Uebungen - Praktikum Kap. 8 / 1 **Klasse: ....**

Thema des Kapitels: Elementare Zahlentheorie/ Zahlenalgebra ISB, WIR90

---

1. *Repetitionsaufgabe: Konstruieren Sie eine Schaltung (Boolsche Ausdrücke, Schaltbild), die*

   a) *2 einstellige Dualzahlen addiert*

   b) *2 zweistellige Dualzahlen addiert*

   b) *2 zweistellige Dualzahlen multipliziert*

   c) *3 einstellige Dualzahlen addiert*

2. *Was ist* a) *eine* kommutative Halbgruppe mit Einselement *?*

   b) *ein* Halbgruppenring *?*

3. a) *Was verstehen wir unter "Induktion in den Naturwissenschaften"?*

   b) *Was ist "vollständige Induktion"?*

   c) *Was sind die Schritte in einem Induktionsbeweis?*

4. *Beweisen Sie mit Hilfe der vorher bewiesenen Sätze und der Axiome von Peano die Kommutativität der Multiplikation.*

5. *Beweisen Sie folgende Aussage A(n):*

   A(n) $\equiv$ "n Geraden schneiden sich in einer Ebene in höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkten."

6. *Beweisen Sie die folgenden Aussagen (falls möglich):*

   6.1. $n \geq 5 \Rightarrow 2^n > n^2$ 6.2. $n^2 + n + 43 \in \mathbb{P}$

   6.3. $\forall_{n \in \mathbb{N}} : 6 | (7^n - 1)$ 6.4. $\forall_{n \in \mathbb{N}} : n | [n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3]$

7. *Beweisen Sie die folgende Aussage:*

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 8 / 2

8. *"Türme von Hanoi": Auf einem horizontalen Brett sind in Abständen 3 senkrecht stehende Stifte angebracht. Einer der Stifte dringt in n runde, ungleich grosse, in der Mitte gelochte Scheiben, die so aufeinender liegen, dass jeweils die nächst kleinere auf der nächst grösseren ruht. Nun will man die Scheiben durch aufspiessen auf die anderen Stifte so umschichten, dass nie eine grössere auf eine kleinere zu liegen kommt.*
Frage: *Wieviele Umlegungen sind nötig?*
Anleitung: *Lösen Sie das Problem in Reihenfolge zuerst für 1, 2, 3, 4, 5, 6 Scheiben. Sie erhalten eine Zahlenfolge, aus der sich dann die Formel für n Scheiben vermuten lässt. Beweisen Sie dann die Vermutung durch vollständige Induktion.*

9. *Beweisen Sie die Aussage:*

"In einem konvexen n-Eck gibt es $n(n-3)/2$ Diagonalen."

10. *Versuchen Sie zu beweisen:*

a) $\forall_{n \in \mathbb{N}}: \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

b) $\forall_{n \in \mathbb{N}}: \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{(2n+1)^2}{8}$

11.

$$\begin{aligned} 1\cdot 2 &= 2 &&= 6/3 \\ 1\cdot 2+2\cdot 3 &= 8 &&= 24/3 \\ 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4 &= 20 &&= 60/3 \\ 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5 &= 40 &&= 120/3 \end{aligned}$$

Suchen Sie das allgemeine Gesetz und beweisen Sie es.

12. *Was heisst* "wohlgeordnet" *?*

13. a) *Definieren Sie* "ggT" *und* "kgV" *zweier Zahlen* n_1 *und* n_2 .

b) *Beweisen Sie:* $ggT(n_1,n_2) \cdot kgV(n_1,n_2) = n_1 \cdot n_2$

14. *Wieso muss man die natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ *zu den ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ *erweitern?*

Bemerkung: Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

15. *Begründen Sie:* "Die Teilbarkeitsrelation ist reflexiv, transitiv, aber nicht unbedingt symmetrisch."

16. *Zeigen Sie, dass folgende Relation eine Aequivalenzrelation ist:*

$$(s, m) \sim (t, n) \Leftrightarrow m + t = s + n$$

17. *Begründen Sie:* $(\mathbb{N}, +, \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +, \cdot)$

18. *Beweisen Sie:* $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

19. *Definieren Sie folgende algebraische Strukturen und geben Sie Beispiele (Modelle):*

a) Halbgruppe
b) Gruppe
c) Ring
d) Integritätsbereich
e) Körper
f) Vektorraum

20. *Worin liegen die Bedeutungen der* Gruppen, *worin die der* Halbgruppen?

21. *Zeigen Sie, dass folgende Aussage wahr ist:*

$$\forall_{a \in \dot{\mathbb{Z}}} : (a\mathbb{Z}, +, \cdot) \ (\text{mit } a\mathbb{Z} := \{a \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}) \text{ ist Integritätsbereich}$$

22. *Worin unterscheiden sich* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *von* $(a\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $(a \neq 0 \lor a \neq 1)$?

23. *Seien* **x** *und* **y** *beliebig* $\in \mathbb{Z}$. *Suchen Sie die von* x *und* y *unabhängigen Teiler von folgendem Ausdruck:*

$$10'010\ x + 97'461\ y\ .$$

24. *Begründen Sie, wieso es nicht nur endlich viele Primzahlen geben kann!*

25. *Erstelle Sie ein* ***Computerprogramm****, das Ihnen etwa die ersten* "1000" *Primzahlen berechnet. Nach welchem Gesetz verhält sich wohl "****die Anzahl der Primzahlen bis zur Zahl n*** " ? *Hinweis: Versuchen Sie es mit einer graphischen Darstellung!*

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 8 / 4

26. *Bestimmen Sie* ***g.g.T.*** *und* ***k.g.V.*** *folgender Zahlenpaare:*

    a) (10'010, 97'461) b) (758, 242) c) (999638, 44032)

    Benutzen Sie den ***Algorithmus von Euklid.***

27. *Hat die folgende Gleichung ganzzahlige Lösungen?* $m \cdot 41 + n \cdot 59 = 1$

28. *Suchen Sie* $x \in \mathbb{N}$ *minimal so, dass die folgende Gleichung eine ganzzahlige Lösung hat:*

    $$m \cdot 127 + n \cdot 552 = x$$

29. a) *Was ist ein* Hauptideal *?*

    b) *Was ist die* "lineare Hülle $\overline{M}$ einer Menge von ganzen Zahlen" *?*

    c) *Sei* $M = \{r, s, t\} \subset \mathbb{Z}$. *Zeigen Sie:* $\exists_{n \in \mathbb{Z}} : \overline{M} = n \cdot \mathbb{Z}$

    d) *Sei* $M = \{12, 16, 20\}$. *Berechnen Sie* n *mit* $\overline{M} = n \cdot \mathbb{Z}$!

30. *Berechnen Sie* x :

    30.1. $89 \equiv 25 \pmod{x}$ 30.2. $89 \equiv 1 \pmod{x}$

    30.3. $153 \equiv -7 \pmod{x}$ 30.4. $10101 \equiv x \pmod{13}$

31. *Ist die folgende Aussage wahr?*

    $$[a \equiv b \pmod{m} \ \wedge \ ggT(c, m) = t \ \wedge \ m = k \cdot t] \Rightarrow$$
    $$\Rightarrow [\, a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{k} \,]$$

32. a) *Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstafeln auf von* $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_8$.

    b) *Lösen Sie jeweils die Gleichung:*

    b1) $[3] \circ [x] = [4]$ b2) $[4] \circ [x] = [4]$

    b3) $[4] \circ [x] = [5]$ b4) $[3] \circ [x] = [5]$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 8 / 5 **Klasse: ....**

Thema des Kapitels: Elementare Zahlentheorie/ Zahlenalgebra ISB, WIR90

---

33. *Suchen Sie aus der Multiplikationstafel von* $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ *die* Nullteiler *heraus!*

34. *Suchen Sie eine Klasse von* $n \in \mathbb{N}$, *für die gilt:*

$$\forall_{(a,\ b) \in \mathbb{N}^2} : \quad (a + b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{n}$$

Hinweis: Was ist mit den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ *los für* $n = p \in \mathbb{P}$ *?*

35. *Prüfen Sie nach, ob die folgende Aussage wahr ist:*

$$p \in \mathbb{P} \wedge a \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad a^p \equiv a \pmod{p}$$

Hinweis: $a^p = (1+1+\ldots+1)^p = [1+(1+\ldots+1)]^p \equiv 1^p + (1+\ldots+1)^p \equiv 1+\ldots+1$ $\pmod{p}$, A. 34

36. *Zeigen Sie mit Hilfe von* Aufgabe 35 *:*

$$a \in \dot{\mathbb{Z}} \wedge p \in \mathbb{P} \quad \Rightarrow \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

37. *Welche der folgenden Aussagen sind falsch? Und wenn ja, wieso?*

a) $(x - 3)(x + 4) = 0$ b) $(x - 3)(x + 4) \equiv 0$

c) $x^2 + 1 = 0$ d) $x^2 + 1 \equiv 0$

e) $(x^2 + 1) \equiv 0 \pmod{n}$ f) $(x^2 + 1) \equiv 0$

38. 38.1. *Ist* $\{p(x)$ Polynom über $\mathbb{Z}\}$ *ein* Integritätsbereich *?*

38.1. $x^2 - 3x + 2 + p(x) \equiv x^3 - 2x + 8$ $p(x) = ?$

38.2. $(x + 5)\, p(x) \equiv x^3 - 3x^2 - 25x + 75$ $p(x) = ?$

38.3. $(x + 5)\, p(x) \equiv x^2 - 5x + 25$ $p(x) = ?$

39. *Berechnen Sie* x *:*

39.1. $x^2 - 13x + 5 \equiv -17 + 22x \pmod{11}$

39.2. $5x + 1 \equiv 4 \pmod{80}$

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 8 / 6

40. *Beweisen Sie:*

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} : \quad q^n - 1 = (q^{n-1} + q^{n-2} + ... + q^2 + q + 1)(q - 1)$$

41. *Verwandlung in andere Zahlensysteme:*

41.1. Verwandeln Sie 4156988_{10} ins Dual-, Oktal- und Hexadezimalsystem.

41.2. Verwandeln Sie 4931_{10} ins Binär-, 16-er- und 8-er-System.

42. *Rechnen in anderen Zahlensystemen (berechnen Sie von Hand):*

42.1. $1001101_2 + 101101_2$

42.2. $1111010_2 - 1001101_2$

42.3. $110110_2 \cdot 110011_2$

42.4. $1011_2 : 11_2$ (Rest lassen)

42.5. $10111000_2 + 00111011_2$

42.6. $1011011_2 - 1001111_2$

42.7. $1100110 \cdot 10101$

42.8. $35721_8 + 674232_8$

42.9. $8F97_{16} + D44C_{16}$

42.10. $163E3_{16} - D44C_{16}$

42.11. $568_{10} + 568_{16}$

42.12. $6AE_{16} - 1710_8$

43. *Exkurs in die Informatik: Was bedeuten die folgenden Begriffe (Auswahl) ?*

43.1. Binärer Blockcode

43.2. Gepackter Dezimalcode

43.3. Dualer Festpunktcode

43.4. Einer-, Zweierkomplementierung

43.5. BCD-Darstellung

43.6. Sedezimaler Gleitpunktcode

44. a) *Wieso muss man das System der ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen erweitern?*

b) *Wie geschieht diese Erweiterung und was ist eine* "rationale Zahl" *?*

45. *Zeigen Sie, dass die folgende Relation eine Äquivalenzrelation ist:*

$$(s, m) \sim (t, n) :\Leftrightarrow s \cdot n = m \cdot t$$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

46. *Was bilden die rationalen Zahlen mit "plus" und "mal"* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *algebraisch für eine Struktur? Welche Gesetze gelten da?*

47. *Lösen Sie in* $\mathbb{Q}$ *:*

$$\frac{(2x + 4)^2}{(x - 2)} + 3 < 4(x - 2)$$

48. *Was bedeutet:* "Die rationalen Zahlen sind **dicht**?"

49. a) *Ist jede rationale Zahl nach irgend einer Basis immer in einen periodischen Bruch entwickelbar?*
    b) *Ist jeder periodische Bruch eine rationale Zahl?*

    c) *Ist ein Kettenbruch immer eine rationale Zahl?*

50. *Es ist* $3^2 + 4^2 = 5^2$, *d.h.* $9 + 16 = 25$. *Ein solches Zahlentrippel wie* $(3, 4, 5)$ *heisst* ***pythagoräisches Zahlentrippel.*** *Gelingt es Ihnen eine Formel zu entdecken, nach der sich beliebig viele verschiedene soche Trippel erzeugen lassen?*

51. *Was hat der* **goldene Schnitt** *mit den Kettenbrüchen zu tun?*

52. *Was bedeutet* "die rationalen Zahlen haben **Lücken**" *?*

53. *Was ist ein* "Dedekindscher Schnitt" *?*

54. *Demonstrieren Sie, dass gilt:* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

55. *Wie verhalten sich die Mächtigkeiten von* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{R}$ *? Wie argumentieren Sie?*

56. *Was ist eine* ε*-Umgebung eines Punktes?*

57. *Definieren Sie die Begriffe:* a) Nullfolge

    b) " $\langle a_n \rangle \to a$ " (Konvergenz)

Fortsetzung: Rückseite

58. *Kontrollieren Sie, ob folgende Folgen Nullfolgen sind:*

58.1. $\dfrac{(n^3 + 2n^2 - n - 1/n^2)}{(n^2 - 1)(n^2 + 1) + 2}$ 58.2. $1/\sqrt{2}$

59. *Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:*

59.1. $<2^n/n + 3>$ 59.2. $<(3n^2 - 2n^5 + 7)/n^5>$

59.3. $<x + x^2/2>$ 59.4. $<(3 + 2n)/\sqrt{n^2 + 1}>$

59.5. $<\sqrt{n + 1}/(n + 1)>$ 59.6. $<(1 + \sin(n))/n>$

60. *Stimmt die folgende Behauptung?* "$<a_n>$ Nullfolge $\Leftrightarrow$ $<|a_n|>$ Nullfolge"

61. *Formulieren Sie das Kriterium von Cauchy!*

62. *Was ist ein Häufungspunkt?*

63. *Untersuchen Sie, ob die folgende Folge konvergiert:*

$<1/10+2/10^2+3/10^3+4/10^4+...+8/10^8+9/10^9+0+1/10^{10}+2/10^{11}+...+9/10^{18}+0/10^{19}+$
$+0+2/10^{20}+3/10^{21}+...+9/10^{27}+0/10^{28}+1/10^{29}+0+3/10^{30}+4/10^{31}+...>$

64. *Sei* $a_n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n-1}$

Zeigen Sie: a) $<a_n>$ konvergiert für $|q|<1$, $a_n \rightarrow 1/(1-q)$

b) $1 + 0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 + 0.5^4 + ... \rightarrow ?$

65. *Berechnen Sie falls möglich den Grenzwert!*

65.1. $a_n = (1/n^2 + 1)(3 + 2/n^2 + 1/\sqrt{n})$ 65.2. $a_n = a^n/n!$

65.3. $a_n = \cos(1/n)$ 65.4. $a_n = n^{1/n}$ 65.5. $a_n = 9^{(2+3n)/n^2}$

65.6. $a_n = \sin(\cos(\sin(1/n)))$ 65.7. $a_n = 3^{\sin(1+1/n)}$

65.8. $a_n = [\cos(1/n)]^{\sin(1/n)}$ 65.9. $a_n = 7^n/(2\cdot n!) \cdot 9^{1/n} + 1/n$

<u>Bemerkung:</u> **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 8 / 9

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Elementare Zahlentheorie/ $\mathbb{R}$/ Grenzwerte — ISB, WIR90

---

66. *Was bedeutet die Aussage:* "f(x) hat für $x \to x_o$ einen Grenzwert y_o" *?*

67. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls möglich!*

67.1. $\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$ — 67.2. $\lim_{x\to 2} \sin(x)$

67.3. $\lim_{x\to\infty} \sin(x)/x$ — 67.4. $\lim_{x\to\infty} (x + 2)/x$

67.5. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x(2 + x^2)}{x^2}$ — 67.6. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \dfrac{1}{x} + 2x \left(\dfrac{1}{x + 3} \right)$

68. *Entscheiden Sie, ob* $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x)$ *ist.*

68.1. $f(x) = [x]$ — 68.2. $f(x) = |1/x|$

68.3. $f(x) = \sqrt{|x|}$ — 68.4. $f(x) = |x^3|$

68.5. $f(x) = \tan(x) \cdot \mathrm{ctg}(x) + \sin(x) + \cos(x)$

68.6. $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) + \tan(x) \cdot \mathrm{ctg}(x)$

68.7. $f(x) = [\sin(x)]^{\tan(x)}$ — 68.8. $f(x) = [\cos(x)]^{\tan(x)}$

69. *Berechnen Sie und kontrollieren Sie nötigenfalls mit* ***Mathematica:***

69.1. $\lim_{x\to 0} 1/\cos(x)$ — 69.2. $\lim_{x\to 0} x/\cos(x)$

69.3. $\lim_{x\to 0} x/\tan(x)$ — 69.4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$

69.5. $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin(x)$ — 69.6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 + 5x^2 - 10x + 2}{2x^3 - 100^{100}\, x^2}$

69.7. $\lim_{x\to 0} (x^3 - 1)/(x - 1)$ — 69.8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{x}$

69.9. $\lim_{x\to 0} x/4x^3$ — 69.10. $\lim_{x\to 0} 3x/5x$

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 8 / 10

70. *Sei* $f(x) = 1 + \frac{5x}{2 + x^2}$. *Berechnen Sie* $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{1 - x}$.

71. *Berechnen Sie durch Faktorisierung:*

71.1. $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^{27}}{1 - x}$

71.2. $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^n}{1 - x}$

72. *Definieren Sie:* a) stetig b) linksseitig stetig c) stückweise stetig d) gleichmässig stetig

73. *Auf welcher Definitionsmenge sind die folgenden Funktionen stetig?*

73.1. $f(x) = x$

73.2. $f(x) = \sin(x)$

73.3. $f(x) = +\sqrt{x}$

73.4. $f(x) = 1/x$

73.5. $f(x) = 1/(x^2 + 1)$

73.6. $f(x) = 1/\sin(x)$

73.7. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{(x - 2)(x + 3)(x - 7)}$

73.8. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

73.9. $f(x) = [x]$

73.10. $f(x) = 1/\cos([x])$

73.11. $f(x) = \tan(x)$

73.12. $f(x) = \tan([x])$

73.13. $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^3 - 3x^2 + 2x - 1}$

74. *Was ist die* Zwischenwerteigenschaft *stetiger Funktionen?*

75. *Wo sind die folgenden Funktionen unstetig?*

75.1. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{x^2 - x}$

75.2. $f(x) = \tan(x) \cdot (\sin(x) + \cos(x))$

75.3. $f(x) = \frac{1}{\cos(x)} + \frac{1}{\sin(x - 2)}$

75.4. $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < -4 \\ |x| & \text{für } x \geq -4 \end{cases}$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 8 / 11

Klasse: ....

Thema des Kapitels: $\mathbb{R}$/ Grenzwerte/ $\mathbb{C}$

ISB, WIR90

---

76. *Repetitionsaufgabe:*

a) Berechnen Sie das Inverse von $[7]$ in $(\mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$

b) Berechnen Sie das Inverse von $[39]$ in $(\mathbb{Z}_{41}, +, \cdot)$

Hinweis zu b): Kleiner Fermatscher Satz!

77. *Wo ist die folgende Funktion unstetig?*

$$f(x) = \begin{cases} [x] & x < -9 \\ |[x]| & -9 \leq x < -6 \\ |x| & -6 \leq x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \end{cases}$$

78. *Definieren Sie die folgenden Begriffe:*

a) Untere Grenze

b) Obere Grenze

c) Infimum

d) Supremum

e) Minimum

f) Maximum

g) Absolutes Minimum

h) Absolutes Maximum

i) Relatives Mimimum

j) Relatives Maximum

79. *Was lässt sich über eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall sagen?*

80. *Begründen Sie die Aussage:* "Jede ungerade Funktion hat mindestens eine Nullstelle."

81. *Versuche sie, eventuelle Minima und Maxima zu finden!*

81.1. $f(x) = 1/x$

81.2. $f(x) = 1/x\ ,\quad I = [-3, -1]$

81.3. $f(x) = \cos(x)$

81.4. $f(x) = (x - 1)(x - 3)$

81.5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 6}{x^2 + x - 2}$

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 8 / 12

82. *Berechnen Sie:*

82.1.	$3.14159^2 \cdot 3.14159^2$	82.2.	$(3.14159^2)^2$
82.3.	$3.14159^{318} \cdot 3.14159^{-320}$	82.4.	$(3.14159^{-2})^4$
82.5.	$(1/3.14159)^5$	82.6.	$(-3.14159)^{3/4}$
82.7.	$((-2.157)^5 \cdot (-2.5)^2\ )^{1/2}$	82.8.	$3.14159^{1/3} \cdot 2.5^{1/3}$
82.9.	$9^{2+1/2}$	82.10.	$(3.14159^{11/17})^{13/5}$
82.11.	$((\Pi)^{11/17})^{\Pi}$	82.12.	$(e^e)^{1/e} \cdot e^{(e^{1/e})}$

83. *Berechnen Sie* e *so genau wie möglich* (**Mathematica!**) *und schauen Sie, ob Sie eine Periode entdecken können.*

84. *Was ist die Eulersche Exponentialfunktion? Was ist der natürliche Logarithmus?*

85. *Lösen Sie:* $x^3 - 7x^2 - 58x + 280 = 0$

86. a) *Was ist eine komplexe Zahl?*

b) *Wieso ist es notwendig,* $\mathbb{C}$ *einzuführen?*

c) *Was bildet* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *für eine Struktur?*

87. *Berechnen Sie:*

87.1. $z = (4 - 7i) + 3 + 2(-i) - 6 + 2i - (5 - i\,4)$ $\quad Re(z) = ?\ ,\ Im(z) = ?$

87.2. $w = (1 - i)\, i + i - (-1 + i) + (1 - 2i)$ $\quad |w| = ?\ ,\ w/z = ?$

87.3. $v = i \cdot i^2 \cdot i^3\, (1 + i)(1 - i) = ?$

87.4. $(1 + i)(1 - i)(1 - 2i)(2 + i) = ?$

87.5. $|((4i - 2 + 6)\, i - 2i)| = ?$

87.6. $(3 + 2i)^{-1} = ?$

Bemerkung: Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

---

88. *Lösen Sie die Gleichung* $6x^2 - 5x + x = -12 - 4x$

89. *Berechnen Sie:* $\overline{(1 + i)}\,\overline{(1 - i)}(4 - 2i)\overline{(2 + i)} = ?$

90. a) $z = 3 + 2i = r \operatorname{cis}(\phi) \qquad r = ?\,,\quad \phi = ?$

    b) $z = x + iy = 6.5 \operatorname{cis}(11.2) \qquad x = ?\,,\quad y = ?$

91. *Zeigen Sie:* a) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

    b) $\operatorname{Arg}(z_1 - z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)$

    c) $z^n = [r\,(\cos(\phi) + i \sin(\phi)]^n = r^n\,(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$

92. *Stellen Sie graphisch dar:*

91.1.	$(3 + 2i) + (4 + i)$	91.2.	$(-2 - 3i) - (2 + 2i)$
91.3.	$(3 - 2i) - (-2 + i)$	91.4.	$(-2 + i) + (-3 - 4i)$
91.5.	$(1/2 + 1/3\, i)(2 + 3i)$	91.6.	$(0.6 + 0.8i)(0.7 - 0.4i)$
91.7.	$(-2 + 2i)(-2 + 2i)$	91.8.	$(-2 + 2i)(-2 - 2i)$

93. a) *Was ist eine* Einheitswurzel *?*

    b) *Was ist eine* primitive *Einheitswurzel?*

94. *Entwickeln Sie die ersten 8 Einheitswurzeln aus den primitiven Einheitswurzeln und stellen Sie die Sache graphisch dar.*

95. *Vereinfachen Sie:*

95.1.	$1/i$	95.2.	$1 + i)/(2 - i)$	95.3.	$(3 - 4i)^{1/5}$
95.4.	$z^5 = i,\quad z = ?$	95.5.	$(2 + i)(3 + i)/(2 + 3i)$	95.6.	$\sqrt[7]{2 - 3i}$

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 8 / 14

96. *Sei* $z = 1 + i$, $b = 2 - i$. *Berechnen Sie und zeichnen Sie in ein Koordinatensystem:*

a) z^3 b) $z^3 - b$ c) $b\,(z^3 - b)$

d) $[b\,(z^3 - b)]^{1/5}$ e) $b + [b\,(z^3 - b)]^{1/5}$

97. *Sei* $z = r\,\mathrm{cis}(\phi)$, $r = 1$, $\phi = n\Pi/8$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 15$.
Berechnen Sie die 16 Zahlen

$$w = -1/(z - i)$$

und zeichnen Sie die Punkte.

98. *Repetitionsaufgabe: Was ist eine* transzendente *Zahl?*

99. *Repetitionsaufgabe: Lösen Sie allgemein* $x \cdot 4 \equiv 8 \bmod 30$.

100. *Kann man die komplexen Zahlen ins 3-dimensionale erweitern? Wie heisst die nächste Erweiterung?*

101. a) *Was sagt der Fundamentalsatz der Algebra?*

b) *Was sagt der Satz aus, wenn* P(x) *lauter reelle Koeffizienten hat?*

c) *Kann man mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra eine Gleichung vom Grade* ≥ 5 *lösen?*

102. *Berechnen sie die Partialbruchzerlegung:*

102.1. $$\frac{3x^4 + 21x^3 + 6x^2 + 9x - 3}{3x^4 - 3}$$

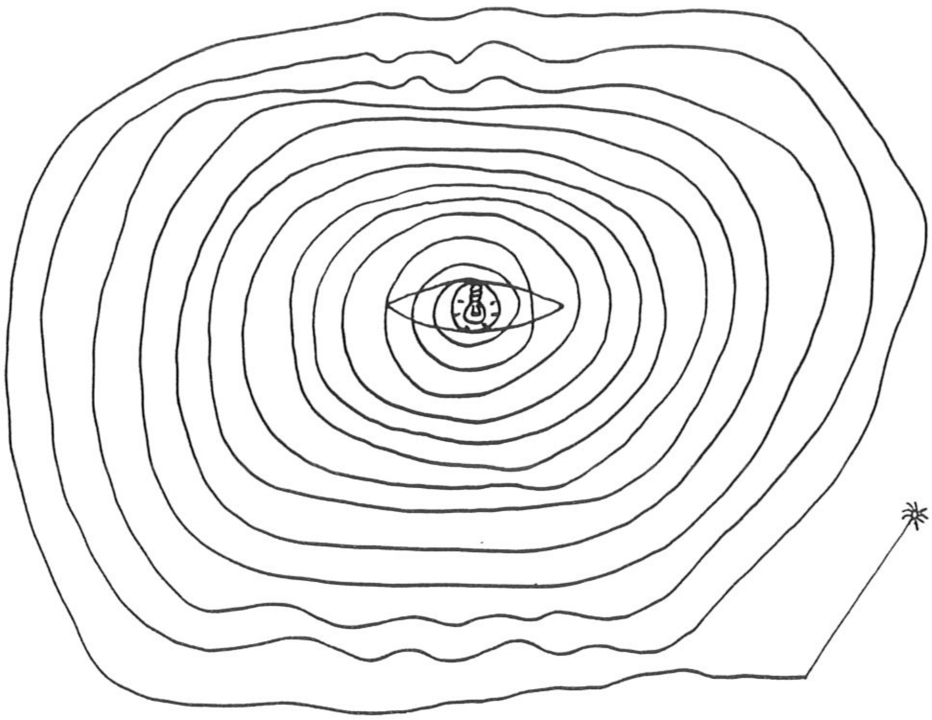
102.2. $$\frac{2x^3 - 1}{x^2 - x + 6}$$

102.3. $$\frac{x^6}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$$

102.4. $$\frac{x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 4)(x + 2)}$$

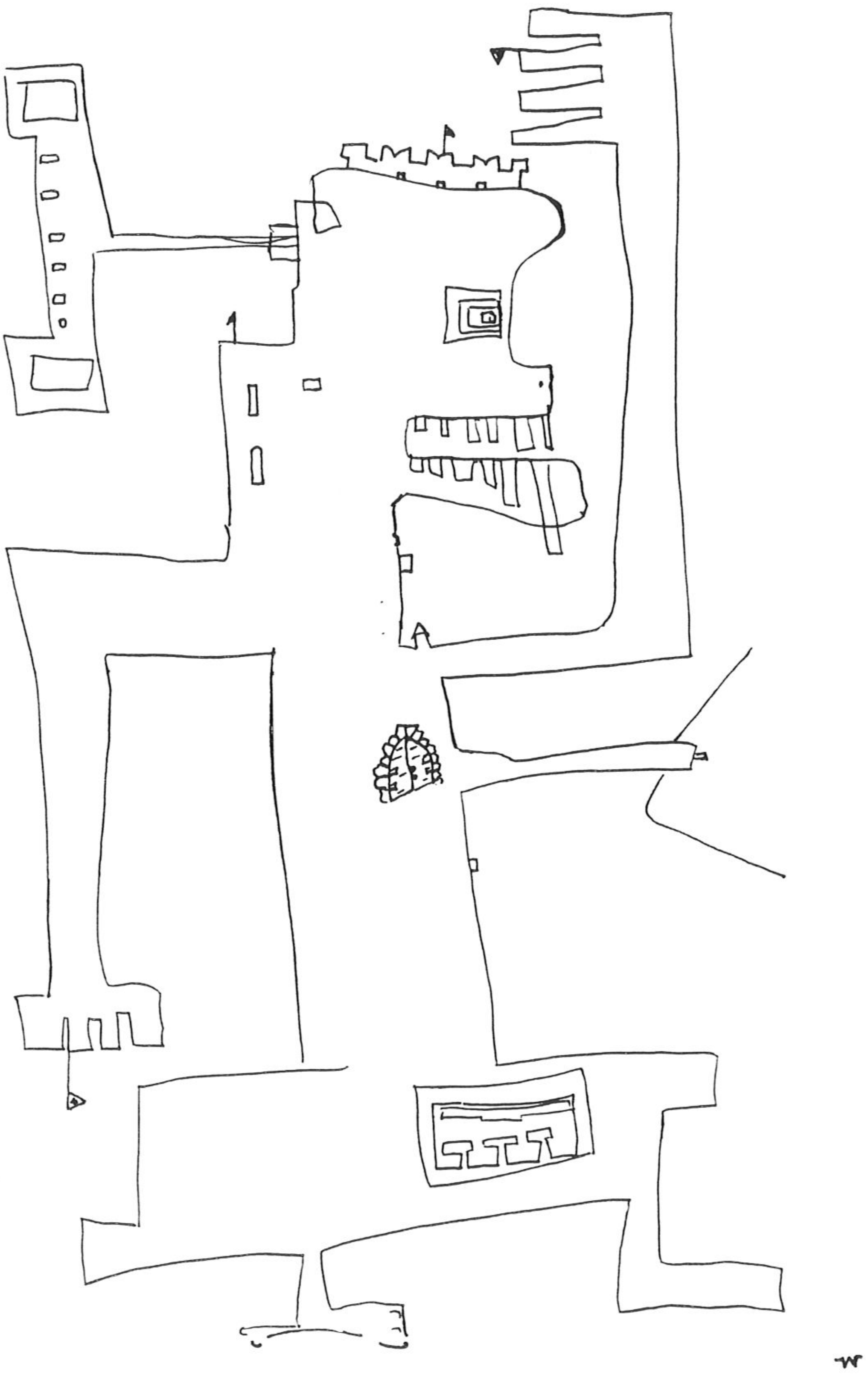
102.5. $$\frac{x + 6}{x^2 + 4x - 12}$$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*



Der Lichtblick am Ende des Tunnels

-w-



Wo hat der Schlösselmensch
den Computerschlüssel?
verschlisselt?

Uebungen - Praktikum Kap. 9 / 1

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Differentialrechnung mit einer Variablen — ISB, WIR90

---

1. *Wie sind die folgenden Begriffe definiert?*

a) Ableitung in x_o	b) Ableitungsfunktion
c) Differenzenquotient	d) Differentialquotient
e) Tangente an eine Kurve	f) Infinitesimalrechnung
g) Glatter Kurvenpunkt	h) Sprungstelle
i) Knickstelle	j) Höhere Ableitung
k) Linksseitig differenzierbar	l) Differenzierbar im Intervall I

2. *Wo ist folgende Funktion differenzierbar?* $f(x) = |x| \ , \quad x \in \mathbb{R}$

3. *Entscheiden Sie, wo die Funktion differenzierbar, rechtsseitig diff'bar oder linksseitig diff'bar ist (Graphik betrachten genügt):*

3.1. $f(x) = 3\sqrt{(x-2)^2}$

3.2. $f(x) = \begin{cases} x\ , & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

3.3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \\ (x-2)^2, & x \geq 1 \end{cases}$

3.4. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\ , & x < 1 \\ -x^2 + 1\ , & x \geq 10 \end{cases}$

4. *Berechnen Sie f '(x):*

4.1. $f(x) = x^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

4.2. $f(x) = x^r, \quad r = 1/n, \quad n \in \mathbb{N}$

5. $f(x) = x^r, \quad r \in \mathbb{R}$. *Was passiert mit der Tangente oder wie verhält sie sich für* $x = 0$ *?*

6. *Berechnen Sie f '(x) !*

6.1. $f(x) = 7x^9 + 3x^5 - 2x^2 + 1$

6.2. $f(x) = 8x^2 - 4x^{-2} + x^{-1}$

6.3. $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_1 x^1 + \alpha_0$

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 9 / 2

7. *Berechnen Sie die Ableitung und kontrollieren Sie mit* **Mathematica**. *Skizzieren Sie die Graphen von f und f' !*

7.1. $f(x) = 9x^6 + 11x^4 - 2x^3 + 9$ 7.2. $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

7.3. $f(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

7.4. $f(x) = -\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - x + 1$

8. *Berechnen Sie die Ableitung:*

8.1. $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x - 8)(x^2 - 4x + 11)$

8.2. $f(x) = (x^5 - 6)(x^6 + 8)$ 8.3. $f(x) = (x^3 - x)(x^{11} + 9)$

9. *Berechnen Sie die Ableitung:*

9.1. $f(x) = 1/x$ 9.2. $f(x) = 1/(x-1)$

9.3. $f(x) = \dfrac{1}{x - a}$ 9.4. $f(x) = \dfrac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 3)}$

9.5. $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}$ 9.6. $f(x) = \dfrac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 1)(x - 3)}$

10. *Berechnen Sie die Ableitung:*

10.1. $f(x) = (3x - 2)^{15} + (3x - 2)^6$

10.2. $f(x) = 4(-6x^2 - 14x + 37)^2 - 2(-6x^2 - 14x + 37) + 37 - (14x)^{14}$

10.3. $f(x) = ((0.5x + 4)(0.5x - 4))^{431} - (0.5x + 4)$

11. *Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion, falls möglich (gegebenenfalls Intervalle beschränken):*

11.1. $f(x) = x^2 + 2$ 11.2. $f(x) = 1/x^2$ 11.3. $f(x) = 2x - 1$

11.4. $f(x) = 1/x$ 11.5. $f(x) = 5\sqrt{x}$ 11.6. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 9 / 3

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Differentialrechnung mit einer Variablen ISB, WIR90

---

12. *Berechnen Sie die Umkehrfunktion und suchen Sie die Ableitung:*

    12.1. $f(x) = x^{-2} + x^{-1}$ 12.2. $f(x) = 6\sqrt{x^2 - 3}$

13. $f(x) = 2\,x^2 \;\wedge\; g(x) = 3^{-1}\,(2x)^{(2^{-1})} \;\Rightarrow\; f\,[g \circ f^{-1}]' = ?$

14. a) *Was ist die Ableitung der Logarithmusfunktion?*

    b) *Wann existiert diese Ableitung?*

15. *Berechnen Sie:*

    15.1. $[\ln(x - a)]'$ 15.2. $[\ln(x^2 + 2x - 3]'$

    15.3. $[\ln(\frac{1}{1 - x})]'$ 15.4. $[4x^2\,\ln(x) - 7]'$

    15.5. $[8x + (7x^2 - 6)\,\ln(7x^2 - 6) - \frac{8x + 3}{7x^2 - 8}\,\ln(x)]'$

16. a) *Wann existiert die Ableitung von* $f(x) = a^x$ *?*

    b) *Wie gross ist diese Ableitung?*

17. a) *Wann existiert die Ableitung von* $\log_a(x)$ *?*

    b) *Wie gross ist diese Ableitung?*

18. *Berechnen Sie* $f'(x)$ *und skizzieren Sie den Graphen von* f *und von* f'.

    18.1. $f(x) = (x^2\,e^x)$ 18.2. $f(x) = \log_a(x^2)$

    18.3. $f(x) = e^{x^2}$ 18.4. $f(x) = \ln|x|$

    18.5. $f(x) = e^{x \cdot \ln(x^2)}$ 18.6. $f(x) = \frac{1}{|x|}$

19. *Berechnen Sie die Ableitungen von* Sinh(x), Cosh(x), Tanh(x), Ctgh(x) *und der Area-Funktionen!*

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 9 / 4

20. *Berechnen Sie die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen* cos(x), tan(x), ctg(x) *aus der bekannten Ableitung von* sin(x) *!*

21. *Berechnen Sie:*

21.1. $\left[\sin^2(x^4) - \cos\sqrt{x} + \tan^2(x)\right]'$

21.2. $\left[e^{\sin^2(8x)}\right]'$

21.3. $\left[\dfrac{1}{\sin(x)} + \sin(x) \cdot \cos(x) + \ln(\tan(x))\right]'$

22. *Berechnen Sie die Ableitungen der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, d.h. von* ancsin(x), arccos(x), arctan(x), arccot(x) *!*

23. *Berechnen Sie:*

23.1. $\left[(\arccos(x^2))^{0.5}\right]'$

23.2. $\left[\arcsin(x) \cdot \arccos(x^2) - \arctan(x^{-1})\right]'$

24. *Vermischte Aufgaben: Berechnen Sie die Ableitung und kontrollieren Sie mit* ***Mathematica****!*

24.1. $f(x) = \dfrac{1}{(ax^2 + bx + c)^5}$

24.2. $f(x) = x^{-2} \ln(-x)$

24.3. $f(x) = \dfrac{7x\ e^x}{\sqrt[\pi]{e^{\mathrm{ch}\sqrt{x}}} + \sqrt[e]{e\ x^3} - \ln(x^{6/7})}$

24.4. $f(x) = (3^x)^{\ln(2x)}$ für $x = 2$

24.5. $f(x) = \dfrac{0 \quad 2 \;\, x^{1/4}}{\ln(x^{0.5})}$

24.6. $f(x) = \sqrt{c^{\sin(x)}} - (c^{\sin(x^2)})^5$

24.7. $f(x) = e^{\arctan(1/x)}$

27. *Berechnen Sie* f'(x), *vorausgesetzt dass gilt:* $F(x, y) = F(x, f(x)) \equiv 0$ *!*

27.1. $F(x, y) = x\,y + x^2 - 6y + 4$

27.2. $F(x, y) = \ln(y) - 2x^3 + 1$

27.3. $F(x, y) = e^y + y\,x^2 - \sin(x\,y) + y - x$

27.4. $F(x, y) = \dfrac{\cos(x)}{2} + x$

27.5. $F(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$

27.6. $F(x, y) = e^{x\,y} \cos(x\,y^2)$

Kann man diese Ableitungen immer als geschlossen einfachen Ausdruck berechnen?

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 9 / 5

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Differentialrechnung mit einer Variablen ISB, WIR90

---

28. *Bestimmen Sie die ersten 5 Ableitungen und kontrollieren Sie mit* ***Mathematica:***

28.1. $f(x) = \sin(x)$	28.2. $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
28.3. $f(x) = e^x$	28.4. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$
28.5. $f(x) = x^7$	28.6. $f(x) = \ln(x)$
28.7. $f(x) = 7x^6 - \cos(x) - e^{5x}$	28.8. $f(x) = x^5$
28.9. $f(x) = \sin(x^2)$	28.10. $f(x) = \tan(x^2)$

29. *Gegeben sind* $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $x_o = 0$. *Berechnen Sie in* x_o *:*

a) Steigungswinkel	b) Tangentengleichung
c) Normalengleichung	d) Nullstellen der Tangente
e) Nullstelle der Normalen	f) y-Achsenabschnitt der Tangente

30. *Versuchen Sie, mit Hilfe der Tangentenmethode die kleinste Nullstelle der in* 29. *gegebenen Funktion zu approximieren!*

31. *Repetitionsfragen: Was ist:*

a) der Satz von Rolle	b) der Mittelwertsatz der Differentialrechnung
c) ein globales Maximum von f	d) ein lokales Minimum von f
e) ein Randmaximum vonf	f) ein Extremum von f
g) ein Terrassenpunkt von f	h) ein Wendepunkt von f ???????

32. *Suchen Sie falls möglich die Extremwertstellen von f (Kontrolle mit* ***Mathematica!****):*

32.1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$	32.2. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 1$
32.3. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 5$	32.4. $f(x) = \cos(x)$
32.5. $f(x) = \sin^2(x)$	32.6. $f(x) = \sin(x^2)$
32.7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$	32.8. $f(x) = e^x$

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 9 / 6

33. *Bestimmen Sie Extremalwertstellen und Wendepunkte (Kontrolle mit* ***Mathematica****!):*

33.1. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ 33.2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

33.3. $f(x) = \sin(x)$ 33.4. $f(x) = x^4 - x^2 - x$

33.5. $f(x) = e^{-x} - x + x^{0,5}$ 33.6. $f(x) = \sin(x) \cdot \mathrm{cox}(x)$

34. *Diskutieren Sie die folgende Funktion:*

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

35. *Diskutieren Sie die Eigenschaften der folgenden Funktionen und kontrollieren Sie mit* ***Mathematica****:*

35.1. $f(x) = e^x$ 35.2. $f(x) = e^{\sin(x^2)}$

35.3. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ 35.4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2}(x - 1)\ln(\dfrac{1-x}{2})$

35.5. $f(x) = e^{-x^2}$ 35.6. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8x + 7}{6x^2 - 2x + 8}$

35.7. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{(x - 2)(x - 3)}$ 35.8. $f(x) = 7x^2 - 8x + 9, \quad I = (-3, 18)$

36. *Untersuchen Sie und berechnen Sie gegebenenfalls:*

36.1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ 36.2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x + e^{-x} - 3}{2x - \ln(1 + x)}$

36.3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ 36.4. $\lim\limits_{x \to 0} x^n \cdot \ln(x)$

36.5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\alpha\, x^2}$ 36.6. $\lim\limits_{x \to 0} x^x$ (Hinweis: $x = e^{\ln(x)}$)

36.7. $\lim\limits_{x \to 0} x^{(1/x)}$ 36.8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^n - x_o^n}{x^m - x_o^m}$

36.9. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x)/x$ 36.10. $\lim\limits_{x \to 0} 1/\sin(x) - 1/x$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.** *Falls möglich, sind die Resultate mit* **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 10 / 1

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Integralrechnung mit einer Variablen

ISB, WIR90

---

1. *Wie ist der Inhalt der Fläche unter einer Kurve definiert?*

2. *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter der Kurve:*

   2.1. $f(x) = \frac{1}{3} x + 2 , \quad x \in [2, 4]$

   2.2. $f(x) = -\frac{1}{3} x + 1.5 , \quad x \in [0, 10]$

   2.3. $f(x) = \frac{1}{2} x + 1 , \quad x \in [-10, 10]$

   2.4. $f(x) = x^2 + 2, \quad x \in [0, 1]$

3. *Machen Sie sich die Definitionen folgender Begriffe klar:*

   a) Intervallteilung
   b) Verfeinerung einer Intervallteilung
   c) Regelmässige Intervallteilung
   d) Infimum und Supremum
   e) Untersumme
   f) Obersumme
   g) Bestimmtes Riemannsches Integral
   h) Integrand
   i) Integrationsgrenzen

4. *Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche unter der Kurve mittels Unter- und Obersummen bis zu folgender Genauigkeit: Die Abweichung der Unter- von der Obersumme soll höchstens 1% der Obersumme betragen.*

   4.1. $f(x) = 0.5 x + 2 , \quad x \in [0, 2]$ *(Resultat klassisch einfach prüfbar!)*

   4.2. $f(x) = \sin(x) , \quad x \in [0, \pi]$

5. *Berechnen Sie die Werte folgender bestimter Integrale:*

   5.1. $\int_0^2 (0.5 x + 2) \, dx$

   5.2. $\int_0^2 (-0.5 x - 2) \, dx$

   5.3. $\int_0^2 (2 x - 2) \, dx$

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 10 / 2

6. *Gegeben ist folgende beschränkte Funktion:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \in \mathbb{Q} \\ 1 \ , & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Existiert das Riemannsche Integral dieser Funktion für $I = [0, 10]$ *? - Begründung!*

7. *Approximieren Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung:*

$$\int_{0.3764}^{0.3782} \sin(x)\ dx$$

8. *Beantworten Sie folgende Fragen:*

a) Was ist die Schwarz'sche Ungleichung?

b) Was ist ein uneigentliches Integral?

c) Was ist eine Stammfunktion?

d) Was besagt der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung?

9. *Berechnen Sie eine Stammfunktion:*

9.1. $f(x) = e^x$

9.2. $f(x) = 5$

9.3. $f(x) = x^2$

9.4. $f(x) = \frac{1}{3} x^3$

9.5. $f(x) = \sin(x)$

9.6. $f(x) = x^n$

9.7. $f(x) = \frac{1}{x}$

9.8. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$

9.9. $f(x) = x^n + x^m$

9.10. $f(x) = \cos(x) + \ln(x)$

10. *Berechnen Sie* $\int_a^b f(x)\ dx$ *für* $I = [a, b]$ *:*

10.1. $f(x) = 1$ in $[0, 1]$

10.2. $f(x) = x^{-0.5}$ in $[-4, 4]$

10.3. $f(x) = \frac{1}{x}$ in $[1, 3]$

10.4. $f(x) = \sin(x)$ in $[0, \pi]$

10.5. $f(x) = x$ in $[0, 2]$

10.6. $f(x) = x\ e^{(x^2)}$ in $[0, 1]$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.** *Falls möglich, sind die Resultate mit* **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 10 / 3

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Integralrechnung mit einer Variablen

ISB, WIR90

---

11. *Berechnen Sie falls möglich und kontrollieren Sie mit **Mathematica**:*

11.1. $\int_{-2}^{2} (x^2 + 2x + 1)\, dx$ 11.2. $\int_{1}^{3} x^2 \cos(x^3 + 4)\, dx$

11.3. $\int_{r}^{s} x^{\alpha}\, dx$ 11.4. $\int_{0}^{2} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$

12. *Was ist das* bestimmte *Integral?*

13. *Integrieren Sie mit Hilfe der Integrationsregeln für Polynome resp. Potenzfunktionen:*

13.1. $\int (3x^4 - 2x^2 + x - 7)\, dx$

13.2. $\int (4x^7 - 2x^5 + 3x^4 - x^2 + 4x - 5 - x^{-2} - x^{-4} + 2x^{-5} - 4x^{-7})\, dx$

14. *Integrieren Sie falls möglich:*

14.1. $\int \frac{18}{\sqrt[7]{x}}\, dx$ 14.2. $\int (\sin(x) + \cos(x))\, dx$

14.3. $\int (\sin^2(x) + \cos^2(x))^{-1}\, dx$ 14.4. $\int (\operatorname{ctg}(x) - \tan(x))\, dx$

14.5. $\int (\ln(x) - \ln(-x))\, dx$ 14.6. $\int x\, e^{x^2}\, dx$

15. *Berechnen Sie falls nötig mit Hilfe partieller Integration:*

15.1. $\int_{a}^{b} \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$ 15.2. $\int_{0}^{\pi} \sin^2(x)\, dx$

15.3. $\int_{0}^{1} x^2 \sin(x)\, dx$ 15.4. $\int_{a}^{b} x^2\, e^{x^2}\, dx$

15.5. $\int_{0}^{\pi} \sin^3(x)\, dx$ 15.6. $\int_{0}^{1} e^x\, e^{-x}\, dx$

16. $\int f(x)\, dx = F(x)$. *Berechnen Sie dann folgende unbestimmte Integrale:*

16.1. $\int f(\alpha \cdot x)\, dx$ 16.2. $\int f(\alpha \cdot x + \beta)\, dx$

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 10 / 4

17. *Berechnen Sie durch Substitution:*

17.1. $\int (a\ x + b)^n\ dx$ 17.2. $\int e^{ax+b}\ dx$

17.3. $\int \cos(a\ x + b)\ dx$ 17.4. $\int \frac{1}{a\ x + b}\ dx$

17.5. $\int_3^8 \sqrt{x + 1}\ dx$ 17.6. $\int_0^1 \sqrt{5^2 - x^2}\ dx$

18. *Berechnen Sie das Integral:*

18.1. $\int (x \cdot 4 - 6)^{(7/11)}\ dx$ 18.2. $\int \cos(6x - 5)\ dx$

18.3. $\int 1/\sin^2(4x + 3)\ dx$ 18.4. $\int \left[1/(x^2-1)^2 + 1/x^2 - 1/\mathrm{ctg}(2x-1) + 4e^{2x-1}\right]\ dx$

18.5. $\int 1/\sqrt{4 - x^2}\ dx$ 18.6. $\int 7/\sqrt{7x^2 + 7/4}\ dx$

18.7. $\int 1/(x\sqrt{x^2 + x + 2})\ dx$ Hinweis: $t = x + \sqrt{x^2 + x + 2}$

18.8. $\int (\ln(x))^2\ dx$ 18.9 $\int 1/(2+\cos(x))\ dx$

18.10. $\int \sqrt{x^2-x}\ (2x-1)\ dx$ 18.11. $\int \cos^n(x)\ \sin(x)\ dx$

18.12. $\int \sin(\alpha\ x + \beta)\ dx$ 18.13. $\int x/(x^2+1)\ dx$

18.14. $\int \sin(x^{0.5})/x^{0.5}\ dx$ Hinweis: $t = x^{0.5}$

18.15. $\int 1/\cosh(x)\ dx$ Hinweis: $t = e^x + e^{-x}$

18.16. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx)\ dx$ Hinweis: $\lim\limits_{z \to \infty} \int_0^z .....\ dx$

18.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$ 18.18. $\int 1/(x^2 - 2x + 7)\ dx$

Hinweis zu 18.18.: Quadratisch ergänzen: $x^2-2x+7=x^2-2x-1-6=(x-1)^2+6=t^2+6...$

19. *Berechnen Sie mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung:*

19.1. $\int 4/(x^2-3x+2)\ dx$ 19.2. $\int dx/(x^2+1)$

19.3. $\int 2x/(x^2+1)\ dx$ 19.4. $\int (2x+1)/(x^2+x+4)\ dx$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

20. *Berechnen Sie durch Partialbruchzerlegung:*

20.1. $\int \frac{3x^4 - 2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$ 20.2. $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$

21. *Wieviel Energie braucht es, um einen Mann von 100 kg von der Erde auf den Mond zu bringen? Wieviel Wasser könnte man mit dieser Energie bei einem Wirkungsgrad von 80 % von Martigny aus auf die Passhöhe des Grossen St. Bernhards pumpen?*

22. *Berechnen Sie:* $\int_0^{\pi} \sin^5(x)\ dx$

23. *Gegeben ist* $f(x) = x^2$. *Betrachten Sie diese Kurve im Rechteck zwischen* $-x_o$ *und* x_o *sowie* 0 *und* $f(x_o)$. *Was ist das Verhältnis der Flächeninhalte in diesem Rechteck unter der Kurve und oberhalb der Kurve?*

24. *Die Graphen von* $f(x) = x^2 + x + 1$ *und* $g(x) = -x^2 - 2x + 18$ *schneiden sich in zwei Punkten. Dazwischen schliessen sie ein endlich grosses Flächenstück ein. Was ist der Inhalt dieses Flächenstücks?*

25. *Der Graph von* $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ *schneidet die x-Achse in* $-x_o < 0$ *und berührt dieselbe Achse in* 0, *wo sich auch ein relatives Minimum befindet. Daher muss auch ein relatives Maximum an einer Stelle* x_1 *existieren. Die Parallele zur x-Achse durch dieses Maximum schneidet die y-Achse in* h *und die Kurve in einem weiteren Punkt an der Stelle* x_2. *Was ist das Verhältnis der Inhalte der Flächen unter der Kurve zwischen* x_o *und* x_2 *sowie oberhalb der Kurve und unterhalb der Parallelen zwischen* x_1 *und* x_2 *?*

26. *Berechnen Sie falls möglich das bestimmte Integral und skizzieren Sie den Graphen des Integranden:*

26.1. $\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2 - 1} dx$ 26.2. $\int_{-10}^{10} \frac{1}{\sqrt[5]{x + 3}} dx$

26.2. $\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^4} dx$ 26.4. $\int_{-10}^{0} \frac{1}{x^4} dx$

26.5. $\int_{-10}^{0.001} \frac{1}{x^3} dx$ 26.6. $\int_{-10}^{0} \frac{1}{x^3} dx$

26.7. $\int_{-4}^{6} \frac{1}{x^2} dx$ 26.8. $\int_{-7}^{6} \frac{1}{x} dx$

26.9. $\int_{-3}^{3} \frac{1}{x^2 + 1} dx$

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 10 / 6

27. *Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, falls möglich:*

27.1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$ 27.2. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$

27.3. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$ 27.4. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x\cdot e^{-x^2}\,dx$

27.5. $\displaystyle\int_{-\infty}^t \sin(x)\cdot e^x\,dx$ 27.6. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)\,dx$

27.7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \tan(x)\,dx$ 27.8. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin(x)\,dx$

27.9. $\displaystyle\int_4^\infty \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ 27.10. $\displaystyle\int_4^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

28. *Berechnen Sie* $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\,dx$ *mit:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x+\pi) & x\in[-2\pi,\ -\pi] \\ \sin(x) & x\in[-\pi,\ 0] \\ x^{-1/2} & x\in[0,\ 2\pi] \end{cases}$$

29. *Skizzieren Sie die folgenden Kurven:*

29.1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sin(x) \end{pmatrix}$ 29.2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{cox}(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

29.3. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}$ 29.4. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)\ \sin(t/2) \\ \sin(t)\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$

30. *Berechnen Sie das Kurvenintegral bei gegebener Kurve K:*

30.1. $\displaystyle\int_K (x^2+y^2)\,ds\ ,\quad \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},\quad t\in[0,\ 2\pi]$

30.2. $\displaystyle\int_K \frac{y}{x}\,ds\ ,\quad \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix},\quad t\in[0,\ 4]$

<u>**Bemerkung:**</u> **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 10 / 7 **Klasse: ....**

Thema des Kapitels: Integralrechnung mit einer Variablen ISB, WIR90

---

31. *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter der Kurve (gegeben in Parameterform):*

31.1. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$ (Archimedische Spirale)

31.2. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)\, e^t \\ \sin(t)\, e^t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$

32. *Berechnen Sie die Länge der Kurve:*

32.1. $f(x) = a x + b, \quad x \in [x_o, x_1]$

32.2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [0, 1]$

32.3. $f(x) = 0.5\, x^2, \quad x \in [0, 1]$

32.4. $f(x) = \cosh(x), \quad x \in [-r, r]$

33. *Berechnen Sie die Länge der Archimedischen Spirale (α zwischen 0 und 1) und vergleichen Sie das Resultat mit der Länge der Parabel aus 32.3!*

34. *Eine Eisenbahnlinie ist derart zu planen, dass eine gerade Strecke so in eine Kurve übergeht, dass nicht plötzlich eine grosse seitliche Beschleunigung auftreten kann. Was ist die einfachste mögliche Kurvenform?*

35. *Berechnen Sie den Inhalt der Kreisfläche durch Integration:*

a) In Polarkoordinaten b) In kartesischen Koordinaten (Substitution)

36. *Die unten gegebenen Kurven schliessen jeweils eine Fläche ein. Wie gross ist deren Inhalt?*

36.1. $f(x) = -x^2 + 1, \quad g(x) = x^2 - 1$

36.2. $f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = -\sqrt{x}, \quad f_3(x) = 2, \quad f_4(x) = -2$, dazu der Kreisbogen um (8, 0) mit dem Radius 4.

36.3. $f_1(x) = x^3 + x^2 + 2, \quad f_2(x) = x^2 + x - 2$, dazu die Senkrechten auf die x-Achse durch $x = 2$ und $x = -3$.

37. *Berechnen Sie den Inhalt folgender Oberflächen durch Integration:*

37.1. Kugeloberfläche 37.2. Kugelzone zwischen $r = a$ und $r = b$

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 10 / 8

38. *Eine Gerade durch den Ursprung mit der Steigung* a *lassen wir um die x-Achse rotieren. So entsteht ein "Rotationskegel". Wie gross ist die Mantelfläche (ohne den "Boden") zwischen* $x = 0$ *und* $x = h$ *?*

39. *Statt der Geraden in Aufgabe 38 nehmen wir die Kurve* $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$. *Wie gross ist jetzt die Mantelfläche?*

40. *Berechnen Sie das Volumen folgender einfacher Rotationskörper durch Integration:*

    40.1. Zylinder (Rotation um die x-Achse) zwischen $x = a$ und $x = b$.

    40.2. Rotationskegel aus Aufgabe 38.

    40.3. Kubel mit Radius R.

41. *Berechnen Sie das Volumen folgender Rotationskörper durch Integration:*

    41.1. Das Parabelstück zwischen den beiden Nullstellen der Funktion $f(x) = (x^2 - 2x)/2$ wird um die x-Achse rotiert.

    41.2. Die Parabel $f(x) = x^2$ wird um die y-Achse rotiert. Der Körper ist bei $f(x_o)$ senkrecht zur y-Achse nach oben begrenzt.

    41.3. $f(x) = \sqrt{x}$ zwischen $x = 0$ und $x = 4$ wird um die x-Achse rotiert.

42. *Berechnen Sie die Flächenschwerpunkte (Volumenschwerpunkte) , wenn folgende Flächen (Volumen) gegeben sind:*

    42.1. Halbkreis um (0/0), $r=1$ 42.2. Fläche unter $f(x) = \cos(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$

    42.3. Fläche unter der Kurve $f(x) = -x^2 + 2$ zwischen den Nullstellen

    42.4. Parabeln $f(x) = \ldots$ durch die Punkte (-2/0), (0/1), (0/2), (2/0)

    42.5. Halbkugel 42.6. Rotationskegel

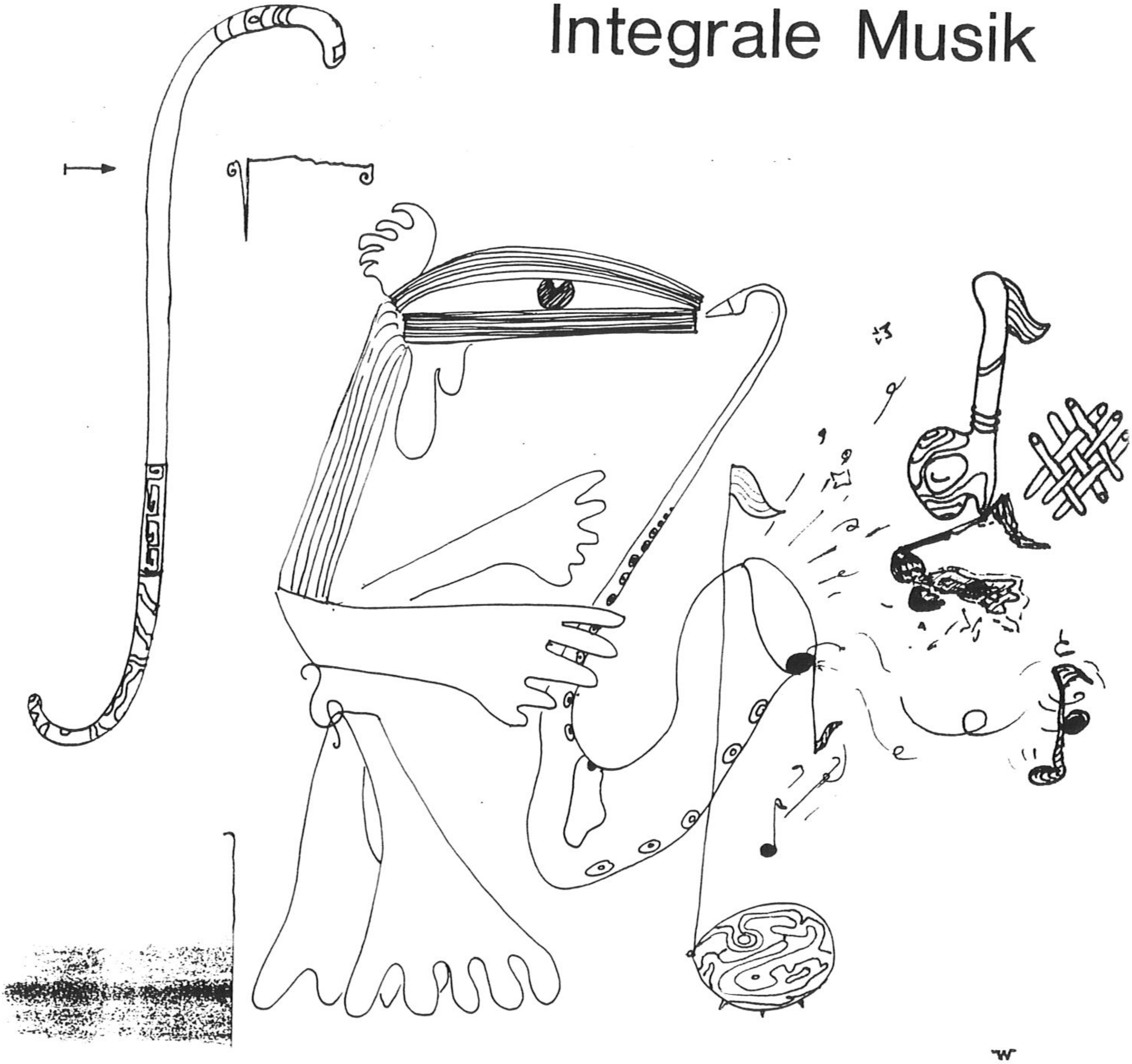
43. a) *Was ist das Trägheitsmoment einer Kugel konstanter Dichte mit Radius R um* (0/0/0)*?*

    b) *Entsprechende Frage bei einem Blech der Dicke* $d=0.001$, *begrenzt durch* $f(x) = x^2$, *x-Achse und* $x \in [1, 2]$. *Bezugsachse für das Moment = y-Achse.*

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Herausragender Student

Integrale Musik



Mathematik tönt nicht
so laut wie die Musik.
Doch zum Tönen bringt
die Musik die Mathematik
gleichwohl... Sind daher
die herrlichen klassischen
free-Mathematikkonzerte so
ein Gemuss?

Uebungen - Praktikum Kap. 11 / 1

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Numerische Verfahren

ISB, WIR90

---

1. *Gegeben ist* $f(x) = x^6 - x^5 + 8x^4 - x^3 + 6x^2 - 2x + 5$
Berechnen Sie nach dem Hornerschema:

   1.1. $f(0.42865)$ 1.2. $f(-25.449)$

2. *Gegeben sind die Punkte* (x_i/y_i) *für* $i = 0 \ldots n$ *wie folgt:*

   (-3/2), (2/12), (7/10), (11/16), (12/17)

   Suchen Sie das Näherungspolynom $p_n(x)$ *mit minimalem Grad mit Hilfe eines Gleichungs-systems. Wie gross ist der maximale Fehler, wenn die 5. Ableitung der angenäherten Funktion absolut höchstens 1 ist?*

3. a) *Konstruieren Sie das Näherungspolynom von Aufgabe 2 mit Hilfe des Interpolationsverfahrens von Lagrange.*

   b) *Wiederholen Sie die Konstruktion mit Hilfe des Verfahrens von Newton und vergleichen Sie die Konstruktionsverfahren.*

   c) *Gelingt es Ihnen, noch ein weiteres Verfahren zu finden und zu testen?*

4. *Zu lösen sind näherungsweise folgende zum Teil transzendente Gleichungen* $f(x) = 0$:

   a) $x^3 - x + 4 = 0$ b) $\frac{3}{4} x^4 + x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ nahe -2.7

   c) $x - 120^{1/120} = 0$ (Dezimalbruchentwicklung)

   d) $x^2 - 2\cos(x) =$ e) $x^3 - 2x - 5 = 0$

   f) $-\tan(x) + \cos(x) + x^2 = 0$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$

   Als Abbruchsbedingung benütze man $|x_n - x_{n+1}| < 10^{-8}$ oder $|f(x_n) - f(x_{n+1})| < 10^{-8}$.

   4.1. Benützen Sie die Methode der Intervalleingrenzung.

   4.2. Benützen Sie das Approximationsverfahren von Newton (Tangentenmethode)

   4.3. Benützen Sie die Sekantenmethode (Regula falsi oder Interpolationsmethode)

5. *Benützen Sie als Iterationsverfahren die Fixpunktmethode, um folgende Näherungen zu berechnen:*

   5.1. $\sin(x) - 0.5\sin^2(x) = 0.1$, $x \in [0, \pi/2]$ 5.2. $e^{-x} = x$

   5.3. $x + 2 = (1/3)\, e^x$

Fortsetzung: Rückseite

Uebungen - Praktikum Kap. 11 / 2

6. *Gelingt es Ihnen auch, mit dem Fixpunktverfahren folgende Probleme zu lösen?*

   6.1. $x = \tan(x)$, $x \in [\pi, 3\pi]$ 6.2. $x = e^x - 1$

7. *Lösen Sie mit Hilfe der Fixpunktmethode das Gleichungssystem:*

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin(x + y) \\ y &= \cos(x - y) \end{aligned}\right|$$

Abbruchbedingung: $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-6}$, entsprechend für y.

8. *Gegeben sind die Messwerte* (0/4.5), (1/2.4), (2/2.6), (3/4.8), (4/9.3), (5/6.2), (6/1.0). *Durch diese Punkte ist eine unendlich oft differenzierbare Kurve zu legen. Bestimmen Sie folgende Punkte oder Grössen mit der jeweils angegebenen Methode:*

   8.1. Maxima und Minima sowie erste Ableitungen in den Messpunkten graphisch.

   8.2. Vergleichen Sie die Resultate von 4.1. mit den Resultaten der Polynommethode.

   8.3. Berechnen Sie alle möglichen Ableitungen mit der Methode der Binomialkoeffizienten.

9. *Berechnen Sie das Bestimmte Integral der vermuteten Kurve zwischen* $x=0$ *und* $x=6$ *:*

   9.1. Nach der Rechtecksmethode

   9.2. Nach der Trapezmethode

   9.3. Nach der Simpson-Methode

   9.4. Mit Hilfe des Interpolationspolynoms minimalen Grades

10. *Bestimmen Sie mit Hilfe einer mathematischen Methode Ihrer Wahl aus einer Landkarte 1:25'000 (Schweiz. Landestopographie) den Inhalt der Oberfläche des Bielersees möglichst genau. Beurteilen Sie die möglichen Fehlerquellen sowie die erreichbare Genauigkeit.*

11. *Verschaffen Sie sich Zahlen über die Bevölkerungsentwicklung der Schweiz aus den letzten 300 Jahren. Wie gross war die grösste zeitliche Bevölkerungsänderung? Gab es Wechsel in der Entwicklungstendenz?*

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.** *Falls möglich, sind die Resultate mit* **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 12 / 1

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Vektoren und Matrizen

ISB, WIR90

---

1. *Machen sie sich die folgenden Definitionen klar:*

a) Geometrischer Vektor	b) Skalar
c) Pfeil	d) Parallelogrammaddition
e) Vektorraum	f) Skalarmultiplikation
g) Kollinear	h) Komplanar
i) Linear abhängig	j) Linear unabhängig
k) Freie Vektoren	l) Ortsvektoren
m) Orientierte Gerade	n) Orientierte Ebene
o) Orientierter Raum	p) Rechtssystem
q) Einheitsvektor	r) Koordinatensystem
s) Vektor-Komponente	t) Transponierter Vektor
u) Teilverhältnis	v) Distanz zwischen zwei Punkten
w) Doppelverhältnis	x) Harmonische Punktepaare

2. $\vec{a}$, $\vec{b}$ *und* $\vec{c}$ *seien gegeben. Lösen Sie die folgenden Gleichungen graphisch:*

   2.1. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{x}$ 2.2. $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{x} = \vec{c}$

3. *Gegeben sei ein Parallelogramm* ABCD. *Dabei sei* $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. *Drücken Sie* $\overrightarrow{AC}$ *und* $\overrightarrow{BD}$ *aus durch* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *!*

4. *Reduzieren Sie die folgende Gleichung mit Hilfe der Regeln und Gesetze für Vektoren so weit als möglich:*

$$5\vec{a} + 2\vec{c} - 2(2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{x}) = \vec{a} + (2\vec{b} - 4\vec{c} + \vec{a}) - 3\vec{x}$$

5. *Geben Sie Beispiele für Vektorräume!*

6. *Entscheiden Sie, ob die folgende Menge von Vektoren linear abhängig ist:*

$$\{2\vec{a},\ 3\vec{a} + 2\vec{d} - 4\vec{c},\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},\ 4\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c} + 2\vec{d},\ \vec{b} + 2\vec{d}\}$$

Fortsetzung: Rückseite

7. *Zeichnen Sie drei Vektoren* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *und* $\vec{c}$. *Konstruieren Sie dann den folgenden Vektor* $\vec{d}$:

$$\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

8. $\vec{u}$, $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ *bezeichnen die Vektoren, die in einem gegebenen Dreieck von den Ecken in den Schwerpunkt zeigen. Untersuchen Sie, ob die folgende Gleichung richtig ist und begründen Sie das Resultat:*

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$$

9. *Untersuchen Sie, ob der fogende Sachverhalt richtig ist:*

"Die Seitenmitten eines beliebigen räumlichen Vierecks liegen in einer Ebene und bilden eine Parallelogramm."

10. *Beweisen Sie mit Hilfe geometrischer Vektoren:*

"In einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen."

11. *Berechnen sie mit Hilfe geometrischer Vektoren das Verhältnis, in dem der Schwerpunkt eines beliebigen Dreiecks eine beliebige der Schwerlinien teilt.*

12. *Gegeben sei ein beliebiges Parallelogramm* ABCD. E *und* F *seien wie folgt bestimmt:*

E = Mittelpunkt von $\overline{BC}$, F = Mittelpunkt von $\overline{CD}$.

Beweisen Sie den folgenden Sachverhalt:

"$\overline{AE}$ und $\overline{AF}$ teilen $\overline{BD}$ in drei gleich lange Teile."

13. *Gegeben seien die Vektoren* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *und* $\vec{d}$ *bezüglich der Orthonormalbasis* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

13.1. Wählen Sie $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ als neue Basis und stellen Sie darin $\vec{d}$ dar!

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}\,, \qquad \lambda, \mu, \nu = ?$$

13.2. Was hat der Vektor $\vec{f} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$ für eine Länge?

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzufüren sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 12 / 3 **Klasse: ....**

Thema des Kapitels: Vektoren und Matrizen ISB, WIR90

---

14. *Gegeben sind zwei Punkte* P_1 *und* P_2 *in der Ebene.*

    a) Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Mittelpunktes von $\overline{P_1P_2}$.

    b) Wenden Sie die Formel an auf $P_1(3/7/-6)$ und $P_2(5/-1/2)$.

15. *Beweisen Sie, dass sich in einem Dreieck die Schwerlinien im Verhältnis* 2 : 1 *teilen.*

16. *Gegeben ist ein Dreieck im Raum.*

    a) Leiten Sie eine Formel her für den Schwerpunkt.

    b) Wenden Sie die Formel an auf $P_1(2/5/8)$, $P_2(-4/-1/1)$ und $P_3(6/-7/-5)$.

17. $t = (P_1P_2P_3)$ *sei das* Teilverhältnis *von* P_3 *bezüglich* $\overline{P_1P_2}$. P_1 *hat die Koordinaten* x_1, x_2 *und* x_3. *Zeigen Sie die folgenden Sachverhalte:*

    a) $\vec{OP} = \dfrac{\vec{OP}_1 - t\,\vec{OP}_2}{1 - t}$

    b) $x_3 - x_1 = t\,(x_3 - x_2)$. Entsprechend für die y_i und die z_i.

    c) $(P_2P_1P_3) = \dfrac{1}{t}$

    d) $(P_1P_3P_2) = 1 - t$.

18. $(P_1P_2P_3P_4)$ *sei das* Doppelverhältnis *von* P_1, P_2, P_3 *und* P_4. *Beweisen Sie:*

    a) $(P_1P_2P_3P_4) = \dfrac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}$ für $x_1 \neq x_2$

    b) $(P_3P_4P_1P_2) = (P_1P_2P_3P_4)$

    c) $(P_2P_1P_4P_3) = (P_1P_2P_3P_4)$

19. *Was sind* harmonische *Punktepaare?*

20. *Beweisen Sie den folgenden Satz:*

    Voraussetzung: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien nicht kollinear.

    Behauptung: $\dfrac{\vec{a}}{a} \pm \dfrac{\vec{b}}{b}$ halbiert den Zwischen-∡ bzw. den Neben-∡ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Fortsetzung: Rückseite

21. *Beweisen Sie die folgenden geometrischen Sätze:*

21.1. *Satz über die Winkelhalbierende:* In einem Dreieck ABC schneidet die Winkelhalbierende von α $\overline{BC}$ im Punkte D. Die Winkelhalbierende des Aussenwinkels bei A an $\overline{AC}$ $(\pi-\alpha)$ schneidet die Gerade durch $\overline{BC}$ in E. Dann sind (BC) und (DE) harmonische Punktepaare.

21.2. *Satz von Pappos:* Von einem Punkt O aus gehen 4 Strahlen, die von einer Geraden g in den Punkten A, B, C und D sowie von einer Geraden h in den entsprechenden Punkten A', B', C' und D' geschnitten werden. Dann gilt: (A'B'C'D') = (ABCD) .

21.3. *Satz von Ceva:* Gegeben ist ein Dreieck ABC und im Dreieck ein Punkt P ($\notin$ Dreieckseite). Die Gerade durch $\overline{AP}$ schneidet $\overline{BC}$ in A'. Entsprechend erhält man durch $\overline{BP}$ B' und durch $\overline{CP}$ C'. Dann gilt:
(ABC')·(BCA')·(CAB') = -1

21.4. *Satz von Menelaos:* Gegeben sei ein Dreieck ABC und eine Gerade g, die die Seite $\overline{BC}$ in A', $\overline{AC}$ in B' und die Gerade durch $\overline{AC}$ in C' schneidet. Dann gilt: (ABC')·(BCA')·(CAB') = 1

21.5. *Satz von Euler:* Sei U der Umkreismittelpunkt, H der Höhenschnittpunkt und S der Schwerpunkt in einem beliebigen Dreieck. Dann gilt:
1) U, H und S liegen auf einer Geraden (***Eulersche Gerade***).
2) (UHS) = - 1 : 2

21.6. *Satz von Napoleon Buonaparte (Kaiser Napoleon I !!!):* Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC. S_a, S_b und S_c seien die Schwerpunkte der gleichseitigen Dreiecke über den Seiten a, b und c. Dann gilt:
Das Dreieck $S_aS_bS_c$ ist immer gleichseitig.

22. *Lösen Sie die folgenden Rechenaufgaben:*

22.1. Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Berechnen Sie $\vec{d}$ aus $3\vec{b} - 2\vec{a} = 3\vec{d} - 2\vec{b}$.

22.2. $\vec{e} = 2\vec{a} - (1/2)\,\vec{b} + 3\vec{c} - 4\vec{d}$. $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$,
$\vec{d} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Weiter sollen $\vec{e}$ und $\begin{pmatrix}-4\\x\end{pmatrix}$ kollinear sein. Wie gross ist x ?

22.3. A(5/-6), B(-7/-3) und C(x/5) sollen auf einer Geraden liegen.
Wie gross ist x ?

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

22. *Fortsetzung:*

22.4. Von einem Dreieck ABC mit dem Schwerpunkt S sind gegeben: A(6/-1), B(-2/6), S(3/4). Was sind die Koordinaten von C?

22.5. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{c}$ nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

22.6. Zerlegen Sie $\vec{d}$ nach $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}.$$

22.7. Gegeben sind: A(4/-2/5), B(7/9/-4), C(9/12/-2), D(6/1/7). Beweisen Sie: ABCD ist ein Parallelogramm.

22.8. Gegeben sind A(-3/5) und B(3/-4). Bestimmen Sie P so, dass P $\overrightarrow{AB}$ im Verhältnis $t = -1/2$ teilt.

22.9. Gegeben sind A(3/-5), B(-1/0) und C(0.6/-2).
a) Zeigen Sie: A, B und C liegen auf einer Geraden.
b) Bestimmen Sie D so, dass (AB) und (CD) zwei harmonische Punktepaare bilden!

22.10. Gegeben ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4.5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist ein Vektor der Länge 14 mit entgegengesetzter Richtung.

22.11. Gegeben ist das Dreieck ABC. A(-1/-3), B(3/-3), C(8/9). Wie gross ist der Umfang?

22.12. Von der Strecke $\overline{AB}$ weiss man: $|\overline{AB}| = 13$, A(7/3), B(-5/y). $y = ?$

22.13. $\overline{AC}$ mit A(-2/2) und C(5/1) ist die Diagonale des Quadrates ABCD. Berechnen Sie die Koordinaten von B und D.

22.14. Welche Punkte der x-Achse haben vom Punkte A(12/12/-6) doppelte Entfernung wie vom Punkte B(15/6/3).

22.15. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises durch A, B und C: A(5/7), B(-1/-1), C(6/0).

22.16. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius der Kugel durch A, B, C und D: A(3/1/3), B(0/-3/4), C(3/0/4), D(1/-1/-1).

Fortsetzung: Rückseite

22. *Fortsetzung:*

22.17. Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C und D ein reguläres Tetraeder bilden: A(0/11/7), B(20/11/0), C(15/23/16), D(15/2/9).

22.18. Gegeben ist das Dreieck ABC: A(4/0), B(0/7), C(–4/0). Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC annähernd gleichseitig ist.

23. *Untersuchen Sie, ob folgende Formeln richtig sind. Und korrigieren Sie gegebenenfalls die Gleichung:*

a) $\sin(\pi-\alpha) = +\sin(\alpha)$	e) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin(\alpha)$
b) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$	f) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$
c) $\tan(\pi-\alpha) = -\tan(\alpha)$	g) $\tan(\pi+\alpha) = +\tan(\alpha)$
d) $\mathrm{ctg}(\pi-\alpha) = -\mathrm{ctg}(\alpha)$	h) $\mathrm{ctg}(\pi+\alpha) = +\mathrm{ctg}(\alpha)$
i) $\sin(2\pi-\alpha) = -\sin(\alpha)$	m) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
j) $\cos(2\pi-\alpha) = +\cos(\alpha)$	n) $\cos(-\alpha) = +\cos(\alpha)$
k) $\tan(2\pi-\alpha) = -\tan(\alpha)$	o) $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
l) $\mathrm{ctg}(2\pi-\alpha) = -\mathrm{ctg}(\alpha)$	p) $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}(\alpha)$

Welche trigonometrischen Funktionen sind gerade, welche ungerade?

24. *Umrechnungen kartesische Koordinaten, Polarkoordinaten:*

24.1. $x = 0.2189$, $y = -3.2846$, $r = ?$, $\phi = ?$

24.2. $r = 0.2819$, $\phi = -3.2846$, $x = ?$, $y = ?$

24.3. $x = 2.1891$, $y = -5.2178$, $z = 2.8612$, $r = ?$, $\phi = ?$, $\psi = ?$

24.4. $r = 22.452$, $\phi = +7.416$, $\psi = -0.1245$, $x = ?$, $y = ?$, $z = ?$

25. *Wann gelten folgende Approximationen?* a) $\sin(\alpha) \approx \alpha$ b) $\tan(\alpha) \approx \alpha$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

26. *Überprüfen Sie, ob im rechtwinkligen Dreieck die folgenden Relationen richtig sind:*

a) $\sin(\pi/2 - \alpha) = \sin(\beta) = \cos(\alpha)$

b) $\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(\beta) = \sin(\alpha)$

c) $\tan(\pi/2 - \alpha) = \tan(\beta) = \mathrm{ctg}(\alpha)$

d) $\mathrm{ctg}(\pi/2 - \alpha) = \mathrm{ctg}(\beta) = \tan(\alpha)$

27. *Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen gelten:*

a) $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

b) $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$

c) $\tan(\pi/4) = \mathrm{ctg}(\pi/4) = 1$

d) $\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

e) $\tan(\pi/6) = \mathrm{ctg}(\pi/3) = \sqrt{3}/3$

f) $\tan(\pi/3) = \mathrm{ctg}(\pi/6) = \sqrt{3}$

28. *Rechnungsaufgaben:*

28.1. Gegeben ist ein Vektor $\vec{AB}$ mit $|\vec{AB}| = 10$, dem Richtungswinkel $\phi = 210^\circ$ und B(-1/-3). Wo liegt A ?

28.2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie Länge und Richtungswinkel von a) $3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$,
b) $-4\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

28.3. Eine regelmässige, 5-seitige Pyramide hat unten eine Grundkante von 4 cm und eine Höhe von 10 cm. Berechnen Sie die fehlenden Seitenlängen, den Inhalt der Oberfläche inkl. Grundfläche sowie die Steigungswinkel der Seitenkanten.

28.4. Das Fenster des Raumes, wo wir gerade sind, im Haus am See, liegt 10 m über dem Wasserspiegel. Über dem See schwebt ein Ballon mit dem Winkel $\alpha = 52.4^\circ$ zur Horizontalen. Das Spiegelbild des Ballons erscheint uns unter dem Winkel $\beta = 58.0^\circ$ zur Horizontalen. Wie hoch schwebt der Ballon über dem See?

Fortsetzung: Rückseite

29. *Aufgaben zum Sinus- und Cosinussatz:*

29.1. Geben Sie eine Formel für den Umkreisradius eines Dreiecks. (Hinweis: Sinussatz.) Wenden Sie die Formel auf folgendes Dreieck an:

$a = 22.6, \quad b = 31.5, \quad \beta = 45^\circ, \quad r_U = ?$, Flächeninhalt $A = ?$

29.2. In einem Dreieck ist $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$. In welchen Verhältnis wird der Flächeninhalt A durch w_γ geteilt?

29.3. Ein Erdsatelit befindet sich in 1000 km Höhe. Ein Beobachter sieht ihn aus 55° Zenitdistanz. Der Erdradius beträgt 6370 km. Wie weit ist der Satelit vom Beobachter entfernt?

29.4. Zeigen Sie: Für den Umkreisradius eines Dreiecks gilt die Formel:

$$r_U = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\,A}$$

29.5. Beweisen Sie: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Seiten gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen.

29.6. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck. Wir zeichnen die Quadrate über den Seiten und davon die konvexe Hülle. Beweisen Sie: Alle Dreiecke in dieser Figur haben den gleichen Flächeninhalt.

29.7. Leiten Sie eine Formel her zur Berechnung der Schwerlinienlängen aus den Seitenlängen eines Dreiecks.

29.8. Leiten Sie eine Formel her zur Berechnung der Längen der Winkelhalbierenden aus den Längen der Dreieckseiten.

29.9. α sei der Zentriwinkel eines Kreissegments. Beweisen Sie:

$$A = 0.5\, r^2\, (\mathrm{arc}(\alpha) - \sin(\alpha))$$

29.10. In einem rechtwinkligen Dreieck misst $a = 6$ cm, $b = 8$ cm. Wir zeichnen den Kreis mit der Hypothenuse c als Durchmesser und ebenfalls den Kreis durch C mit Zentrum B. Wie gross ist der Flächeninhalt der so entstehenden Mondsichel?

29.11. Zwei Kreise mit dem Radius r haben den Mittelpunktsabstand $r/2$. Wie gross ist der Inhalt einer so entstandenen Mondsichel?

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.** *Falls möglich, sind die Resultate mit* **Mathematica** *zu kontrollieren.*

---

30. *Bei einer partiellen Sonnenfinsternis sind 58.9% des Sonnendurchmessers bedeckt. Wieviele % der Sonnenscheibe sind das? Hinweis: Die Sonne erscheint uns gleich gross wie der Mond.*

31. *Aufgaben zu den Additionstheoremen:*

31.1. Berechnen Sie mit Hilfe von $\alpha = 45^\circ$ und $\beta = 30^\circ$ folgende Werte exakt:

a) $\sin(75^\circ)$ b) $\cos(75^\circ)$

c) $\tan(75^\circ)$ d) $\mathrm{ctg}(75^\circ)$

31.2. In einem nicht-rechtwinkligen Dreieck gilt: $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.
Beweisen Sie:

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) \cdot \tan(\gamma)$$

31.3. Beweisen Sie:

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3\tan^2(\alpha)}$$

31.4. Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der folgenden Gleichung:

$$\cos^2(x) + \cos(x) = \sin^2(x) + \sin(x)$$

32. *Einige goniometrischen Aufgaben:*

32.1. Von einem Dreieck kennen wir $a = 67.4$, $b = 49.8$, $c = 77.6$.
Berechnen Sie α, β, γ.

32.2. Von einem Trapez weiss man: $b = c = d = 5.17$, $\alpha = 47.6^\circ$.
$e = ?$, $r_U = ?$

32.3. A und B sind Punkte auf einem geraden Meeresstrand. Sie liegen 1350 m weit auseinander. Dem Strand entlang fliegt ein Flugzeug, das von A und von B aus in gleicher Richtung gesehen wird. Zur gleichen Zeit misst man in A 43.1° und in B 27.6°. Wie gross ist die Flughöhe?

32.4. Beweisen Sie: $$\frac{1 + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\pi/4 + \alpha/2)$$

32.5. Gegeben sind: $\sin(\alpha) = 4/5$ und $\sin(\beta) = 5/13$.
Berechnen Sie sin, cos, tan und ctg von $\alpha + \beta$ und von $\alpha - \beta$ exakt.

Fortsetzung: Rückseite

32. *Fortsetzung:*

32.6. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$

b) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

c) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$

d) $\dfrac{\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$

e) $(\sin(\alpha)+\cos(\alpha)+1)(\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-1)$

f) $\sin^4(\alpha) - \cos^4(\alpha)$

g) $\dfrac{1}{\sin^2(\alpha)} + \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$

h) $\dfrac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$

i) $1 - \sin(\alpha)\tan(\alpha/2)$

j) $1 / \sin(2\alpha) + \mathrm{ctg}(2\alpha)$

k) $\tan(45^\circ + \alpha) - \tan(45^\circ - \alpha)$

l) $\dfrac{1}{\tan(\alpha/2) + \mathrm{ctg}(\alpha)}$

32.7. Beweisen Sie: $\dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)} = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$

32.8. $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = f(\tan(\alpha), \tan(\beta), \tan(\gamma))$. Was ist f für eine Funktion?

32.9. Zeigen Sie: $|\sin(\alpha) + \cos(\alpha)| \leq \sqrt{2}$

32.10. Verifizieren Sie: $\sin^4(\alpha) + \cos^4(\alpha) \geq 0.51$

32.11. Überprüfen Sie: $\forall_x$: $\sin(\cos(x)) < \cos(\sin(x))$

33. *Lösen Sie in* $[0, 2\pi]$ *die folgenden Gleichungen:*

33.1. $\sin^2(x) - 3\cos^2(x) = 1$

33.2. $2\cos^2(x) - 7\cos(x) + 3 = 0$

33.3. $\cos(x) + \mathrm{ctg}(x) = 1 + \sin(x)$

33.4 $\sin(x) + \cos(x) = 1 / \cos(x)$

33.5. $\tan(x) + \tan(2x) = 0$

33.6. $\sin(x) + \sin(2x) = 0$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

33. *Fortsetzung: Lösen Sie in* $[0, 2\pi]$ *die folgenden Gleichungen:*

33.7. $\dfrac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} = \tan(x)$

33.8. $\sin^6(x) + \cos^6(x) = 0.3$

34. *Aufgaben zum Thema "Geradengleichungen":*

34.1. Gegeben ist die Gerade g durch P_o und P_1 (kurz: $g = \overline{P_oP_1}$), $P_o(1/1/-2)$, $P_1(4/-2/1)$. Suchen Sie:

a) die Parametergleichung
b) die Komponentengleichungen
c) die Spurpunkte.
d) Liegt der Punkt (7/-12/4) auf g ?

34.2. Gegeben sind die beiden Geraden:

$$\vec{r_o} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Haben die beiden Geraden einen gemeinsamen Punkt? Oder sind sie etwa parallel oder etwa windschief?

34.3. Eine Gerade in der (x/y)-Ebene liegt || zur y-Achse mit $x = x_o$. Was ist die Koordinatengleichung?

34.4. Suchen Sie die Koordinartengleichung der folgenden Geraden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

34.5. Eine Gerade g ist gegeben durch die Punkte A(-2/4) und B(4/0) Suchen Sie folgende Gleichungen resp. beantworten Sie die Frage:

a) Vektorgleichung
b) Koordinatengleichung
c) Punkt-Richtungs-Form
d) Normalform.
e) Ist $(0/3) \in g$?

34.6. Suchen Sie den Schnittwinkel folgender Geraden:

$$g_1 : \ -4x + 6y - 12 = 0 , \qquad g_2 : \ 0.5x + y + 2 = 0$$

34.7. Gegeben ist g: $2x - y + 6 = 0$. Bestimmen Sie den Fusspunkt des Lotes vom Ursprung O aus auf g auf folgende Art:

a) Skizze
b) Steigung von g, Steigung des Lots
c) Gleichung des Lots
d) Schnittpunkt

Fortsetzung: Rückseite

34. *Fortsetzung:*

34.8. Gegeben sind die Punkte A(-2/2), B(1/6), C(4/4). Die Gerade g geht durch A und B, die Gerade g_1 durch C mit $\measuredangle(g, g_1) = \pi/6$. Bestimmen Sie die Geradengleichung von g_1 und den Schnittpunkt $D = g \cap g_1$.

34.9. A(5/8/-3), B(4/-3/-9). Was ist die Parametergleichung der Geraden $\overline{AB}$?

34.10. Gegeben ist die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suchen Sie:

a) Spurpunkte
b) Projektion auf die xy-Ebene

34.11. Es ist $g = \overline{CD}$, A(3/8/9), B(1/-10/-8), C(5/2/3), D(4/5/6). Ist $A \in g$ oder $B \in g$?

34.12. Was ist die gegenseitige Lage folgender Geraden?

$$g_1: \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad g_2: \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

34.13. Suchen Sie die Parametergleichung der Winkelhalbierenden durch A der Geraden $\vec{AP}$ und $\vec{AQ}$. Dabei ist A(3/-2/1) und:

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{AQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

34.14. Gegeben sind die folgenden windschiefen Geraden:

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad h: \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie eine horizontale Transversale der Länge 5.

34.15. Berechnen Sie die Schnittpunkte folgender drei Geraden:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

34.16. Berechnen Sie den Schnittwinkel folgender Geraden:
g_1: $10x + 7y + 16 = 0$, g_2: $12x - 17y - 14 = 0$

34.17. Gegeben ist der Punkt P(-4/6) sowie die Gerade g: $4x - 5y - 18 = 0$. Gesucht ist $g_1 \| g$ mit $P \in g_1$.

34.18. Gegeben ist das $\triangle$ ABC mit A(4/3), B(3/-6), C(-6/0). Gesucht ist der Höhenschnittpunkt.

Bemerkung: Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 12 / 13 **Klasse: ....**

Thema des Kapitels: Vektoren und Matrizen ISB, WIR90

---

35. *Eine Geometrieaufgabe:*

Gegeben sind die Gerade g: $2x - 3y + 6 = 0$ sowie die Punkte P(1/7) und Q(1/-6). Wenn man P und Q an g spiegelt, so erhält man die Punkte P' und Q'. Berechnen Sie $|PP'|$, $|QQ'|$ sowie die Schnittpunkte $\overline{PP'} \cap g$ und $\overline{QQ'} \cap g$.

36. *Aufgaben zum Thema "Ebenengleichungen":*

36.1. Gegeben sind die Punkte A(2/1/4), B(5/-5/-2) und C(-1/0/1).
Suchen Sie resp. beantworten Sie die Frage:

a) eine mögliche Parametergleichung
b) Komponentengleichungen
c) Koordinatengleichung
d) die Schnittpunkte "Ebene ∩ Koordinatenachse"
e) 1., 2. und 3. Spur
f) Liegt der Punkt (-10/-4/12) in der Ebene ?

36.2. Gegeben ist die Ebene $2x - 3y + z + 8 = 0$
Suchen Sie die Parametergleichung!

36.3. Gegeben ist der Punkt P(-5/6/4). Suchen Sie die Gleichungen der Hauptebenen durch P.

36.4. Gegeben ist die Gerade g: $\vec{r} = \vec{r}_o + \lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Suchen Sie die Gleichung der erstprojizierenden Ebene durch g!
b) Berechnen Sie die 2. Spur von g.

36.5. Gegeben sind die Ebene Φ sowie die Gerade g. Berechnen Sie $D = \Phi \cap g$.

Φ: $\vec{r}_\Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, g: $\vec{r}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

36.6. Gegeben sind die Ebenen Φ und Ψ. Suchen Sie die Gerade $g = \Phi \cap \Psi$.
Φ: $x - y + 4z - 2 = 0$, Ψ: $-2x + y + 2z + 4 = 0$.

36.7. Suchen Sie die Koordinatengleichungen folgender Ebenen:

a) Φ gegeben durch die Punkte A(1/-1/2), B(-2/0/3) und C(3/1/-2)

b) Ψ gegeben durch $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

36.8. Die Ebene Φ: $6x - 9y - 2z + 18 = 0$ bildet mit den Koordinatenebenen ein Tetraeder. Wie gross ist das Volumen dieses Tetraeders?

Fortsetzung: Rückseite

36. *Fortsetzung:*

36.9. Untersuchen Sie, ob $A \in \Phi$ ist!

a) $A(4/1.5/4.5)$, Φ: $2x + 3y - 3z + 1 = 0$

b) $A(-2/7/8)$, Φ: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

36.10. Eine Ebene Φ ist gegeben durch ihre 1. Spur $\vec{r_1}$ und ihre 2. Spur $\vec{r_2}$. Suchen Sie Φ !

$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

36.11. Suchen Sie den Durchstosspunkt $\Phi \cap g$ der Ebene Φ mit der Geraden g !

a) $\vec{r_\Phi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{r_g} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) Φ: $2x - y + 3z + 1 = 0$, $\vec{r_g} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

36.12. Suchen Sie die Schnittgerade $\Phi_1 \cap \Phi_2$ der Ebenen Φ_1 und Φ_2 !

a) Φ_1: $x - 2y + z + 3 = 0$, Φ_2: $x + y - 3z - 2 = 0$

b) Φ_1: $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Φ_2: $\vec{r_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

37. *Beantworten Sie folgende Fragen:*

a) Was ist die vektorielle Komponente von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$?

b) Was ist die skalare Komponente von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$?

c) Was ist die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^3$?

d) Wie lässt sich das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern ?

e) Was bedeutet das Kronecker-Symbol ?

f) Was sind die Richtungskosinuse eines Vektors im $\mathbb{R}^3$?

g) Was ist ein normierter Normalenvektor einer Ebene?

Bemerkung: Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 12 / 15 **Klasse: ....**

Thema des Kapitels: Vektoren und Matrizen ISB, WIR90

---

38. *Aufgaben zum Thema "Skalarprodukt und Anwendungen":*

38.1. Berschreiben Sie ein $\triangle$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Verifizieren Sie dann mit Hilfe des Skalarproduktes den Satz von Pythagoras.

38.2. Verifizieren Sie mit Hilfe des Skalarproduktes den Cosinussatz.

38.3. Bestimmen Sie den Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Berechnen Sie damit im $\triangle$ ABC den Winkel γ : A(1/1/2), B(-3/-4/-2), C(3/-1/5).

38.4. Berechnen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts die Richtungscosinuse eines Vektors $\vec{a}$ und beweisen Sie damit für diese Richtungscosinuse:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

38.5. Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Zerlegen Sie $\vec{b}$ in Komponenten nach $\vec{a}$ und $\vec{a}_\perp$. Wählen Sie dazu: A(3/5/7), B(2/3/4), C(1/5/8), D(4/7/12), $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{CD}$.

38.6. Zeigen Sie, dass sich die Höhen in einem Δ in einem Punkt schneiden.

38.7. Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P_o. Suchen Sie eine Ebene Φ mit $P_o \in \Phi$ und $g \perp \Phi$. Dabei ist :

$$P_o = P_o(1/1/1) \quad \text{und} \quad g: \ \vec{r}_g = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

38.8. Suchen Sie die Projektion des Punktes P auf die Ebene Φ !
Es ist P=P(1/1/1) und Φ: $2x + y - z + 1 = 0$.

38.9. Was ist der Schnittwinkel $\measuredangle(\Phi,\Psi)$ der Ebenen Φ und Ψ ?
Φ: $2x + y - z + 1 = 0$, Ψ: $-x + 2y + 3z - 2 = 0$
(Hinweis: Betrachten Sie den $\measuredangle$ zwischen den Normalen)

38.10. Suchen Sie den Schnittwinkel $\measuredangle(g,\Phi)$ der Geraden g und der Ebene Φ.

$$g: \ \vec{r}_g = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi: \ x + 2y - z = 0 \ !$$

38.11. Berechnen Sie $\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{c}-\vec{d} \rangle$. Dabei ist:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

38.12. Was sind die Richtungswinkel von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$?

Fortsetzung: Rückseite

38. *Fortsetzung:*

38.13. Berechnen Sie den $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

38.14. Gegeben ist $\triangle$ ABC mit A(-1/3/7), B(-5/4/3), C(6/-5/-4). Berechnen Sie die Innenwinkel des $\triangle$.

38.15. Berechnen Sie den Projektionsvektor von $\vec{AB}$ auf die Gerade $\overline{CD}$. A(-7/-5), B(0/-4), C(10/1), D(-6/13).

38.16. Berechnen Sie die vektorielle und die skalare Komponente von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

38.17. Beweisen Sie: In einem Rhombus stehen die Diagonalen normal aufeinander.

38.18. Zeigen Sie: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Seiten gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen.

38.19. Gegeben ist Φ: $3x - 2y + 4z - z = 0$. Suchen Sie die Hess'sche Normalform. Was ist der Abstand des Ursprungs von Φ ?

38.20. Gegeben ist der Punkt P(4/6) und die Gerade g: $2x - 3y - 6 = 0$. Was ist der Abstand von P zu g ?

38.21. Gegeben ist der Punkt P(4/1/1) und die Ebene Φ: $2x-y+z+2 = 0$ Was ist der Abstand von P zu Φ ?

38.22. Gegeben sind die Ebenen Φ und Ψ. Suchen Sie die Winkelhalbierende!

$$\Phi: \quad \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r} \right\rangle + 4 = 0, \qquad \Psi: \quad -x + y - z + 1 = 0$$

38.23. Gegeben ist P(2/2/-2) und Ψ: $x - 2y - 3z = 0$. Von Φ weiss man: $P \in \Phi \wedge \Phi \| \Psi$. Suchen Sie die Koordinatengleichung von Φ.

38.24. Gegeben ist P(2/-3/-1) und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Suchen Sie die Koordinatengleichung von Φ mit $P \in \Phi$ und $\vec{n} \perp \Phi$.

<u>Bemerkung:</u> **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

38. *Fortsetzung der Aufgaben zum Thema "Skalarprodukt und Anwendungen":*

38.25. Gegeben sind der Punkt P(-6/10/16) und die Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Suchen Sie die Koordinatengleichung der Normalebenen $\Phi \perp g$ mit $P \in \Phi$.

38.26. Gegeben sind die Punkte P(3/4/0) und Q(1/4/2) sowie die Gerade g:
$\vec{r}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie einen Punkt $R \in g$ mit $|PR| = |QR|$.

38.27. Gegeben sind die Punkte A(-1/-2/0) und B(1/1/2) sowie die Ebene Φ: $x + 2y + 2z - 4 = 0$. Suchen Sie die Koordinatengleichung einer Ebene Ψ mit $A \in \Psi$, $B \in \Psi$ und $\Phi \perp \Psi$.

38.28. Suchen Sie die Projektion von P(3/1/-1) auf Φ: $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

38.29. Die Gerade g' entsteht aus der Geraden g durch Spiegelung an Φ. Suchen Sie die Parametergleichung von g' !

g: $\vec{r}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, Ebene Φ: $x - 2y + 3z - 3 = 0$.

38.30. Ein Lichtstrahl aus einer punktförmigen Lichtquelle in P wird in A reflektiert und trifft dann in Q. Berechnen Sie die Normale des Spiegels, auf dem sich A befindet. A(3/-5/3), B(-1/-3/7), Q(-5/3/-1).

38.31. Gegeben sind die Ebenen Φ und Ψ. Suchen Sie $\measuredangle(\Phi,\Psi)$!
Φ: $2x + 3y + 4z - 6 = 0$, Ψ: $3x - 2y - z + 4 = 0$.

38.32. Gegeben sind g: $\vec{r}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Φ: $2x+3y+4z-6 = 0$

Berechnen Sie die Neigungswinkel $\measuredangle(g,\Phi)$.

38.33. Suchen Sie die Winkelhalbierende von g: $3x - 4y + 12 = 0$ und $h = 5x + 12y - 1 = 0$.

38.34. Gegeben sind die Ebenen Φ: $x - 2y + 2z - 9 = 0$ und Ψ: $x + 4y - 8z - 9 = 0$. Suchen Sie die Gleichung der Winkelhalbierenden Ebene.

38.35. Welche Punkte auf der Geraden g haben von Φ und Ψ gleiche Abstände?
Φ: $2x + 2y + z + 1 = 0$, Ψ: $2x - y + 2z - 1 = 0$,

g: $\vec{r}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fortsetzung: Rückseite

39. *Aufgaben zum Thema "Kreis, Kugel, Ellipse, Tangente, Pol, Polare, Potenz":*

39.1. Entscheiden Sie, ob folgende Gleichung eine Kugel darstellt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 36 = 0 .$$

39.2. Was sind die Schnittpunkte $L\{x^2+y^2-x+y-4=0\} \cap L\{2x-y+0.5=0\}$?

39.3. Suchen Sie die Schnittpunkte $K \cap g$ der Kugel K mit der Geraden g !

$$g: \ \vec{r}_g = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad K: \ (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 64$$

39.4. Gegeben sind die Kreise K_1 um $M_1(1/5)$ mit dem Radius $R_1 = 1$ und K_2 um $M_2(4/1)$ mit $R_2 = 2.5$. Gesucht ist ein Kreis K_3, der K_1 und K_2 berührt, K_1 umschliesst, K_2 aber ausschliesst.

39.5. Gegeben sind P_1 und P_2. Beweisen Sie: $\{P \mid \overline{PP_1} \perp \overline{PP_2}\}$ = Kreislinie resp. Sphäre (Thaleskreis resp. Thaleskugel).
Hinweis: Sei $\vec{OP} = \vec{r}$, $\vec{OP}_1 = \vec{r_1}$, $\vec{OP}_2 = \vec{r_2}$.
$\perp$ bedeutet $\langle \vec{r}-\vec{r_1}, \vec{r}-\vec{r_2} \rangle = 0$.

39.6. Gegeben seien P_1 und P_2. Beweisen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts: $\{P \mid |PP_1|:|PP_2| = \lambda\}$ = Kreislinie resp. Sphäre (Apolloniuskreis resp. Apolloniuskugel.

39.7. Gegeben ist ein Kreis K mit dem Mittelpunkt M(3/5) und dem Radius R = 4. Wenn Sie die x-Achse um den Faktor 2 strecken, entsteht im neuen Koordinatensystem eine neue Figur K'. Um was für eine Figur handelt es sich und wie lautet deren Gleichung? Versuchen Sie es auch mit anderen Streckungsfaktoren.

39.8. Gegeben ist eine Kugel K um M(2/1/-1) mit dem Radius R = 4 sowie auf dem Kugelrand ein Punkt $P_o(1/2/z)$ mit z maximal. Berechnen Sie die Tangentialebene in P_o.

39.9. Gegeben ist ein Kreis K um M(3/2) mir R = 5 und ein Punkt P(8/6). Konstruieren Sie von P aus die Tangenten an K mit Hilfe der Polaren.

39.10. Berechnen Sie die Tangente von $P_o(-2/5)$ aus an K: $x^2+y^2-x+2y-3=0$.
a) Mit Hilfe der Polaren.
b) Mit Hilfe der Diskriminanten.
c) Mit Hilfe der Hess'schen Normalform.

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

39. *Fortsetzung der Aufgaben zum Thema "Kreis, Kugel, Ellipse, Tangente, Pol, Polare, Potenz":*

39.11. Gegeben ist die Polarenebene Φ: $2x - y + z - 2 = 0$ und die Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 4 = 0$. Berechnen Sie den Pol !

39.12. Gegeben sind die Kreise K_1 mit $M_1(1/3)$ und $R_1 = 2$ sowie K_2 mit $M_2(0/1)$ und $R_2 = 3$. Suchen Sie die Potenzgerade !

40. *Repetitionsfragen: Was bedeuten die folgenden Betriffe?*

a) Pol b) Potenzgerade c) Potenz

e) Polare f) Sehnensatz g) Tangentensatz

h) Sekantensatz i) Potenzebene j) Apolloniuskugel

41. *Um was für Kurven handelt es sich?*

41.1. $x(t) = (x_1 - t\, x_2)/(1 - t)$, $y(t) = (y_1 - t\, y_2)/(1 - t)$

41.2. $x(t) = R \cos(t)$, $y(t) = R \sin(t)$

41.3. $\{P\} = ?$ $\overrightarrow{AP}^2 + \overrightarrow{BP}^2 = s$, $A(-c/0)$, $B(c/0)$

41.4. Gegeben ist ein Kreis um O mit Radius R, $A = A(-R/0)$, $P_o \in K$, $K = \{P \mid \overrightarrow{OP}^2 = R^2\}$, $B = B(R/0)$. Weiter brauchen wir folgende Geraden: $g = \overline{AB}$, $h = \overline{OP}$, $j \,||\, h$ mit $B \in j$. Sei $S = g \cap j$. $\{S(P_o)\} = ?$

41.5. Gegeben sei g: $y = -2x$ und h: $y = x$. Auf g wählen wir einen Punkt A und ziehen durch A die Parallelen zur x- und zur y-Achse. Diese Parallelen schneiden h in B und die x-Achse in C. Dann bestimmen wir den Punkt $D \in$ x-Achse, der das Rechteck ABCD vervollständigt. M sei der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Rechtecks. Welche Kurve beschreibt M, wenn A auf g bewegt wird?

42. *Aufgaben zum Thema "Vektorprodukt":*

42.1. Erläutern Sie die folgenden Begriffe:

a) Flächenprodukt b) Determinanteneigenschaft des Flächenprod.

c) Vektorprodukt d) Cramersche Regeln

Fortsetzung: Rückseite

42. *Fortsetzung:*

42.2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Gesucht ist der Flächeninhalt des Parallelogramms ($\vec{a}$, $\vec{b}$).

42.3. Gegeben sind die Punkte A(2/3), B(3/7) und C(-1/4). Berechnen Sie den Flächeninhalt des $\triangle$ABC sowie den Flächeninhalt des durch A, B und C definierten Parallelogramms.

42.4. Gegeben ist ein $\triangle$ABC mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als Seitenvektoren. Beweisen Sie den Sinussatz mit Hilfe der Beziehung $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ sowie dem Flächenprodukt.

42.5. Lösen Sie das folgende Gleichungssysstem mit Hilfe der Cramerschen Regeln:

$$\begin{array}{rcr|} 2x + 3y & = & 4 \\ -x + 2y & = & -5 \\ \hline \end{array}$$

42.6. Gegeben sind A(1(0/2), B(4/-3/5), C(-2/2/6) $\in R^3$. Berechnen Sie einen normierten Normalenvektor $\vec{n}$ auf die durch A,B und C definierte Ebene sowie den Flächeninhalt des durch A, B und C bestimmten Parallelogramms

42.7. Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{vmatrix}$

42.8. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regeln:

$$\begin{array}{rcr|} 3x + 7y - 19 & = & 0 \\ 2x - y - 7 & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

42.9. Gegeben ist das $\triangle$ ABC: A(-1/2), B(3/4), C(5/-6). Berechnen Sie den Flächeninhalt.

42.10. Gegeben ist das Viereck ABCD: A(-2/-2/, B(2/6), C(4/-5), D(10/-4). Berechnen Sie den Flächeninhalt.

42.11. Gegeben ist das $\triangle$ ABCD: A(1/-1/3), B(2/1/3), C(4/1/-3). Berechnen Sie den Flächeninhalt.

Bemerkung: Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

42. *Fortsetzung der Aufgaben zum Thema "Vektorprodukt":*

42.12. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $< \vec{a}, \vec{b} >$ und $\vec{a} \times \vec{b}$.

42.13. Gegeben sind P, g_1 und g_2. Bestimmen Sie die Parametergleichung einer Geraden g mit $P \in g$, $g_1 \perp g$ und $g_2 \perp g$. Dabei ist:

$P = P(1/0/3)$, g_1: $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{r_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

42.14. Zu drei Punkten auf einer Geraden gehören die Ortsvektoren $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ und $\vec{r_3}$. Beweisen Sie folgenden Sachverhalt:

$$(\vec{r_1} \times \vec{r_2}) + (\vec{r_2} \times \vec{r_3}) + (\vec{r_3} \times \vec{r_1}) = 0$$

42.15. Zeigen Sie, dass folgende Beziehung richtig ist:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2 - < \vec{a}, \vec{b} >^2$$

(Schreibweise: $< \vec{r}, \vec{r} > = \vec{r}^2$.) Verifizieren Sie damit die Formel von Heron für den Flächeninhalt von Dreiecken:

$$F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \quad \text{mit} \quad s = (a+b+c)/2$$

43. *Aufgaben zum Thema "Spatprodukt und Determinanten":*

43.1. Zeigen Sie: Das durch A(5/2/1), B(-6/3/2), C(2/5/2) und D(0/0/-2) definierte Spatvolumen ist 0.

43.2. Berechnen Sie mit Hilfe des Entwicklungssatzes den Wert folgender Determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = D$$

43.3. Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von Sarrus det(A):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

43.4. Berechnen Sie dieselbe Determinanten wie in 43.2. und 43.3. mit Hilfe von Elementarumformungen (Pseudodiagonalisierung).

Fortsetzung: Rückseite

43. *Fortsetzung:*

43.5. Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 42 & 22 \\ 57 & 127 & 68 \\ 76 & 163 & 91 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

43.6. Lösen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regeln das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl|} 3x & - & 5y & + & 4z & - & 5 & = & 0 \\ 7x & + & 2y & - & 3z & - & 2 & = & 0 \\ 4x & + & 3y & - & 7z & - & 11 & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

43.7. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr|} & & y & - & z & + & w & = & -1 \\ & & x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & - & w & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 2z & + & w & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

43.8. Sei C = E + B, B aus 43.5.. Sei $\vec{v} = (1, 1, 1, 1, 1)^t$.
Schreiben Sie ein Programm um die folgende Gleichung zu lösen:

$$C\,\vec{x} = \vec{v}$$

43.9. Gegeben ist das Tetraeder ABCD. Berechnen Sie das Volumen mit Hilfe des Spatproduktes: A(0/0/0), B(12/0/0), C(1/7/4), D(2/3/8).

43.10. Gegeben ist die Gerade g: $\vec{r}(\lambda) = \vec{r_0} + \lambda\,\vec{a}$ sowie der Punkt $P_0 \notin g$. Berechnen Sie den Abstand von P_0 zu g mit Hilfe des Vektorprodukts. $P_0(-18/24)$, $\vec{r_0} = (1, -2)^t$, $\vec{a} = (1, 1)^t$.

43.10. Gegeben ist die Ebene Φ: $\vec{r}(\lambda, \mu) = \vec{r_0} + \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$ sowie der Punkt Q_0. Berechnen sie mit Hilfe des Spatproduktes den Abstand von Q_0 und Φ.
$Q_0(-1/1/-12)$, $\vec{r_0} = (1/1/1)^t$, $\vec{a} = (-4/5/3)^t$, $\vec{b} = (2/-3/7)$.

43.11. Untersuchen Sie, ob für das Grassmannprodukt das Kommutativgesetz gilt.

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

44. *Aufgaben zum Thema "lineare Gleichungssysteme":*

44.1. Verschaffen Sie sich Klarheit über folgende Begriffe:

a) Lineare Gleichung
b) Gleichungssystem
c) Homogene Gleichung
d) Inhomogene Gleichung
e) Paritkuläre Lösung
f) Allgemeine Lösung
g) Lösungsraum
h) Lineare Mannigfaltigkeit
i) Geradenbüchel
j) Ebenenbüschel
k) Geradenbündel
l) Ebenenbündel
m) Homogene Erweiterung
n) Linear abhängiges Gleichungssystem
o) Rang eines Systems
p) Ordnung eines Systems
q) Elementarsubstitution
r) Pivot-Element
s) Matrixprodukt
t) Nullmatrix
u) Einheitsmatrix
v) Diagonalmatrix
w) Dreiecksmatrix
x) Transponierte Matrix
y) Symmetrische Matrix
z) Gauss-Jordan-Verfahren

44.2. Suchen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung $2x_1 - 3x_2 + 6 = 0$

44.3. Lösen Sie allgemein: $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7$

44.4. Schreiben Sie die Gleichung aus 44.3. in homogener Form.

44.5. Was ist in 44.3. die Dimension der Lösungsmannigfaltigkeit?

44.6. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Eliminationsmethode (Elementarsubstitutionen):

$$\begin{array}{rcrcrcrcl|} 3x &+& y &-& z &-& 11 &=& 0 \\ x &+& 3y &-& z &-& 13 &=& 0 \\ x &+& y &-& 3z &-& 11 &=& 0 \\ \hline \end{array}$$

Bestimmen Sie Ordnung und Rang des Systems sowie dim(**L**).

Fortsetzung: Rückseite

44. *Fortsetzung der Aufgaben zum Thema "lineare Gleichungssysteme":*

44.7. Berechnen Sie die Lösungsmenge und deren Dimension und bestimmen Sie dann noch Ordnung und Rang des Systems:

a) $\begin{array}{rcrcl} 1x & - & 2y & = & 0 \\ 0x & + & 0y & = & 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcl} 1x & + & 2y & = & 2 \\ 0x & + & 0y & = & 2 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcr} 1x & - & 2y & = & 1 \\ -2x & + & 4y & = & -2 \end{array}$

d) $\begin{array}{rcrcl} 1x & - & 2y & = & 1 \\ 2x & - & 4y & = & 2 \\ 3x & - & 6y & = & 5 \end{array}$

e) $\begin{array}{rcrcl} 1x & - & 2y & = & 1 \\ 2x & - & 4y & = & 2 \\ 1x & + & 1y & = & 4 \end{array}$

f) $\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2 & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 2z & + & 2 & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & z & & & = & 0 \end{array}$

44.8. Können Sie mit Hilfe des Rangsatzes eine Methode finden, die es erlaubt zu prüfen, ob eine Menge von Vektoren linear unabhängig ist?

44.9. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe des Verfahrens von Gauss-Jordan:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & - & 4x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & + & x_5 & = & -6 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 7x_3 & + & 7x_4 & + & 3x_5 & = & -7 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 5x_5 & = & -3 \end{array}$$

45. *Aufgaben zur Matrizenrechnung:*

45.1. Gegeben sind die folgenden Matrizen und Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie damit:

a) $A + B$ b) $A\,\vec{u} + A\,\vec{v})$ c) $7(A\,\vec{u})$

d) $A\,\vec{u} + B\,\vec{u}$ e) $A\;B$ f) $B\;A$

45.2. Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$, falls möglich:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

45. *Fortsetzung der Aufgaben zum Thema "Matrizenrechnung":*

45.3. Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$, falls möglich:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

45.4. Zeigen Sie, dass folgende Matrix S eine Zentralstreckung bewirkt:

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots \; \lambda \end{pmatrix}$$

45.5. Geben Sie eine Matrix, die im $\mathbb{R}^3$ die 2. Koordinate um den Faktor 5 streckt.

Z.B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

45.6. Geben Sie eine Matrix, die im $\mathbb{R}^3$ die 2-te Koordinate spiegelt. (Spiegelung an der xz-Ebene.)

45.7. Geben Sie eine Matrix, die im $\mathbb{R}^2$ einen beliebigen Vektor um das Drehzentrum 0 um den Winkel ϕ dreht.

45.8. Geben Sie eine Matrix, die einen beliebigen Vektor im $\mathbb{R}^3$ um $\pi/6$ um die x_2-Achse dreht. Was ist dann das Bild von $\vec{v} = (1, 1, 1)^t$?

45.9. Schaffen Sie sich Klarheit über die folgenden Begriffe:

a) Reguläre Matrix b) Affinität c) Nullteilerfreiheit

45.10. Zeigen Sie: Eine reguläre Matrix im $\mathbb{R}^2$ stiftet eine lineare Abbildung, die geradentreu ist und Streckenverhältnisse invariant lässt.

45.11. Überlegen Sie sich, aus welchen Matrizen eine Affinität im $\mathbb{R}^2$ zusammengesetzt werden kann.

45.12. Berechnen Sie die Inverse A^{-1} zu folgenden Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Fortsetzung: Rückseite

45. *Fortsetzung der Aufgaben zum Thema "Matrizenrechnung":*

45.13. Was für algebraische Strukturen mit Matrizen kennen Sie?

45.14. Lösen Sie die folgende Gleichung: $3\,X \cdot A + 9\,A - 6\,B + 2\,E = N$

mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

45.15. Prüfen Sie, ob $A \cdot B = B \cdot A$ ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

45.16. Prüfen Sie mit A und B, ob die Menge der regulären Matrizen im $\mathbb{R}^2$ bezüglich Addition und Multiplikation abgeschlossen ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

45.17. Prüfen Sie die Nullteilerfreiheit der Matrizen im $\mathbb{R}^2$ mit A und B:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

45.18. Berechnen Sie X:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \right] + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

45.19. Bestimmen Sie die Inversen folgender Matrizen A nach dem Verfahren von Gauss-Jordan, sofern das möglich ist:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

45.20. Bestimmen Sie $\det(A)$ und $\det(A^{-1})$:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^4$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

45.21. Berechnen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Fixgerade:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -0.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*