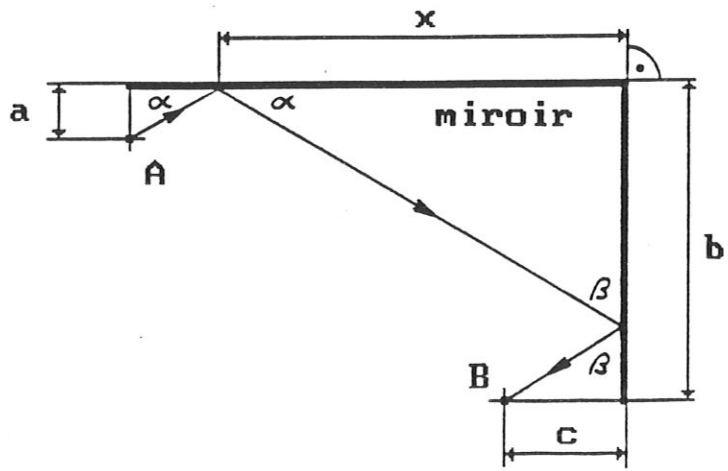
Suite au verso

4. Soit un triangle ABC.  $\overline{AB}$  mesure 4.0 cm,  $\overline{BC}$  5.0 cm. L'angle du sommet B mesure  $165^\circ$ .
- a) *Construisez le triangle à l'aide du compas et de la règle.*
  - b) *Construisez, uniquement avec la règle et le compas, un point P à partir duquel le segment  $\overline{AB}$  et le segment  $\overline{BC}$  apparaissent sous un angle de  $30^\circ$ .*
- Une description concise de la construction doit être jointe.

5. Considérons un polygone régulier à 7 côtés  $E_7$ . On connaît la distance  $d = 7.0$  cm entre un sommet de  $E_7$  et le milieu du côté opposé.
- a) *Calculez l'aire de  $E_7$ .*
  - b) *Calculez le rayon du cercle circonscrit à  $E_7$ .*

6. Un rayon de lumière qui, en partant du point A et touchant deux miroirs, atteint le point B (voir esquisse), parcourt une distance totale de 12.0 cm.
- a) *Construisez le parcours exact du rayon de lumière.*
  - b) *Calculez  $\alpha$ ,  $\beta$  et x.*

a = 2.0 cm  
 b = 4.0 cm  
 c = 3.0 cm



Geometrie

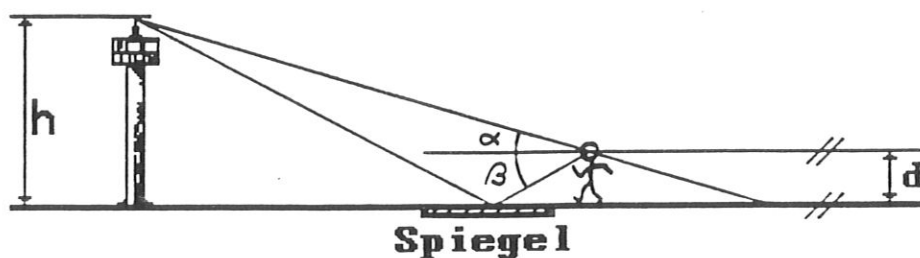
Serie 2

**Bedingungen:**

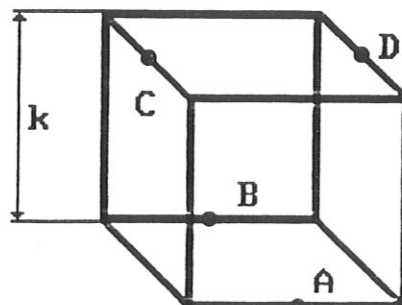
Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist der Taschenrechner, aber keine Formelsammlung. Lösungen ohne klaren und vollständigen Lösungsweg mit Angabe der Zwischenergebnisse werden **nicht akzeptiert**. Ungültige Teile der Arbeit sind deutlich durchzustreichen und Resultate sind doppelt zu unterstreichen.

1. Berechnen Sie die Höhe  $h$  des Turms bezüglich des Bodens unter Verwendung der Angaben in der Figur:

$\alpha = 54.3^\circ$   
 $\beta = 55.4^\circ$   
 $d = 1.6 \text{ m}$



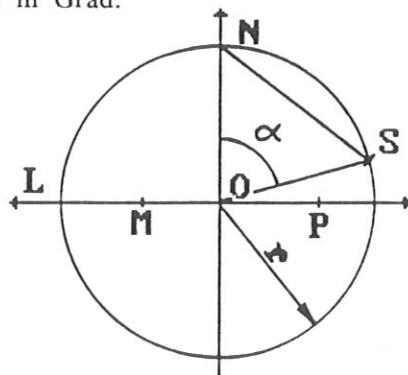
2. A, B, C und D seien die Kantenmitten des gezeichneten Würfels mit der Kantenlänge  $k$ . Durch geradliniges Verbinden der vier Punkte erhält man ein Tetraeder. Berechnen Sie den totalen Oberflächeninhalt des Tetraeders.



3. Der Kreisradius  $r$  in untenstehender Figur misst  $12 \text{ cm}$ . Zudem ist bekannt, dass M die Streckenmitte von OL ist. Es gilt:  $\overline{MP} = \overline{MN}$  und  $\overline{NP} = \overline{NS}$  für diese Streckenlängen.

Berechnen Sie:

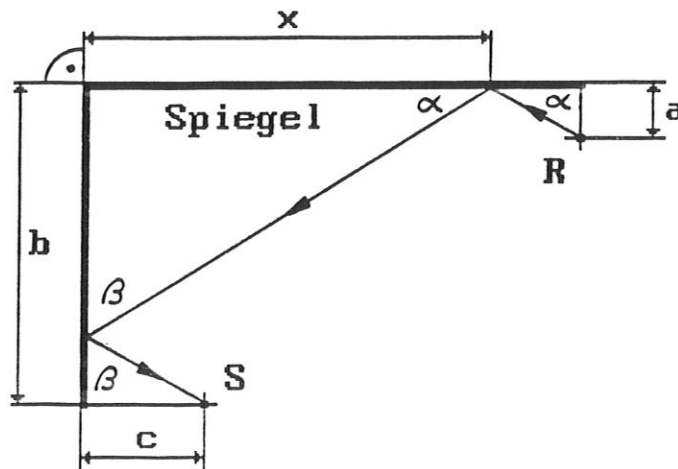
- a) die Streckenlänge  $\overline{NS}$ ,  
 b) den Winkel  $\alpha$  in Grad.



Fortsetzung: Rückseite

4. Gegeben sei ein Dreieck  $RST$ .  $\overline{RS}$  misst 4.0 cm,  $\overline{ST}$  7.0 cm. Der Winkel der Ecke  $S$  beträgt  $150^\circ$ .
- Konstruieren Sie das Dreieck mit Zirkel und Lineal.
  - Konstruieren Sie nur mit Zirkel und Lineal einen Punkt  $P$ , von dem aus die Strecke  $\overline{RS}$  und ebenso die Strecke  $\overline{ST}$  je unter einem Winkel von  $45^\circ$  erscheinen.  
Es muss eine stichwortartige Konstruktionsbeschreibung dazu gemacht werden.
5. Wir betrachten ein regelmässiges 7-Eck  $E_7$ . Wir kennen die Distanz  $s = 6.0$  cm von einer Ecke von  $E_7$  zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt von  $E_7$ .
  - Berechnen Sie den Umkreisradius von  $E_7$ .
6. Ein Lichtstrahl, der vom Punkt  $R$  aus via zwei Spiegel den Punkt  $S$  trifft (vgl. Skizze), durchläuft eine gesamte Weglänge von 15.0 cm.
- Konstruieren Sie den exakten Lichtweg.
  - Berechnen Sie  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $x$ .

$$\begin{aligned} a &= 2.0 \text{ cm} \\ b &= 5.0 \text{ cm} \\ c &= 4.0 \text{ cm} \end{aligned}$$



Géométrie

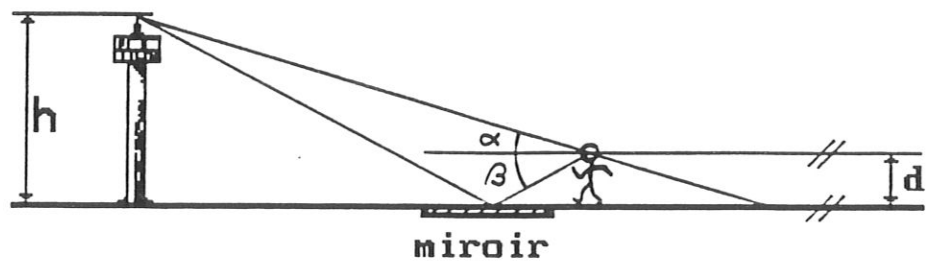
Série 2

Conditions à observer:

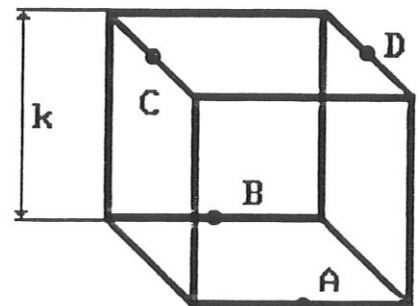
Seul outil autorisé: la calculatrice de poche. Les formulaires et autres documents de tout genre sont interdits. Des solutions obtenues sans développement clair et compréhensible et les résultats intermédiaires en rapport **ne sont pas acceptés**. Les parties non valables du travail doivent être dûment tracées en diagonale, et les résultats finaux doivent être soulignés deux fois.

1. Calculez la hauteur  $h$  de la tour par rapport au sol en employant les indications de l'esquisse.

$\alpha = 54.3^\circ$   
 $\beta = 55.4^\circ$   
 $d = 1.6 \text{ m}$



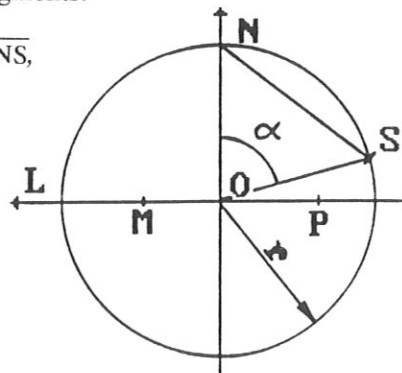
2. Soient A, B, C et D les centres des arêtes du cube dessiné. Ces arêtes sont de longueur  $k$ . En joignant les quatre points par des lignes droites, on obtient un tétraèdre. Calculez la superficie totale de ce tétraèdre.



3. Le rayon  $r$  du cercle de la figure ci-dessus mesure  $12 \text{ cm}$ . On sait que M est le centre du segment OL. De plus, on a les relations  $MP = MN$  et  $NP = NS$  pour les longueurs des segments.

Calculez:

- a) la longueur du segment  $\overline{NS}$ ,  
 b) l'angle  $\alpha$  en degrés.



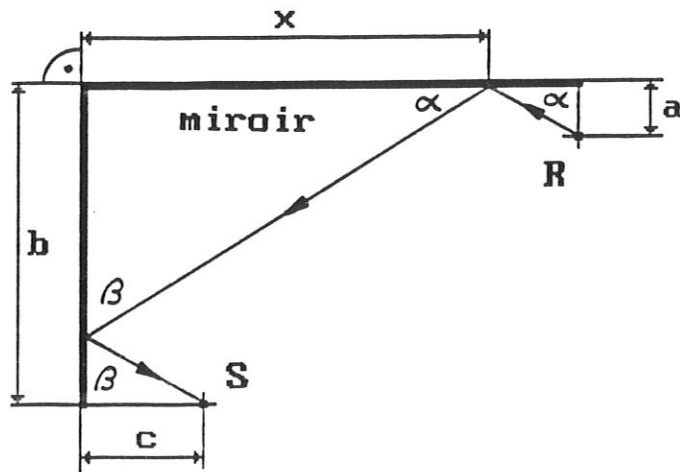
Suite au verso

4. Soit un triangle RST.  $\overline{RS}$  mesure 4.0 cm,  $\overline{ST}$  7.0 cm. L'angle du sommet S mesure  $150^\circ$ .
- a) *Construisez* le triangle à l'aide du compas et de la règle.
  - b) *Construisez*, uniquement avec la règle et le compas, un point P à partir duquel le segment RS et le segment ST apparaissent sous un angle de  $45^\circ$ .
- Une description concise de la construction doit être jointe.

5. Considérons un polygone régulier à 7 côtés  $E_7$ . On connaît la distance  $s = 6.0$  cm entre un sommet de  $E_7$  et le milieu du côté opposé.
- a) Calculez l'aire de  $E_7$ .
  - b) Calculez le rayon du cercle circonscrit à  $E_7$ .

6. Un rayon de lumière qui, en partant du point R et touchant deux miroirs, atteint le point S (voir esquisse), parcourt une distance totale de 15.0 cm.
- a) *Construisez* le parcours exact du rayon de lumière.
  - b) Calculez  $\alpha$ ,  $\beta$  et x.

a = 2.0 cm  
 b = 5.0 cm  
 c = 4.0 cm





**Die folgenden Beispiele zeigen, dass in der Mathematik nicht überall ein Taschenrechner erforderlich ist:**

1. *Beweisen* Sie, dass in jedem beliebigen Dreieck die Innenwinkelsumme  $180^\circ$  beträgt.
2. *Beweisen* Sie den "Satz von Pythagoras" möglichst elegant.
3. *Beweisen* Sie den Höhensatz.
4. *Beweisen* Sie den Kathetensatz.
5. Beschreiben Sie den Begriff "*mathematisches Modell*".
6. Begründen Sie kurz, wieso man in der Mathematik *Beweise* führt.
7. Beschreiben Sie kurz *Herkunft, Ziele, Zweck* und *Nutzen* der Mathematik.

### **Einführung in Mathematica:**

8. Probieren Sie am Schul-Computer diejenigen Mathematica-Beispiele aus "*A Tour of Mathematica*" oder aus "*Kleine Einführung in Mathematica*" aus, die Sie schon verstehen können. Für den Einstieg ist **Gruppenarbeit** keine schlechte Sache.
9. Probieren Sie mit Mathematica diejenigen Aufgaben aus "UA1 - UAxx" aus, auf die Sie neugierig sind. Wenn es Ihnen Spass macht, können Sie zusätzlich auch Aufgabensammlungen nach eigenem Geschmack benützen und nach eigener Teststrategie Erfahrungen sammeln.

### **Zum folgenden Kapitel:**

10. "Wenn von zwei grossen Gelehrten beide natürlich die Wahrheit sagen, dabei sich aber so widersprechen, dass jeder gerade das Gegenteil des andern behauptet, dann muss wohl die Wahrheit falsch sein!"  
*Ist diese Aussage richtig oder nicht?* **Fortsetzung: Rückseite**

---

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Übungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören. Falls möglich, sind die Resultate von Rechnungsaufgaben mit Mathematica zu kontrollieren.

## Logik-Zeitung

### Das Paradoxon der unerwarteten Hinrichtung (Gekürzt nach einer Erzählung von Martin Gartener)

**Inserat: Zu empfehlen:**  
M. Gartener, *Logik unterm Galgen*

Gartener schreibt unter anderem: "Das Urteil wurde an einem Samstag gesprochen. 'Die Hinrichtung wird mittags an einem der sieben Tage der nächsten Woche stattfinden', sagte der Richter zu dem Gefangenen. 'Aber Sie werden nicht wissen, an welchem Tage, bis Sie am Morgen des Hinrichtungstages Bescheid bekommen.'

Der Richter war als Mann bekannt, der immer sein Wort hielt. Der Verurteilte ging, vom Anwalt begleitet, in seine Zelle zurück. Als die beiden allein waren, lächelte der Anwalt und meinte: 'Merken Sie nichts? Das Urteil des Richters kann unmöglich vollstreckt werden.'

'Das verstehe ich nicht', sagte der Gefangene.

'Ich erkläre es Ihnen. Es ist ganz offensichtlich, dass man Sie nicht am nächsten Samstag hinrichten kann. Samstag ist der letzte Tag der Woche. Am Freitag Nachmittag wären Sie noch am Leben und somit hätten Sie die absolute Gewissheit, dass man Sie am Samstag hinrichten würde. Sie wüssten es, bevor es ihnen am Samstag Morgen mitgeteilt würde. Das liefe der Anordnung des Richters zuwider.'

'Stimmt', sagte der Gefangene.

'Samstag ist damit also ausgeschlossen', fuhr der Anwalt fort. 'Bleibt der Freitag als letzter Tag, an dem man Sie hinrichten könnte. Aber am Freitag ist dies nicht möglich, weil am Donnerstag Nachmittag nur noch zwei Tage übrigbleiben: nämlich Freitag und Samstag. Da der Samstag nicht in Frage kommt, müsste es am Freitag geschehen. Da Sie das aber wissen, würde es ebenfalls der Anordnung des Richters zuwiderlaufen. Somit ist auch der Freitag ausgeschlossen. Damit bleibt der Donnerstag als der letzte mögliche Tag. Aber Donnerstag ist auch ausgeschlossen, weil Sie am Mittwoch Nachmittag noch am Leben wären und damit wüssten, dass der Donnerstag der Tag der Hinrichtung sein müsste.'

'Jetzt verstehe ich', sagte der Verurteilte und fühlte sich schon wesentlich wohler. 'Auf diese Art und Weise kann ich auch Mittwoch, Dienstag und Montag streichen. Dann bleibt nur noch morgen übrig, aber morgen kann ich nicht hingerichtet werden, weil ich es heute schon weiss!'

Kurz und gut, die Anordnung des Richters scheint sich selbst zu widerlegen. Es gibt keinen logischen Widerspruch in den beiden Urteilsergänzungen. Trotzdem kann offenbar das Urteil nicht ausgeführt werden - oder doch? Um dies zu klären, kehren wir zu dem Verurteilten in die Zelle zurück. Er ist durch die scheinbar unanfechtbare Logik überzeugt, dass er nicht hingerichtet werden kann, ohne dass dadurch die Bedingungen des Urteilspruchs verletzt würden. Zu seiner grössten Überraschung kam jedoch am Donnerstag Morgen der Henker. Es ist klar, dass er ihn nicht erwartet hatte. Was noch mehr überrascht: Nun ist der Urteilspruch des Richters völlig korrekt. Das Urteil kann vollstreckt werden, genau wie es der Richter verkündet hatte." Lässt dieser Beigeschmack der Logik, die von der Welt negiert wird, das Paradoxon nicht recht faszinierend erscheinen?

### Aufruf an alle intelligenten Studenten!

*Bipl. Ing. ABC kann seit der Lektüre des Paradoxons von der unerwarteten Hinrichtung seinen Verstand nicht mehr finden. Er soll sich hinter der Lösung versteckt haben. Wo ist sie? Erbetete Mitteilung an Red.*

Reklame-Teil: Ja-Parole für mehr Logik im Magen!  im Süden  Wetterbericht: Erst Sturm u. Drang, dann fehlend

1. *Entscheiden Sie, welche Ausdrücke Aussagen sind und begründen Sie Ihre Entscheidung:*

1.1.  $a : \equiv " 5 + 11 = 3 "$

1.2.  $b : \equiv " 5 + 11 \subseteq 16 "$

1.3.  $c : \equiv " 5 + 11 \neq 16 "$

1.4.  $d : \equiv " 5 + x = 16 "$

1.5.  $e : \equiv " 5 + x = y "$

1.6.  $f : \equiv " \text{Paulus behauptet, ein Kreter sei ein Lügner.} "$

1.7.  $g : \equiv " \text{Alle Kreter sagen die Wahrheit.} "$

1.8.  $h : \equiv " \text{Über allen Wipfeln ist Ruh ...} "$

1.9.  $i : \equiv " \text{Da grollte Poseidon gar mächtig, doch Venus daselbst schlief ...} "$

1.10.  $j : \equiv " \text{... Von der Stirne heiss - rinnen muss der Schweiß ...} "$

1.11.  $k : \equiv " \text{Ein Kreter behauptete, alle Kreter seien Lügner.} "$

2. *Wieso verwendet man in der Mathematik die "Junktorenschreibweise"?*

3. *Berechnen Sie die Wahrheitstafeln. (Verwenden Sie zur Kontrolle **Mathematica!**)*

3.1.  $\neg( X \wedge \neg Y )$

3.2.  $\neg( A \vee B )$

3.3.  $\neg( P \vee \neg Q )$

3.4.  $( \neg A \vee B ) \Leftrightarrow A$

3.5.  $( A \vee ( B \wedge C ) ) \Rightarrow B$

3.6.  $\neg( A \vee \neg B ) \vee \neg B \vee A \vee \neg( B \wedge A )$

3.7.  $\neg( A \wedge \neg( B \wedge ( \neg A \wedge \neg( B \wedge D ) ) ) )$

3.8.  $(( A \Rightarrow B ) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$

3.9.  $(( A \Rightarrow B ) \wedge ( B \Rightarrow C )) \Rightarrow ( A \Rightarrow C )$

**Fortsetzung: Rückseite**

## Uebungen - Praktikum Kap. 2 / 2

---

4. Vereinfachen Sie die Aussagenformen von Aufgabe 3 mit Hilfe des Aussagenkalküls.

5. Finden Sie im folgenden Text heraus, wer nicht die Wahrheit sagt:

"Auf der Insel Bahava leben zweierlei Leute. Die einen sagen stets die Wahrheit, die andern lügen immer. Ein Besucher der Insel trifft drei Personen A, B und C. A sagt zum Besucher: "Wenn B lügt, dann sagt C die Wahrheit." B sagt darauf: "C ist ein Lügner!" Da sagt C: "Dem A darf niemand was glauben."

6. Machen Sie sich anhand einer Tabelle eine **Übersicht** über sämtliche mögliche Belegungsfunktionen von Aussageformen mit genau zwei Aussagevariablen.

7. Drücken Sie die Aussageform mit Hilfe des **Scheffer-Strichs** aus.

$$7.1. \quad \neg A \qquad 7.2. \quad A \wedge B \qquad 7.3. \quad A \vee B$$

Lösen Sie die gleiche Aufgabe für  $\downarrow$  an Stelle von  $|$ .

8. Welche Aussageformen sind Tautologien?

$$8.1. \quad A \wedge \neg B$$

$$8.2. \quad \neg(A \wedge \neg B)$$

$$8.3. \quad A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

$$8.4. \quad A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

$$8.5. \quad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$8.6. \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$8.7. \quad A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$8.8. \quad A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

9. Begründen Sie:

$$9.1. \quad A \wedge (A \Rightarrow B) \vdash B \qquad 9.2. \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow C)$$

$$9.3. \quad (A \Rightarrow \neg B) \wedge B \vdash \neg A$$

10. Lösen Sie zu obigen Themen **Aufgaben nach eigener Wahl** aus "S. Lipschutz: Finite Mathematik, SCHAUM/ Mac Graw Hill, Kap. 1 - 4 (p. 1 - 34)" oder "E. Mendelson: Boolesche Algebra und logische Schaltungen, ebenfalls SCHAUM, Kap. 1".  
Weiter: "99 Logeleien ..." sowie "Neue Logeleien von Zweistein, Hoffmann und Campe".  
Oder: "M Gardner: Logik unterm Galgen, Vieweg".

---

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.  
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** zu kontrollieren.

11. Schreiben Sie in "Polnischer Notation":

$$\neg A \vee (C \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B) \wedge (A \vee \neg C) \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B)$$

12. Konstruieren Sie eine **a.NF**:

12.1.  $A \Leftrightarrow B$

12.2.  $(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (B \vee A)$

13. Konstruieren Sie die **vollständige a.NF**:

13.1  $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$

13.2.  $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg C$

13.3.  $B \Rightarrow (A \vee \neg C)$

13.4.  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

14. Charakterisieren Sie die Aussagenlogik bezüglich Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit, Möglichkeiten einer Problemlösung mit Maschinen.

15. Vereinfachen Sie mit Hilfe von Äquivalenzumformungen:

15.1.  $A \wedge C \wedge (B \vee \neg A \vee \neg B)$

15.2.  $[ \neg(A \wedge \neg B) \vee \neg B \vee A \vee \neg(A \vee B) ] \wedge B$

15.3.  $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$

15.4.  $[ (A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) ] \Leftrightarrow [ (\neg A \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C) ]$

16. Ist der folgende Schluss korrekt?

$$a \Rightarrow b, \quad c \vee \neg b, \quad \neg c \quad \vdash \quad \neg a$$

17. Sherlock Holmes zu Dr. Watson über seinen neusten Fall: "Mein lieber Watson, meine Nachforschungen gestatten mir, nun folgende Schlüsse zu ziehen: Falls sich Brown oder Cooper als Täter herausstellen, dann ist Adams unschuldig. Sind jedoch Adams oder Cooper unschuldig, dann muss Brown der Täter sein. Wenn aber Cooper schuldig ist, dann ist Adams Mittäter." Dr. Watson runzelte die Stirn und fixierte Holmes: "Dann wäre der Täter also ermittelt..." Wie lautet die Lösung?

## Uebungen - Praktikum Kap. 2 / 4

---

18. Vereinfachen Sie mit Hilfe von Regeln oder Wahrheitstafeln:

$$18.1. \quad (A \vee B) \wedge (A \vee \neg A)$$

$$18.2. \quad \neg(A \wedge \neg(B \wedge (\neg A \wedge (B \wedge C))))$$

$$18.3. \quad ((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$$

19. Wo liegt der Fehler?

$$a^2 = (-a)^2 \Rightarrow a = -a \quad \text{q.e.d.}$$

20. Was ist die Inversion?

"Falls 6 eine Primzahl ist, so fliegen heute rote Autos durchs Haus."

21. ... Nachdem die Lausbuben eine Fensterscheibe zu Scherben gemacht haben...

Paul sagt: "Max lügt!"

Max sagt: "Otto lügt!"

Otto sagt: "Nein, Max und Paul sind die Lügner!"

Wer lügt?

22. Ist das eine wahre oder eine falsche Aussage?

$$\exists_x: \frac{1}{x-1} = 0.$$

23. Konstruieren Sie P:

X	Y	Z	P
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

---

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören. Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** zu kontrollieren.

## Wichtige Äquivalenzen

- (1) *Gesetz der doppelten Negation:*  $\neg\neg A \equiv A$
- (2) *Idempotenz*  
 $A \vee A \equiv A$   
 $A \wedge A \equiv A$
- (3) *Assoziativität*  
 $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$   
 $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
- (4) *Kommutativität*  
 $A \vee B \equiv B \vee A$   
 $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- (5) *Distributivität*  
 $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$   
 $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- (6) *Identität*  
 $A \vee f \equiv A$   
 $A \wedge w \equiv A$
- (7) *Neutralität: Triviale Tautologie*  $A \vee w \equiv w$   
*Triviale Kontradiktion*  $A \wedge f \equiv f$
- (8) *Komplementarität*  
 $A \vee \neg A \equiv w$   
 $A \wedge \neg A \equiv f$
- (9) *Dualität*  
 $\neg w \equiv f$   
 $\neg f \equiv w$
- (10) *De Morgan*  
 $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$   
 $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- (11) *Absorptionsgesetze* 1. Typ  $A \vee (A \wedge B) \equiv A$   
 $A \wedge (A \vee B) \equiv A$   
2. Typ  $(A \wedge B) \vee \neg B \equiv A \vee \neg B$   
 $(A \vee B) \vee \neg B \equiv A \wedge \neg B$
- (12) *Kontraposition oder Transposition*  $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$
- (13) *Dualisierung der Kontraposition*  $A \Leftrightarrow w \equiv \neg A \Leftrightarrow f$
- (14) *Subjunktionsersatz*  $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

Etc. .

**Äquivalenzen in einer Aussagenvariablen**

$a \Leftrightarrow a$	Reflexivität der Äquivalenz	(1)
$\neg \neg a \Leftrightarrow a$	Gesetz der doppelten Negation	(2)
$a \wedge a \Leftrightarrow a$	Idempotenz der Konjunktion	(3)
$a \vee a \Leftrightarrow a$	Idempotenz der Disjunktion	(4)
$a \wedge \neg a \Leftrightarrow F$	Gesetz des Widerspruchs	(5)
$a \vee \neg a \Leftrightarrow W$	Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten	(6)
$a \rightarrow a \Leftrightarrow W$	Reflexivität der Implikation	(7)
$a \wedge W \Leftrightarrow a$	$W$ ist Neutralelement der Konjunktion	(8)
$a \vee W \Leftrightarrow W$	Disjunktion mit $W$ erzwingt $W$	(9)
$a \vee F \Leftrightarrow a$	$F$ ist Neutralelement der Disjunktion	(10)
$a \wedge F \Leftrightarrow F$	Konjunktion mit $F$ erzwingt $F$	(11)

**Disjunktionsgesetze**

$a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$	Kommutativität von „ $\vee$ “	(12)
$a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c$	Assoziativität von „ $\vee$ “	(13)
$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	Distributivität von „ $\vee$ “ über „ $\wedge$ “	(14)
$a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$	Absorptionsgesetz für „ $\vee$ “	(15)
$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$	DE MORGAN-Gesetz	(16)
$a \vee b \Leftrightarrow \neg a \rightarrow b$	Umwandlung „ $\vee$ “ in „ $\rightarrow$ “	(17)

**Konjunktionsgesetze**

$a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$	Kommutativität von „ $\wedge$ “	(18)
$a \wedge (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c$	Assoziativität von „ $\wedge$ “	(19)
$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	Distributivität von „ $\wedge$ “ über „ $\vee$ “	(20)
$a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$	Absorptionsgesetz für „ $\wedge$ “	(21)
$\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$	DE MORGAN-Gesetz	(22)
$a \wedge b \Leftrightarrow \neg(a \rightarrow \neg b)$	Umwandlung „ $\wedge$ “ in „ $\rightarrow$ “	(23)

**Subjunktionsgesetze**

$a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg b \rightarrow \neg a$	Kontrapositionsgesetz	(24)
$a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b$	Umwandlung von „ $\rightarrow$ “ in „ $\vee$ “	(25)
$a \rightarrow (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$	Distributivität von „ $\rightarrow$ “ über „ $\wedge$ “	(26)
$a \rightarrow (b \vee c) \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)$	Distributivität von „ $\rightarrow$ “ über „ $\vee$ “	(27)
$(a \vee b) \rightarrow c \Leftrightarrow (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$	Modifiziertes Distributivgesetz	(28)
$(a \wedge b) \rightarrow c \Leftrightarrow (a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c)$	Modifiziertes Distributivgesetz	(29)
$a \rightarrow (b \rightarrow c) \Leftrightarrow b \rightarrow (a \rightarrow c)$	Tauschgesetz für Vorderglieder	(30)
$a \rightarrow (b \rightarrow c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \rightarrow c$	Klammer-Änderungsgesetz für „ $\rightarrow$ “	(31)

**Bijunktionsgesetze**

$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow b \leftrightarrow a$	Kommutativität von „ $\leftrightarrow$ “	(32)
$a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) \Leftrightarrow (a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c$	Assoziativität von „ $\leftrightarrow$ “	(33)
$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$	Umwandlung „ $\leftrightarrow$ “ in „ $\vee$ “	(34)
$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$	Umwandlung „ $\leftrightarrow$ “ in „ $\wedge$ “	(35)
$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$	Darstellung von „ $\leftrightarrow$ “ mit „ $\rightarrow$ “	(36)
$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow \neg a \leftrightarrow \neg b$	Kontrapositionsgesetz für „ $\leftrightarrow$ “	(37)

**Implikationen**

$F \Rightarrow a$	ex falso quodlibet	(38)
$a \Rightarrow W$	ex quodlibet verum	(39)
$a \wedge b \Rightarrow a$	Abschwächung der Konjunktion	(40)
$a \Rightarrow a \vee b$	Abschwächung zur Disjunktion	(41)
$\neg a \Rightarrow a \rightarrow b$	Satz vom negierten Vorderglied	(42)
$b \Rightarrow a \rightarrow b$	Satz vom Hinterglied	(43)
$a \wedge b \Rightarrow a \vee b$	Konjunktion impliziert Disjunktion	(44)
$a \wedge (a \rightarrow b) \Rightarrow b$	Abtrennungsgesetz (modus ponens)	(45)
$\neg b \wedge (a \rightarrow b) \Rightarrow \neg a$	Widerlegungsgesetz (modus tollens)	(46)
$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \Rightarrow (a \rightarrow c)$	Transitivitätsgesetz	(47)
$(a \vee b) \wedge ((a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)) \Rightarrow c$	Gesetz der Fallunterscheidung	(48)



1. Beantworten Sie folgende Fragen:

- 1.1. Wie kann eine Menge gegeben werden?
- 1.2. Ist  $\{1, 2, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 4, \{\}, 0\}$  eine Menge?
- 1.3. Wann sind zwei Mengen gleich?
- 1.4. Ist  $M = \{x \in M / x \in M \Leftrightarrow x \notin M\}$  eine Menge?
- 1.5. Was ist eine "transfinite Kardinalzahl"?
- 1.6. Was ist eine "Mengenklasse"?
- 1.7. Was ist ein "geordnetes Paar"?
- 1.8. Was ist eine "Produktenmenge"?

2. Schreiben Sie die Potenzmenge von  $M$  auf:

$$M = \{0, 1, 2, 3\}$$

3. Zeigen Sie mit Hilfe eines Euler-Diagramms:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

4. Gegeben seien  $A$  und  $B$ . Geben sie die folgenden "Mengenverknüpfungen":  
(Verwenden Sie zur Kontrolle und zur Übung **Mathematica!**)

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{0, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad U = \mathbb{N}.$$

$$A \cup B = ? \quad A \cap B = ? \quad A \setminus B = ? \quad A \Delta B = ? \quad \overline{A}$$

5. Beweisen Sie korrekt:

$$5.1. \quad A \cap B = B \cap A$$

$$5.2. \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$5.3. \quad A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

6. Entwerfen Sie das **Hasse-Diagramm** von  $P(M)$ :

$$M = \{a, b, c, d\}$$

**Fortsetzung: Rückseite**

## Uebungen - Praktikum Kap. 3 / 2

---

7. Suchen Sie eine andere Darstellungsform:

7.1.  $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = ?$

7.2.  $\overline{(A \cap B)} = ?$

8. Welches sind die Elemente der folgenden Mengen?

8.1.  $\{ x \in \mathbb{N} \mid 5 \mid x \} \cap \{ x \in \mathbb{N} \mid 3 \mid x \}$

8.2.  $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$

8.3.  $\overline{\{ x \in \mathbb{Q} \mid -10 < x \}}$

9. Begründen Sie:  $\overline{(\bar{A})} = A$

8. Entwickeln Sie mit Hilfe von Euler- (Venn-) Diagrammen:

$$|A \cup B| = |A| + \text{.....?.....}$$

9. Geben Sie die Herleitung:

9.1.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

9.2.  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

10. Wieviele Teilmengen mit genau 2 Elementen hat  $\{a, b, c, d\}$  ?

11. Auf der Insel El-Saca-mek, wo die Menschen nach den Gesetzen von Al-Habi-fi lebten, galt es als besonders würdevoll, wenn ein Bürger "zwei Söhne, zwei Hunde, zwei Motorräder, zwei Gattinnen und zwei Töchter" besass. Wer sich dieser Würde als bezeichnet erwies, durfte Mitglied des Fi-Zweierbundes werden. Eines Tages lud der ehrwürdige vorsitzende Rat dieses Bundes mit Hab und Gut zu einer belustigenden Kreuzfahrt im Golfe von Baba-Raba-ba. Leider zürnte der Gott von El-Saca-mek gerade eine halbe Stunde nach Auslaufen des Schiffes Tabara einem Ungläubigen, der sich mit seinem wüsten Boot in die heiligen Gewässer vorgewagt hatte. Da kämpften die 100 Würdigen auf Tabara heldenhaft gegen den Sturm, denn so war es Sitte: Wer von seinem Besitz von jeder Ware die Hälfte verlor, der musste mit Schande den Bund verlassen. 70 Männer verloren im Sturm min. einen Hund, 75 einen Sohn, 80 eine Frau 85 eine Tochter, 13 einen Töff. Lässt sich nun sagen, wieviele der Wackeren zu Schande kamen?

---

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören. Falls möglich, sind die Resultate mit Mathematica zu kontrollieren.

1. *Repetitionsaufgaben:*

- 1.1.  $A = \{x, y\}$ ,  $B = \{0, 2, 3\}$ ,  $C = \{x, \alpha\}$   $A \times B \times C = ?$
- 1.2. Was ist die "Wahrheitsmenge"  $\tau(P)$  zu  $P \equiv \neg A \wedge B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$  ?
- 1.3. Beweise:  $\tau(P \wedge Q) = \tau(P) \cap \tau(Q)$
- 1.4. Wieviele Pfeile gibt es im Hasse-Diagramm von  $P(\{1,2,3,4\})$  ?

2. *Was ist mit den folgenden Begriffen gemeint und wie sind sie definiert?*

- 2.1. Relation und zweistellige Relation
- 2.2. Diagonalrelation (Bsp.?)
- 2.3. Inverse Relation
- 2.4. Äquivalenzrelation (Bsp.?)
- 2.5. Strenge Ordnungsrelation
- 2.6. Partition
- 2.7. Quotientenmenge
- 2.8. Abbildung
- 2.9. Funktion
- 2.10. Linkstotal
- 2.11. Graph
- 2.12. Surjektiv
- 2.13. Injektiv
- 2.14. Bijektiv
- 2.15. Umkehrfunktion/ -Abbildung
- 2.16. Äquivalenzklasse

3. *Untersuchen Sie, ob  $F$  oder  $G$  Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation oder Diagonalrelation ist! Suchen Sie gegebenenfalls Beispiele für Untermengen, die solche Relationen darstellen.*

a)  $F = \{ (a,b), (a,a), (c,d), (d,e), (b,a), (a,a), (c,c), (e,d), (d,d), (d,c), (e,e), (b,b) \}$

b)  $G = \{ (a, b) \mid a \in \{\text{verheiratete Männer}\}, b \in \{\text{verheiratete Frauen}\} \}$ , wobei  $G \subseteq \{\text{Schweizer/ Schweizerin}\} \times \{\text{Schweizer/ Schweizerin}\}$

4. *Zählen Sie die Elemente von  $F$  auf und bestimmen Sie das **Hasse-Diagramm** zu folgender Relation:*

$$F = \{ (x, f(x)) \mid (x > f(x)) \wedge (f(x) = x^2 - 5x + 6) \} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$$

5. *Geben Sie die Pfeildiagramme:* a)  $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

b)  $R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (2, 1), (3, 3), (4, 2)\}$

**Fortsetzung: Rückseite**

## Uebungen - Praktikum Kap. 4 / 2

---

6. Gegeben ist die Relation  $\mathbf{R}$  wie folgt:

$$\mathbf{R} = \{ (a, a), (b, c), (a, b), (c, d), (d, c), (b, d), (e, b) \}$$

6.1. Untersuchen Sie, ob eine der folgenden Aussagen zutrifft:

- " $\mathbf{R}$  ist eine Abbildung."
- " $\mathbf{R}$  ist eine Funktion."
- " $\mathbf{R}$  ist injektiv."

6.2. Zeichnen Sie von  $\mathbf{R}$  den Graphen und bestimmen Sie  $\mathbf{R}^{-1}$ . Ist  $\mathbf{R}^{-1}$  eine Funktion ?

6.3. Zeichnen Sie von  $\mathbf{R}$  das Hasse-Diagramm.

7. Gegeben ist  $\mathbf{F}$  wie folgt:

$$\mathbf{F} = \{ (n, a_n) \mid a_n = f(n) = n^2 - 5n + 6 \} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$$

Beantworten Sie bitte folgende Fragen:

- |                                      |                                 |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| 7.1. Ist $\mathbf{F}$ eine Funktion? | 7.2. Ist $\mathbf{F}$ injektiv? |
| 7.3. Ist $\mathbf{F}$ surjektiv?     | 7.4. Ist $\mathbf{F}$ bijektiv? |
| 7.5. $D_f = ?$                       | 7.6. $W_f = ?$                  |

8. Geben Sie eine Wertetabelle von einer Untermenge des Graphen und skizzieren Sie diesen. Entscheiden Sie alsdann, ob eine der Eigenschaften "injektiv", "surjektiv", "bijektiv" vorliegt.

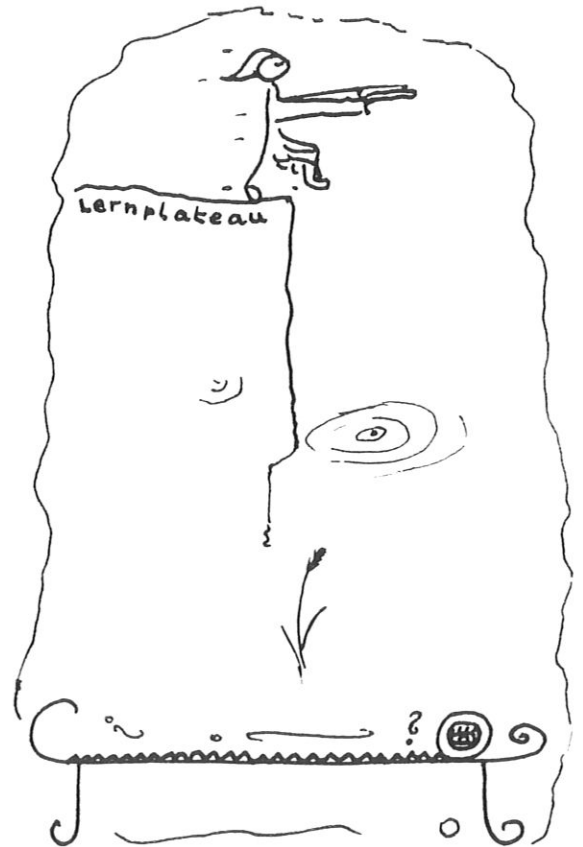
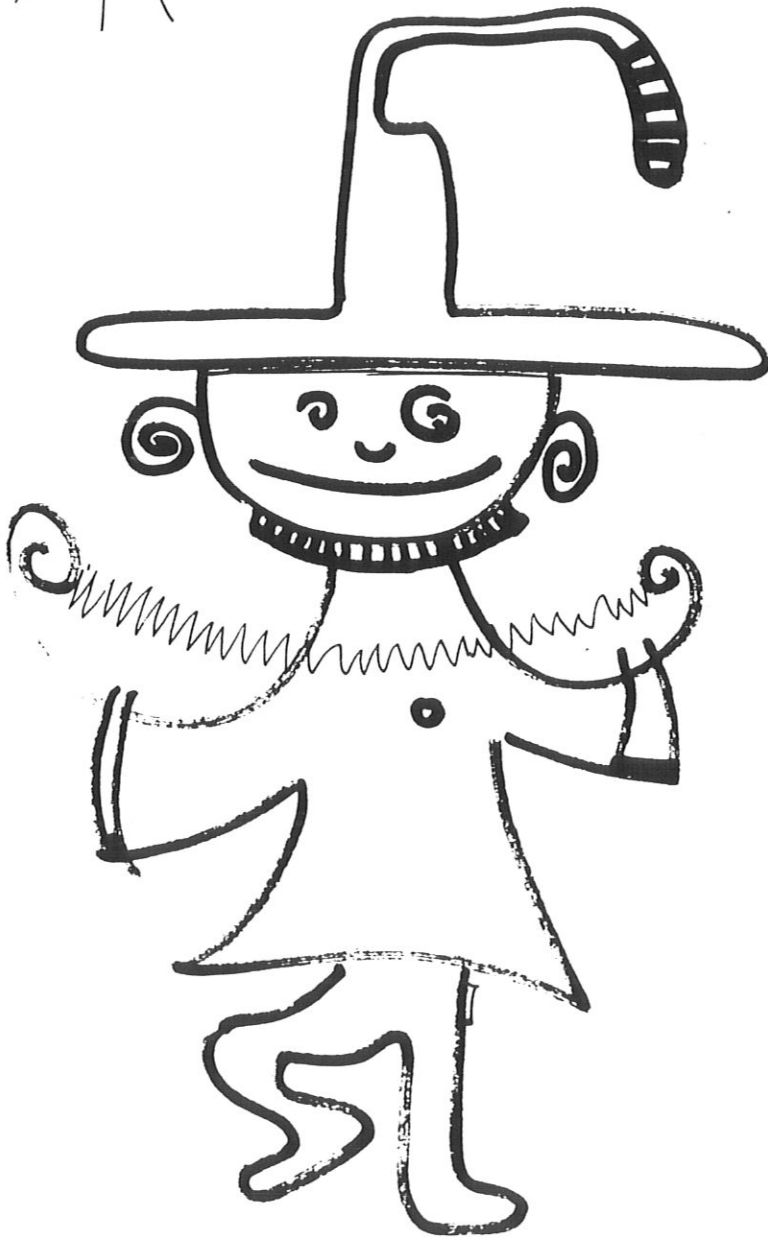
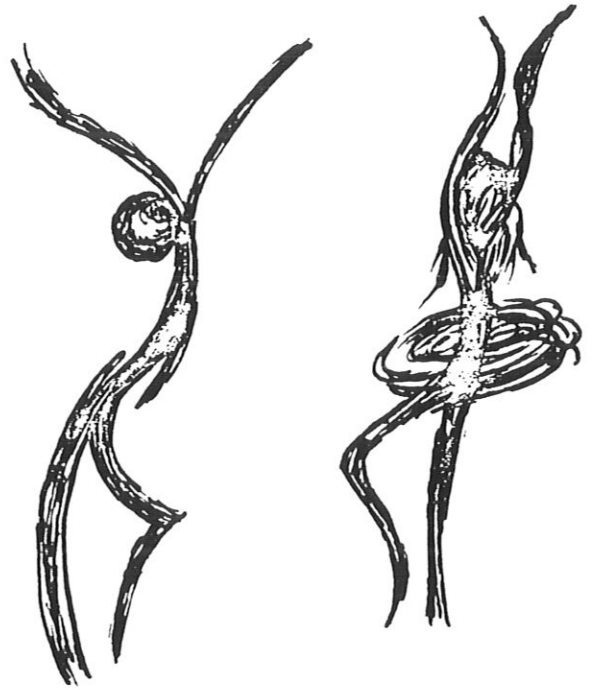
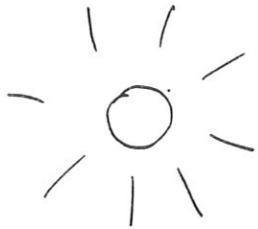
- |   |   |
|---|---|
| 8.1. $f: x \mapsto f(x) = 2x - 1, D_f = \mathbb{Q}$ | 8.2. $F = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$   |
| 8.3. $F = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$               | 8.4. $f(x) = x^2, D_f = \mathbb{R}$     |
| 8.5. $G = \{(1, a), (3, b), (2, c), (4, b)\}$       | 8.6. $f(x) = x^2, D_f = \mathbb{R}^+$   |
| 8.7. $g(x) = x^3, D_g = \mathbb{R}^+$               | 8.8. $f(x) = x^3 - x, D_f = \mathbb{R}$ |

9. Bilden Sie  $f \circ g, g \circ f, g \circ f \circ g$  sowie  $f \circ g \circ f$  mit folgenden Funktionen:

$$f(n) = 2^n \quad (D_f = \mathbb{N}), \quad g(x) = x^4 + 4x^2 + 7 \quad (D_g = \mathbb{Z}).$$

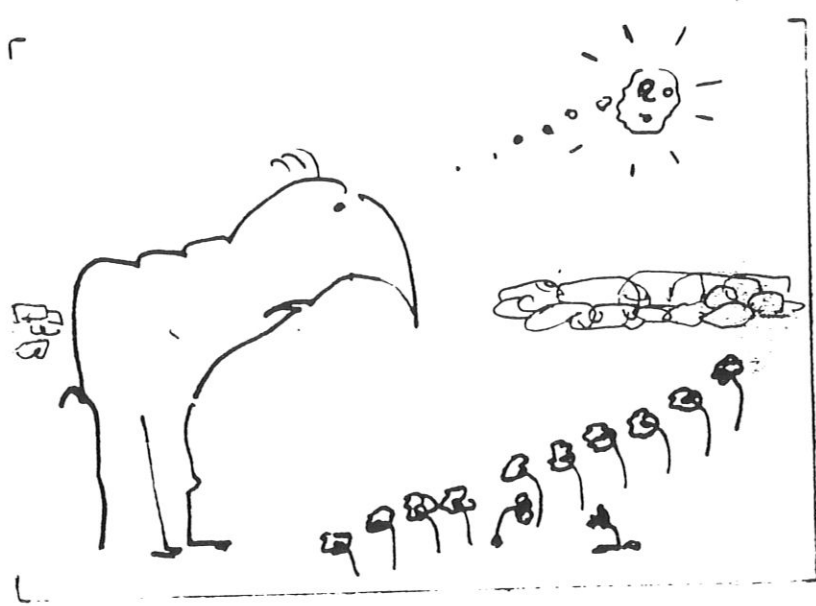
---

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören. Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** zu kontrollieren.



Oefters mal Relax! Doch auch hier bitte das Lernplateau nicht überschreiten!

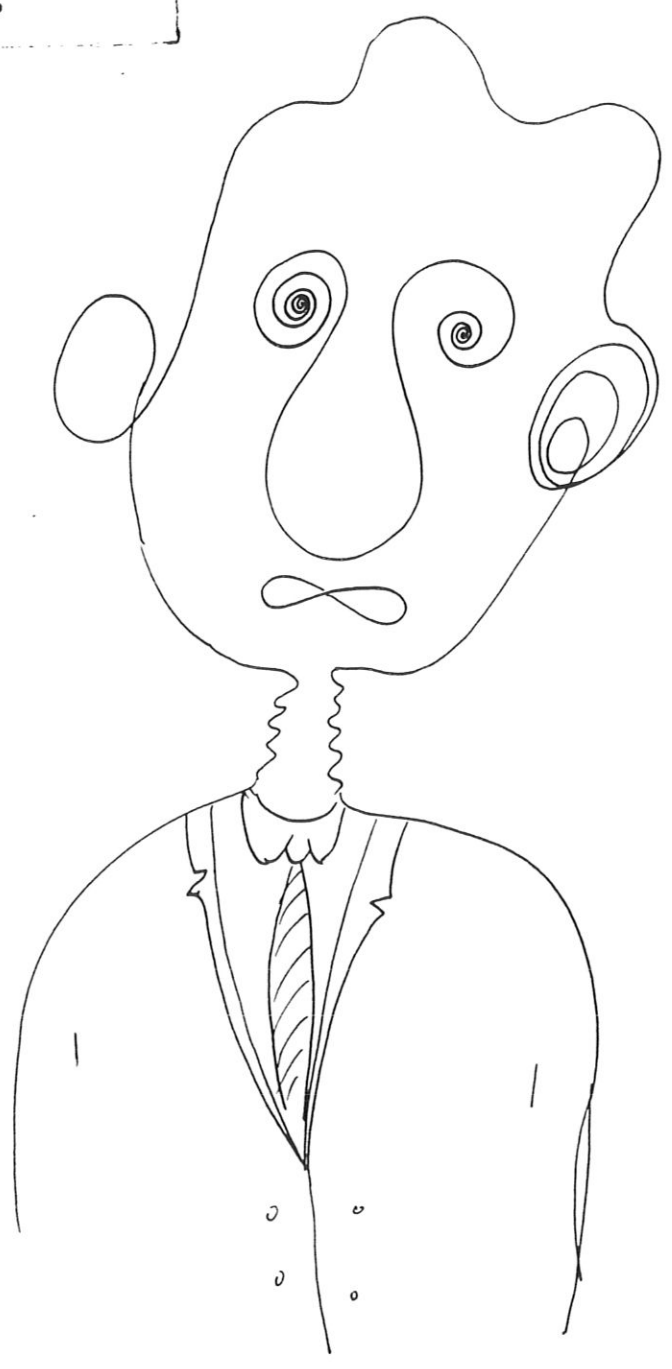




Das Aergernis

Die fehlende Norm

Das unendliche Schweigen  
 (Zum Thema "Symbole in der Mathematik")



# Übungen - Praktikum Kap. 5 / 1

Klasse: .....

Thema des Kapitels: Einfache Standard-Funktionen

ISB, WIR90

---

## 1. Repetitionsaufgaben:

- 1.1. Was ist die Zahlengerade? (Eigenschaften?)
- 1.2. Wie stellen wir üblicherweise Funktionen dar?
- 1.3. Was ist der Definitionsbereich? – Was der Wertebereich?
- 1.4. Wann sind zwei Funktionen gleich?
- 1.5. Wieviele Partitionen hat  $\{a, b, c, d\}$ ?

## 2. Machen Sie Beispiele für

- |                            |                                |
|----------------------------|--------------------------------|
| 2.1. Offene Intervalle     | 2.2. Abgeschlossene Intervalle |
| 2.3. Halboffene Intervalle | 2.4. Punktierte Intervalle     |

## 3. Was ist:

- |                              |                           |
|------------------------------|---------------------------|
| 3.1. Die Betragsfunktion?    | 3.2. Die Signumsfunktion? |
| 3.3. Die Gauss-Klammerfunkt? | 3.4. Eine Zahlenfolge?    |

4. Beweisen Sie  $||x|-|y|| \leq |x \pm y| \leq |x|+|y|$

5. Berechnen Sie: 
$$\frac{|4*(-8)| - |7*(-10)|}{12 - |3*(-24)|}$$

6. Entwerfen Sie den Graphen:  $f(x) = \frac{|[x]|}{[x^2]} + [x]$  (**Mathematica**)

7. Geben Sie die Folgenglieder:  $\langle a_n \rangle = [?, ?, ?, ?.....]$

7.1.  $f(n) = a_n = n$

7.2.  $f(n) = a_n = 7$

7.3.  $f(n) = a_n = \frac{1}{n}$

7.4.  $f(n) = a_n = \frac{4}{n-1+n*n}$

7.5.  $a_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{2}$

7.6.  $a_n = \frac{[1/(n+1)] + [\sin(n)]}{1/[n]}$

8. Skizzieren Sie die Funktionenschar  $f: x \mapsto f(x) = c$ ,  $c \in \{-4, -3, \dots, 2, 3, 4\}$   
(**Mathematica**)

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 5 / 2

---

9. Skizzieren Sie die Funktionenschar von (Mathematica)

$$f(x) = a x, \quad a \in \{-4, -3, -2, -1, -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4\}$$

10. Skizzieren Sie die Funktionenschar von (Mathematica)

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } f(x) = 0.5 x + b \\ \text{b) } f(x) = -1.5 x + b \end{array} \right\} \quad b \in \{-4, -3, \dots, 2, 3, 4\}$$

11. Geben Sie die lineare Funktion  $f(x) = a x + b$  mit

- a)  $x_0 = 2$  (Nullstelle),  $b = 7$
- b)  $x_0 = -4$ ,  $a = 3$
- c)  $a = 4$ ,  $f(3) = 7$  ( $x_0 = ?$ )

12. Skizzieren Sie die Funktionenschar (Mathematica)

$$f(x) = a x^2, \quad a \in \{-3, -2, -1, -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4\}.$$

13. Skizzieren Sie die Funktionenschar  $f(x) = 0.5 x^2 + c$ ,  $c \in \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ .  
(Mathematica)

14. Berechnen Sie die Nullstellen von  $f(x) = 3 x^2 - 4$

15. Skizzieren Sie den Graphen von  $f(x) = 0.5 x^2 + 2 x - 3$  durch Verschiebung des Graphen von  $f(x) = 0.5 x^2$  !

16. Lösen Sie rechnerisch und graphisch:

- a)  $4 x^2 - 3 x - 1 < 0$
- b)  $4 x^2 - 3 x - 1 > 2 x + 1$
- c)  $0.25 x^2 - 2 x + 1 = 0$
- d)  $(x + 4)(x - 3) = 0$

17. Einem Kreiskegel mit der Höhe  $H$  und dem Radius  $R$  ist ein Zylinder mit der Höhe  $h$  und dem Radius  $r$  eingeschrieben. Bei welchem  $h$  ist das Volumen des Zylinders maximal? Bei welchem  $h$  die Mantelfläche des Zylinders? (Hinweis: Wenn Ihre rechnerische Lösung versagt, so gibt es immer noch graphische Mittel...)

---

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören. Falls möglich, sind die Resultate mit Mathematica zu kontrollieren.



18. Repetitionsaufgaben:

18.1. Skizzieren Sie mit **Mathematica** die Graphen folgender Funktionen:

a)  $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$

b)  $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$

c)  $f(x) = \frac{1}{x}$

d)  $f(x) = [x^2]$

e)  $f(x) = [(1/4) x^3]$

f)  $f(x) = |\sin(x)|$

18.2. Ist durch folgende Relation eine Äquivalenzrelation gegeben?

$$a R b : \Leftrightarrow a^2 + b^2 = a b$$

18.3. Ist durch folgende Relation eine strenge Ordnungsrelation gegeben?

$$a R b : \Leftrightarrow a^2 \geq \frac{1}{b}$$

19. Skizzieren Sie mit **Mathematica** die Funktionenschar  $f(x) = x^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, 12$  in einem Bild.

20. Gleiche Aufgabe wie 19. für  $n = -1, -2, -3, \dots, -12$ .

21. Skizzieren Sie mit **Mathematica** folgende Funktionen:

a)  $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$

b)  $f(x) = \frac{1}{x}$

22. Was ist ein Pol? Was ist eine Asymptote?

23. Untersuchen Sie mit **Mathematica** graphisch auf Pole und Asymptoten:

a)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1}$

b)  $f(x) = \frac{2}{4x - 3} + \frac{1}{2} x - 1$

c)  $f(x) = \frac{2}{4x - 3} + \frac{1}{2} x^2 - 1$

d)  $f(x) = \frac{2}{4x^2 - 2} + \frac{1}{2} x^2 - 1$

e)  $f(x) = \frac{2}{4x^2 - 2} + \frac{1}{2} x - 1$

g)  $f(x) = \frac{2}{4x^2 - 2} + \frac{1}{2x} - 1$

Fortsetzung: Rückseite

## Uebungen - Praktikum Kap. 5 / 4

---

24. Untersuchen Sie auf Beschränktheit und skizzieren Sie die Graphen mit **Mathematica**:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + x - 2}{x^3 + 2x^2 + 1}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + x - 2}{x^3 + 2x^4 + 1}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^3 + x}{x^5 + x^3 + x}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^4 + x^2 + 2}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 8}{x^2 - 2x + 4}$$

25. Was ist eine diskrete Funktion?

26. Stellen Sie die Funktionen dar mit **Mathematica**:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 12 & \text{für } x \in \mathbb{N} \\ 7 & \text{für } x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 10/n & \text{für } x \in \mathbb{N} \\ \text{nicht def.} & \text{sonst} \end{cases}$$

27. Skizzieren Sie mit **Mathematica** die Graphen:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1/(2x) + 1 & \text{für } x < 2 \\ x^2 & \text{für } -2 \leq x \leq 2 \\ -1/2 x + 5 & \text{für } x \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x - 4 & x < 2 \\ 2x^2 + 3x - 4 & x \geq 2 \end{cases}$$

28. Skizzieren Sie mit **Mathematica**  $f(g(x))$  und  $g(f(x))$ :

$$f(x) = 7x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 11x + 12 - 4/x + 1/x^2 - 1/x^3$$

$$g(x) = 3x^2 + 8x - 11 + 1/(2x) + 4/x^2$$

29. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen gerade oder ungerade sind:

$$\text{a) } f(x) = 3x^4 + 4x^2 + 7$$

$$\text{b) } f(x) = 2x^2 - x + 1$$

$$\text{c) } f(x) = -x^5 + 6x^3 - 2x$$

$$\text{d) } f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$$

---

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören. Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** zu kontrollieren.

# Übungen - Praktikum Kap. 5 / 5

Klasse: .....

Thema des Kapitels: Einfache Standard-Funktionen

ISB, WIR90

---

30. Definieren Sie und geben Sie ein Beispiel einer Funktion mit dieser Eigenschaft:

30.1. Monoton wachsend.

30.2. Streng monoton wachsend.

30.3. Monoton fallend.

30.4. Streng monoton fallend.

31. Wo sind folgende Funktionen jeweils bijektiv und was könnten die Umkehrfunktionen sein?

31.1.  $f(x) = x^2$

31.2.  $f(x) = x^2 - 2$

31.3.  $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 16x - 5$

31.4.  $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 5}$

31.5.  $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 5} + 2x - 1$

32. Berechnen Sie nach dem Horner-Schema  $p(5)$ .

$$p(x) = 4x^5 - 7x^2 + 2x + 1$$

33. Welche der folgenden Funktionen ist ein Polynom?

a)  $p(x) = 4x^5 - 7x^2 + 2x + 1$

b)  $p(x) = x^{100} + x^{10} + x^3 - 4$

c)  $p(x) = x^2$

d)  $p(x) = 174$

e)  $p(x) = x^{-1}$

f)  $p(x) = x^{100} + x^{-10} + x^3 - 4$

34. Suchen Sie sinnvolle Darstellungen folgender Funktionen mit **Mathematica**:

34.1.  $f(x) = 100 x^{100} + 10'000 x^{10} + 100'000 x + 10^6$

34.2.  $f(x) = x^5 - 10 x^4 + 10^2 x^3 + 10^3 x^2 - 10^4 x + 10^{-5}$

35. Was ist eine gebrochen rationale Funktion? Nennen Sie Beispiele!

Fortsetzung: Rückseite

### Uebungen - Praktikum Kap. 5 / 6

---

36. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Pole und Asymptoten. Kontrollieren Sie mit **Mathematica!**

$$36.1. f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^2 + x - 2}$$

$$36.2. f(x) = \frac{x^6 - 4x^4 + 2x + 1}{x^3 - 4x^2 + 7}$$

$$36.3. f(x) = \frac{x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x + 0}$$

37. Beantworten Sie folgende Fragen:

- a) Was ist ein Winkel?
- b) Wie kann man einen Winkel messen?
- c) Wie kann man die Winkelfunktionen und dazu Umkehrfunktionen definieren?

38. Berechnen Sie die Werte der vier Winkelfunktionen zu folgenden Winkeln:

$$38.1. \alpha = 12^\circ \qquad 38.2. \beta = 0.0378$$

$$38.3. \gamma = -4.31 \qquad 38.4. \delta = 2 \text{ Neugrad}$$

39. Lösen sie mit Hilfe der Graphen sowie direkt mit **Mathematica**:

$$39.1. \tan(x) = 1 \qquad 39.2. \sin(x) = \cos(x)$$

$$39.3. \sin(x) = 0.5 \qquad 39.4. \text{ctg}(x) = \text{arccctg}(x)$$

$$39.5. \tan(x) = \text{arccctg}(x) \qquad 39.6. \tan(x) \text{ctg}(x) = 0.5$$

$$39.7. \cos(x) \sin^2(x) + \tan^2(x) = \text{ctg}(x) + 4 \cos^2(x) + 5 - x^2 + 1/(x-2)$$

$$39.8. \sin(x) \cos(\sin(x)) + \tan^5(x) = \arccos(x) - \frac{\arctan(x)}{\tan(x)}$$

40. Wie rechnet man Polarkoordinaten um in kartesische Koordinaten?

---

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Übungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören. Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** zu kontrollieren.

# Uebungen - Praktikum Kap. 5 / 7

Klasse: .....

Thema des Kapitels: Einfache Standard-Funktionen

ISB, WIR90

---

41. Plotten Sie mit Hilfe von **Mathematica** (Polarkoordinaten):

41.1.  $r(\phi) = \phi$

41.2.  $r(\phi) = \sin(\phi)$

41.3.  $r(\phi) = \sin(\phi/2)$

41.4.  $r(\phi) = \sin(\phi/k)$ ,  $k =$  "nach eigener Wahl"

41.5.  $r(\phi) = 2\phi + 1$

41.6.  $r(\phi) = \frac{1}{2}\phi + 1$

41.7.  $r(\phi) = -\frac{1}{2}\phi + 1$

41.8.  $r(\phi) = (1/2)\phi^2 - \phi + 1$

41.9.  $r(\phi) = \phi^2$

41.10.  $r(\phi) = \phi^3$

41.11.  $r(\phi) = 1/\phi$

41.12.  $r(\phi) = (\phi + 1)/(\phi^2 + \phi - 1)$

41.13.  $r(\phi) = \sin(\phi) + \sin(\phi/2)$

41.14.  $r(\phi) = \sin^2(\phi)$

41.15.  $r(\phi) = \sin(\phi) + \phi$

41.16.  $r(\phi) = 2\phi^2 + \sin(2\phi) - 5$

42. Erstellen Sie so wie in Aufgabe 41 Diagramme von Funktionen nach **eigenen** Ideen!

43. Wie ist der Begriff "Exponentialfunktion" definiert und wie heissen die Komponenten?

44. Wie ist der Begriff "Logarithmusfunktion" definiert und wie heissen hier die Komponenten?

45. Erstellen Sie die Diagramme von  $f(x) = a^x$  mit **Mathematica** für

$$a \in \{0.2, 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5, 1.8, 2, 2.3, e, 3, 5, 7, 10\}$$

46. Vereinfachen Sie:

46.1.  $7^a 7^b : 7^{a-b}$

46.2.  $[a^7 b^7 : (a b c^0)^4] : (a^1 b^2)^1$

47. Erstellen Sie die Diagramme von  $f(x) = \log_a(x)$  mit **Mathematica** für

$$a \in \{0.2, 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5, 1.8, 2, 2.3, e, 3, 5, 7, 10\}$$

48. Berechnen Sie:

48.1.  $\log_{27}(13) + \log_{27}(14) + \log_{27}(15)$

48.2.  $3 \log_{100}(1000)$

48.3.  $3.14159 \log_{2.1736}(11.209)$

48.4.  $3 \log_{27}(4)$

**Fortsetzung: Rückseite**

## Uebungen - Praktikum Kap. 5 / 8

---

49. Lösen Sie die Gleichung (falls notwendig mit **Mathematica**):

$$x^2 + \log(x) - 2 = 0$$

50. Entwerfen Sie mit **Mathematica** die Graphen der hyperbolischen Funktionen!

51. Entwerfen Sie mit **Mathematica** die Graphen der Areafunktionen!

52. Beweisen Sie:  $\forall x \in \mathbb{R}: \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

53. Entwerfen Sie die Graphen mit **Mathematica**:

53.1.  $f(x) = \sinh^2(x) + \cosh^2(x)$

53.2. Eigene Kompositionen

54. Konstruieren Sie Beispiele in denen gilt:  $f(g(x)) = g(f(x))$ , d.h.  $f \circ g = g \circ f$ .

55. Bestimmen Sie  $f(x)$  aus  $F(x,y) = 0$  sofern möglich:

55.1.  $F(x,y) = 4x - 2xy - 3y$

55.2.  $F(x,y) = \sin(x^2 y)$

55.3.  $F(x,y) = \sin(x^2 y - 4) + 0.5$

55.4.  $F(x,y) = \sin(x^2 y - 4) + 3$

55.5.  $F(x,y) = 3^{x-y} - 4^y + y - \log(x y [\sin(x-y)]) \cos(x y)$

56. Bestimmen Sie das Polynom mit minimalem Grad durch folgende Punkte:

a)  $(-1/2), (0/0), (1/1), (2/1)$

f)  $(-3/5), (-1/2), (-2/3), (1/1)$

b)  $(-3/5)$

g)  $(-3/5), (-1/2), (-2/3), (1/1), (0/4)$

c)  $(-3/5), (-1/2)$

h)  $(-3/5), (-1/2), (-2/3), (1/1), (2/1)$

d)  $(-3/5), (-1/2), (-2/3)$

i)  $(-3/5), (-1/2), (-2/3), (1/1), (3,-1)$

e)  $(-3/5), (-1/2), (-2/3), (0,4)$

j)  $(-3/5), (-1/2), (-2/3), (1/1), (3,-1), (6/9)$

---

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören. Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** zu kontrollieren.

1. Berechnen Sie für  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 20$  :
  - 1.1.  $n! = ?$  (Numerisch möglichst exakt!)
  - 1.2.  $n! \approx ?$  (Resultat mit der Formel von Stirling!)
  
2. In einer Urne liegen 8 verschiedene Lose mit 8 verschiedenen Farben. Jemand zieht nacheinander die 8 Lose.
  - a) Auf wieviele Arten können die 8 Lose gezogen werden?
  - b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, nur 6 Lose zu ziehen?
  
3. An einem "Score"-Lauf sind neben Start und Ziel 12 Feldposten vorgesehen. Alle Posten sollen angelaufen werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es hier, "intelligent" zu sein?
  
4. Schreiben Sie alle Permutationen von  $\{a, b, c, d\}$  auf!
  
5. Der kleine Manuel hat eine Schachtel mit Bauklötzen geschenkt bekommen. Mutter erklärt ihm, da seien 2 grüne, 3 gelbe, 3 blaue, 4 rote und noch der "weniger schöne" braune Klotz.
  - a) Wieviele verschiedene Türme kann Manuel damit bauen?
  - b) Wie lange muss Manuel bauen, wenn er alle verschiedenen Türme erstellen will und pro Turm 3 Minuten benötigt?
  
6. Wieviele bijektive Funktionen gibt es zwischen den Mengen  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 16\}$  und der Menge  $\{17, 18, 19, \dots, 33\}$  ?
  
7. Gegeben ist eine Menge mit 44 Elementen. Wieviele Teilmengen mit 35 Elementen gibt es?
  
8. Aus 20 Farben werden 9 ausgewählt und damit ein Raster der Grösse  $3 \times 3$  eingefärbt. Wieviele mögliche Einfärbungen gibt es?
  
9. Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten  $\binom{5}{k}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks.
  
10. Berechnen Sie  $\binom{128}{k}$ ,  $k = 15, 33, 45, 78$ .

## Uebungen - Praktikum Kap. 6 / 2

---

11. Berechnen Sie  $(a+b)^k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .
12. Auf wieviele Arten kann man aus einer Urne mit 54 Briefen eine 5-er-Gruppe herausziehen?
13. Beweisen Sie:
- 13.1.  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$
- 13.2.  $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$
- 13.3.  $\binom{n+k}{k+1} = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k}$
- 13.4.  $\binom{p+q}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{p}{k} \binom{q}{r-k}$
- 13.5.  $\binom{2p}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k}^2$
14. a) Wieviele Teilmengen mit  $k$  Elementen hat eine Menge mit  $n$  Elementen?  
b) Wieviele Teilmengen hat eine Menge mit  $n$  Elementen?
15. Werner möchte Obstbäume züchten. Er stellt fest, dass er auf seiner Wiese 22 Bäume setzen kann. Zur Auswahl stehen 18 Sorten. Zwischen wievielen Möglichkeiten muss Werner wählen?
16. Wieviele Codierungen sind mit Barcodes möglich, wenn für die 20 vorgesehenen Striche 6 Strichdicken zur Verfügung stehen?
17. Zur Chiffrierung bei der Uebermittlung von Text werden 5-er-Gruppen gebildet. Wieviele verschiedene solche Gruppen kann man mit einem Alphabet mit 26 Buchstaben bilden?
18. Um ein Standard-ASCII-Zeichen abzuspeichern, brauchen wir ein Byte, d.h. 8 bits. Wir wollen Text in ein File auf eine 1.2 MB-Disk schreiben. Wieviele Disks würde derjenige brauchen, der auf die Idee kommt, sämtliche Möglichkeiten von Text auszuprobieren? ( $\sim$  Gewicht der Disks?)
19. Wieviele Nummernschilder kann man mit einer Gruppe von 4 Ziffern und einer Gruppe von 3 Buchstaben herausgeben?
20. Mit wievielen Nullen endet die Zahl  $n = 300!$  ?
21. Auf wieviele Arten kann man 44 Spielkarten unter 4 Spieler "gleichverteilen"?
- 

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören. Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** zu kontrollieren.



22. Mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 werden 6-ziffrige Zahlen geschrieben. Wieviele solche Zahlen kann man schreiben, wenn die letzte Ziffer fix auf 5 gesetzt ist?
23. In einem Hörsaal befinden sich 50 Stühle.
- a) Auf wieviele Arten können sich 28 Studenten setzen?
  - b) Auf wieviele Arten kann man 28 Stühle auswählen?
24. Auf wieviele Arten kann in einem Verein mit 22 Frauen und 36 Männern ein Vorstand bestehend aus 4 Frauen und 3 Männern bestellt werden?
25. a) Wieviele Wörter können mit den Buchstaben des Wortes "Schweizerzeitmesser" gebildet werden?  
b) Wieviele Wörter sind es bei "Mississippi" ?
26. In einer Ebene sind 7 Punkte gegeben, so dass nie drei von ihnen auf einer Geraden liegen.
- a) Auf wieviele Arten können die Punkte durch einen offenen Streckenzug verbunden werden?
  - b) Auf wieviele Arten können die Punkte durch einen geschlossenen Streckenzug verbunden werden?
27. Auf wieviele Arten kann man 8 Autos in einem Garage mit 12 Plätzen parkieren?
28. Ist es möglich, 75 Telephonapparate so miteinander zu verbinden, dass jeder Apparat genau mit 9 andern Apparaten durch eine Leitung verbunden ist?
29. a) Wieviele Geraden sind durch  $n$  Punkte höchstens möglich?  
b) Wieviele Kreise sind durch  $n$  Punkte höchstens möglich?  
c) Wieviele Ebenen sind durch  $n$  Geraden höchstens möglich?
30. Sie würfeln mit 2 Würfeln. Wieviele verschiedene Resultate mit " $5 \leq \text{Augensumme} \leq 9$ " sind möglich?

## Uebungen - Praktikum Kap. 6 / 4

---

31. Bestimmen Sie die Anzahl Lösungen in natürlichen Zahlen der Gleichung

$$x + y + z + w = 1000$$

32. Beim Lotto haben Sie die Möglichkeit, aus 45 Zahlen 6 auszuwählen und anzukreuzen. Wieviele Möglichkeiten haben Sie?

33. Sie spielen Sporttoto. Für jedes der 13 aufgelisteten Spiele können Sie 1, x oder 2 tipen. Wieviele Möglichkeiten haben Sie?

34. Wieviele Möglichkeiten haben Sie beim Sporttoto, das Resultat von genau 11 Spielen richtig vorherzusagen?

35. Gegeben ist die Menge  $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, u\}$ . Wieviele Wörter mit drei verschiedenen Konsonanten und zwei verschiedenen Vokalen kann man mit den Buchstaben dieser Menge bilden?

36. Auf wieviele Arten kann man bei einem Schachturnier aus den zwölf Teilnehmern die sechs Paare der ersten Runde bilden?

37. Formulieren Sie selbst Kombinatorik-Aufgaben und präsentieren Sie die Lösungen!

---

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören. Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** zu kontrollieren.

1. Was ist (sind)
- a) ein "mathematisches Modell" ?
  - b) eine "algebraische Struktur" ?
  - c) die Grundprobleme in einem "mathematischem System" ?

2. Was ist
- a) ein "Verband" ?
  - b) ein "distributiver Verband" ?
  - c) ein "Boolescher Verband" ?

3. Zeigen Sie dass folgender Verband ein Boolescher Verband ist. (Hinweis: Hasse-Diagramm!)

$(V_k, \text{g.g.T.}, \text{k.g.V.})$ , wobei  $V_k = \{\text{Teiler von } k \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} / k \in \mathbb{N} \wedge n|k\}$   
und  $k = 30$ .

4. Wieviele Boolesche Algebren  $(V, \sqcap, \sqcup, \neg)$  mit  $|V| = 3$  gibt es ?

5. Was ist die Konsequenz aus dem Satz von Stone für Mengenverband, aussagenlogischer Verband, Schaltalgebra und Teilverband?

6. Überprüfen Sie mit Hilfe der Umformungsregeln der Schaltalgebra:

6.1.  $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$

6.2.  $x_1x_2 + x_3x_4 = (x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)$

6.3.  $(x_1 + x_1x_2)(x_1 + x_2x_3) = x_1$

6.4.  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)$

6.5.  $x_1 + \overline{x_1}x_2 = x_1 + x_2$

6.6.  $x_1(\overline{x_1} + x_2) + x_2(x_2 + x_3) + x_2 = x_2$

6.7.  $(x_1 + x_2)(x_1 + \overline{x_2})(\overline{x_1} + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = \emptyset$

6.8.  $x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2x_3\overline{x_3} = x_1x_3$

**Fortsetzung: Rückseite**

## Uebungen - Praktikum Kap. 7 / 2

---

Fortsetzung (6. Überprüfen Sie mit Hilfe der Umformungsregeln der Schaltalgebra:)

$$6.9. \quad (\bar{x}_1 + x_2)(x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_3)(x_4 + x_5)(x_3x_5 + \bar{x}_3\bar{x}_5)(\bar{x}_4 + x_1x_5) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5$$

$$6.10. \quad \overline{x_1 + x_2 + x_3} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$6.11. \quad \overline{x_1 x_2 x_3} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$$

$$6.12. \quad x_1x_2x_3 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = L$$

$$6.13. \quad \overline{x_1x_2 + x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2} = \bar{x}_1 x_2$$

$$6.14. \quad x_1x_2 + x_1\bar{x}_2 = x_1$$

$$6.15. \quad (x_1 + x_2)(x_1 + \bar{x}_2) = x_1$$

$$6.16. \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3\bar{x}_1 = x_1x_2 + x_3\bar{x}_1$$

$$6.17. \quad (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + \bar{x}_1) = (x_1 + x_2)(x_3 + \bar{x}_1)$$

7. Entwerfen Sie die Schaltbilder:

$$7.1. \quad f(x_1, x_2, \dots, x_7) = x_3 + x_1x_2(x_3x_4 + \bar{x}_3x_4 + (x_5(x_6 + x_7))) + x_2$$

$$7.2. \quad f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1\bar{x}_2} + x_3$$

$$7.3. \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2)(x_1x_3 + \bar{x}_1x_2)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

$$7.4. \quad f(x_1, \dots, x_5) = x_1(x_2 + x_5(x_4 + \bar{x}_2)) + x_3(x_5x_2 + x_4 + \bar{x}_2)$$

8. Darstellungsproblem: Suchen Sie mit Hilfe der adjunktiven Normalform den zugehörigen Booleschen Ausdruck!

$f(L, L, L)$	= L	Für die restlichen Argumente sind die Funktionswerte nicht vorgeschrieben.
$f(L, \emptyset, L)$	= L	
$f(L, L, \emptyset)$	= $\emptyset$	
$f(\emptyset, L, L)$	= $\emptyset$	
$f(\emptyset, L, \emptyset)$	= $\emptyset$	

9. a) Was ist eine "adjunktive Minimalform"?

b) Was ist ein "Primimplikant"?

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören. Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** zu kontrollieren.

10. *Minimalisierungsproblem:*

- a) *Welche Unterschiede bestehen zwischen Darstellungsproblem und Minimalisierungsproblem?*
- b) *Was hat die "Karnaugh-Methode" mit der Mengenlehre zu tun?*
- c) *Was für weitere Minimalisierungsmethoden gibt es?*

11. *Minimalisieren Sie nach Karnaugh (a.N.F. mit k.N.F. des Komplements vergleichen!):*

a) 2 Variablen:

11.1.  $a b + \bar{a} b$

11.2.  $a \bar{b} + \bar{a} b + \bar{a} \bar{b}$

b) 3 Variablen:

11.3.  $a b c + a \bar{b} c + \bar{a} b c + a b \bar{c} + \bar{a} b \bar{c}$

11.4.  $\bar{a} \bar{b} c + \bar{a} \bar{b} \bar{c}$

11.5.  $a b \bar{c} + \bar{a} b \bar{c}$

11.6.  $a \bar{b} c + \bar{a} \bar{b} \bar{c} + \bar{a} \bar{b} c + a \bar{b} \bar{c} + \bar{a} \bar{b} c$

11.7.  $a b \bar{c} + a \bar{b} \bar{c} + \bar{a} \bar{b} \bar{c} + \bar{a} b \bar{c}$

11.8.  $a b c + a \bar{b} c + a b \bar{c} + \bar{a} \bar{b} \bar{c}$

11.9.  $a b c + \bar{a} b c + a b \bar{c} + \bar{a} b \bar{c}$

11.10.  $a b c + \bar{a} b c + a b \bar{c} + \bar{a} b \bar{c} + \bar{a} \bar{b} c$

11.11.  $a b c + a \bar{b} c + a \bar{b} \bar{c} + \bar{a} \bar{b} \bar{c} + \bar{a} b \bar{c}$

11.12.  $a b c + a \bar{b} c + a b \bar{c} + a \bar{b} \bar{c} + \bar{a} \bar{b} \bar{c} + \bar{a} b \bar{c}$

**Fortsetzung: Rückseite**

## Uebungen - Praktikum Kap. 7 / 4

---

c) 4 Variablen:

$$11.13. \quad a \bar{b} c d + a \bar{b} c \bar{d} + a \bar{b} \bar{c} \bar{d} + a \bar{b} \bar{c} d$$

$$11.14. \quad a b c d + a b \bar{c} d + \bar{a} b c d + \bar{a} b \bar{c} d$$

$$11.15. \quad a b c d + a \bar{b} c d + a b \bar{c} d + a \bar{b} \bar{c} d$$

$$11.16. \quad a \bar{b} c d + \bar{a} \bar{b} c d + a \bar{b} c \bar{d} + \bar{a} \bar{b} c \bar{d} + a \bar{b} \bar{c} \bar{d} + \\ \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} + a \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} \bar{b} \bar{c} d$$

$$11.17. \quad a b c d + a \bar{b} c d + \bar{a} \bar{b} c d + \bar{a} b c d + a b \bar{c} d + \\ \bar{a} \bar{b} \bar{c} d + a \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} b \bar{c} d$$

$$11.18. \quad \bar{a} \bar{b} c d + \bar{a} b c d + a b c \bar{d} + \bar{a} b c \bar{d} + a b \bar{c} \bar{d} + \\ \bar{a} b \bar{c} d + \bar{a} \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} b \bar{c} d$$

$$11.19. \quad \bar{a} b c d + a \bar{b} c \bar{d} + \bar{a} \bar{b} c \bar{d} + a b \bar{c} \bar{d} + a \bar{b} \bar{c} \bar{d}$$

$$11.20. \quad a b c d + \bar{a} \bar{b} c d + a b c \bar{d} + a \bar{b} c \bar{d} + \bar{a} \bar{b} c \bar{d}$$

$$11.21. \quad a b c d + a \bar{b} c d + a \bar{b} c \bar{d} + \bar{a} b c \bar{d} + a \bar{b} \bar{c} d .$$

Dazu sind frei wählbar:  $a b \bar{c} d$ ,  $a \bar{b} \bar{c} \bar{d}$ ,  $\bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d}$ ,  
 $\bar{a} b c d$ ,  $\bar{a} b \bar{c} d$

d) 5 Variablen:

$$11.22. \quad a b c d e + \bar{a} \bar{b} c d e + a \bar{b} c \bar{d} e + \bar{a} \bar{b} c \bar{d} e + \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} e + \\ \bar{a} b \bar{c} d e + a b c d \bar{e} + \bar{a} b c d \bar{e} + a \bar{b} \bar{c} \bar{d} \bar{e} + \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} \bar{e} + \\ a b \bar{c} d \bar{e} .$$

Dazu sind frei wählbar:  $\bar{a} b c d e$ ,  $a \bar{b} \bar{c} \bar{d} e$ ,  
 $a b \bar{c} d e$ ,  $a \bar{b} c \bar{d} \bar{e}$ ,  $\bar{a} \bar{b} c \bar{d} \bar{e}$ ,  $\bar{a} b \bar{c} d \bar{e}$

---

**Bemerkung:** Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.  
*Falls möglich, sind die Resultate mit Mathematica zu kontrollieren.*