Uebungen - Praktikum Kap. 23 / 1

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung ISB, WIR90

---

1. *Was bedeuten die folgenden Begriffe - ist die Bedeutung immer in einer Definition fassbar?*

a) Massenereignis	b) Zufallsexperiment
c) Zufall	d) Zufallsbeobachtung
e) Absolute Häufigkeit	f) Relative Häufigkeit
g) Summenereignis	h) Produktereignis
i) Ausschliessende Ereignisse	j) Äquivalente Ereignisse
k) Sicheres Ereignis	l) Unmögliches Ereignis
m) Häufigkeitsmenge	n) Gleichwahrscheinlichkeit
o) Gewinnchance	p) Klassische Wahrscheinlichkeit
q) Statistische Regelmässigkeit	r) Stabilität der relativen Häufigkeit
s) Komplementäres Ereignis	t) Axiomatische Wahrscheinlichkeit
u) Grundgesamtheit	v) Ereignisraum

2. *Nennen Sie Zufallsexperimente.*

3. *Berechnen Sie die relative und die absolute Häufigkeit des Ereignisses E :*

   3.1. 12 mal wird gewürfelt. 3 mal tritt dabei das Ereignis "Zahl 6" auf.

   3.2. Wir ziehen eine Karte aus einem gemischten Kartenspiel (36 Karten). 100 mal wiederholen wir dieses Experiment. Dabei haben wir 9 mal Glück und erwischen einen "König" (Ereignis E).

4. *Bei* 68 *Geburten im Regionalspital registrierte man* 37 *mal ein Mädchen. Beim Zufallsexperiment "Registrierung des Geschlechtes" sei* A *das Ereignis "Junge" und* B *das Ereignis "Mädchen". Was ist das Summen- und was das Produktereignis? Sind die Ereignisse äquivalent? Sind sie ausschliessend? Gibt es hier ein sicheres Ereignis? Gibt es ein unmögliches Ereignis?*

5. *Beantworten Sie dieselben Fragen wie bei Aufgabe 4, wenn folgende Situation gegeben ist:*

   Ereignis A: "Würfeln einer geraden Zahl"
   Ereignis B: "Würfeln einer durch 3 teilbaren Zahl"
   Ereignis C: "Würfeln der Zahl 1"

Fortsetzung: Rückseite

6. *Mit einem gleichmässigen Würfel würfelt jemand 12 mal und erzielt folgende Serie von Punkten:*

2, 4, 5, 1, 2, 6, 3, 1, 1, 5, 6, 3

a) Was ist die Grundgesamtheit?

b) Was ist die Häufigkeitsmenge?

c) Was ist die Häufigkeitsmenge des Ereignisses E: "Resultat ist die Zahl 1"?

d) Was ist die relative Häufigkeit des Ereignisses E?

7. *Beim gleichzeitigen Würfeln mit 2 Würfeln entsteht folgende Serie von Zahlenpaaren:*

(2, 3), (3, 5), (1, 3), (4, 6), (1, 6), (1, 6), (2, 2), (4, 6), (4, 6), (5, 6),
(2, 6), (1, 1), (2, 5), (1, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (3, 3), (1, 1)

Ereignis A: "Mindestens eine der Zahlen des Paares ist durch 3 teilbar"
Ereignis B: " Beide Zahlen sind gerade"

a) Grundgesamtheit? b) $h(A) = ?$

c) $h(B) = ?$ d) $h(A \cap B) = ?$

e) $h(A \cup B) = ?$ f) $h(G) = ?$

8. *Entscheiden Sie, ob folgende Frage mit dem klassischen Wahrscheinichkeitsbegriff behandelt werden kann:*

Zufallsexperiment Z: "Simultanes Würfeln mit drei gleichmässigen Würfeln, 2 Versuche"

Ereignis A: "Mindestens mit einem Würfel würfeln einer 6"

Falls Sie das Problem klassisch behandeln können:

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit P(A)?

9. *Kann man bei statistischen Ereignissen (z. B. würfeln mit unsymmetrischen Würfeln) den Begriff der klassischen Wahrscheinlichkeit weiterhin verwenden? Welche Rolle spielen hier die Begriffe "gleichwahrscheinlich" und "praktische Gewissheit"?*

Bemerkung: Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 23 / 3 **Klasse: ....**

Thema des Kapitels: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung ISB, WIR90

---

10. *Erklären Sie folgende Begriffe:*

    a) Bedingte Wahrscheinlichkeit b) Unabhängige Ereignisse

11. *Von 100 Kundinnen und Kunden kauften 45 die bei der Kasse ausgestellte und angepriesene Lully-Electronic-Superfreizeit-Play-Maschine. 51 Kundinnen haben jetzt schon das Verkaufslokal besucht. Der Ladendiener hat 80 mal gelächelt. Er lächelt nur, wenn eine Dame oder ein Käufer das Lokal verlässt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, einer eintretenden Person eine solche Maschine zu verkaufen?*

12. *Gegeben ist eine Schachtel mit 10 Kugeln. 3 sind grün, die anderen rot. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 2 Zügen ohne zurücklegen nur rote Kugeln bekommen?*

13. *Aus einem gut gemischten Jasskartenspiel zieht ein Spieler blind eine Karte, schaut sie an und steckt sie dann wieder zurück. Darauf zieht er blind nochmals eine Karte. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, auf diese Weise 2 mal ein As zu ziehen?*

14. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto (6 aus 49) einen 6-er zu haben? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, einen 4-er zu haben?*

15. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Sport-Toto 13 richtige zu tipen?*

16. *Erklären Sie die folgenden Begriffe:*

    a) Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

    b) Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung

    c) Wahrscheinlichkeitsdichte

17. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 3 mal würfeln 2 mal eine 6 oder mindestens einmal eine 3 kommt?*

18. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf mit 3 Würfeln alle Zahlen verschieden sind?*

19. *Eine Münze wird 4 mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für die folgende Serie?*
    Kopf - Zahl - Kopf - Kopf

Fortsetzung: Rückseite

19. *Aus einer Sendung von 1000 Teilen hat ein Kontrolleur "zufällig" 50 Teile herausgegriffen. 6 Teile davon musste er beanstanden: 3 Teile hatten Kratzer, 2 hatten Risse, 1 Teil hatte sogar Kratzer und Risse.*

   a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil Kratzer oder Risse hat?

   b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil Kratzer und Risse hat?

20. *Bei Ein-Kind-Familien ist die Vererbung der Haarfarbe erfasst worden. Der "Feldversuch" brachte folgende Ergebnisse: 471 blonde Mütter hatten ein blondes Kind. 151 hingegen ein dunkles Kind. Bei 148 dunkeln Müttern war das Kind blond, bei 230 dunkeln Müttern dagegen war das Kind dunkel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine blonde Mutter wieder ein blondes Kind hat?*

21. *Der Lieferfirma ist bekannt, dass bei der Empfängerfirma ein Kontrolleur aus jeder Sendung von Werkteilen 10% der Stücke zufällig herausgreifen und kontrollieren muss. Falls alle geprüften Teile gut sind, wird die Sendung akzeptiert. Da bei der Fabrikation letzthin einiges schief gelaufen ist, stellt man sich nun bei der Lieferfirma folgende Überlegungen an:*

   a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sendung akzeptiert wird, obwohl 20 % der Teile unbrauchbar sind?

   b) Wieviele Teile dürfen unbrauchbar sein, damit man 50% Chance hat, dass der Empfänger die Sendung akzeptiert?

22. *Ein Artikel besteht aus den 3 Teilen "X1", "RX" und "X71R". Die Wahrscheinlichkeit, dass X1 oder RX defekt sind beträgt 5%, die Wahrscheinlichkeit aber, dass X71R defekt ist, beträgt 9 %. Was lässt sich aussagen über die Wahrscheinlichkeit, dass nichts defekt ist?*

23. *Pferderennen: 34 Tiere laufen. Ein Insider hat uns verraten, dass entweder Triton, Collo oder Malac der Sieger sein wird. Triton hat von 9 Rennen 7 gewonnen. Der junge Collo kommt aus einem Südstaat und war da in 4 Rennen nur im ersten nicht Sieger. Malac soll in Übersee für den Preis eines ganzen Rennstalles gekauft worden sein und läuft hier das erste Mal. Sie setzen auf alle drei Tiere je gleichviel. Wenn eines der Tiere gewinnt, bekommen Sie den 17-fachen Betrag der gesetzten Summe. Was rechnen Sie sich für eine Chance aus?*

24. *Was ist die Chance, dass bei dreimaligem Würfeln mindestens einmal eine Zahl grösser als 4 kommt?*

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

25. *Drei Clowns spielen in der Manege russisches Roulet, jedoch auf eine humorvolle, humane Weise. Statt auf den eigenen Kopf zielt der Lauf rückwärts auf den Ballon über dem Kopf des jeweils nächsten Clown-Bruders. Die drei haben einen präparierten Revolver mit 12 Patronenplätzen, wobei der grössere Clown nur eine Patrone lädt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass noch keiner in der 1. Runde den Ballon des anderen erschiesst, falls jeder 2 mal drücken darf und dann den Revolver dem nächsten weitergibt, wobei der nächste wieder drehen muss. Was passiert, wenn der nächste jeweils das Drehen vergisst? Mit welcher Wahrscheinlichkeit knallt's dann beim ersten Versuch des letzten Clowns?*

26. *Für eine Reportage wählt man aus einem Interessentenkreis von 94 jungen Menschen 9 aus. Aus medizinischen Untersuchungen wissen wir: 15% jener Population ist drogenabhängig. Da bei der Sendung heikle familiäre Fragen angeschnitten werden und auch ein neuer Energiespender für spezielle obere Hochleistungsberufe vorgestellt werden soll, der allerdings zusammen mit Drogen zu sofortigen heftigen paranoiden Reaktionen führen kann, wäre es sehr peinlich, gerade an einen Drogensüchtigen zu geraten. Wie gross ist die Chance eines Tumultes vor der Kammera, wenn 4 der jungen Leute den Energiespender bekommen sollen?*

27. *1980 hatte die USA rund 200 Milionen Einwohner. Im 2. Weltkrieg sind 407316 Amerikaner gefallen, (im 1. waren es "nur" 116708, im Sezzessionskrieg hingegen 498332 !), im Koreakrieg 54246, im Vietnamkrieg 58665 im Golfkrieg 378. Dagegen betrug die Zahl der Abgänge noch vor der Geburt durch Abtreibung in den Jahren 1973-82 rund 10'000000. Wir nehmen eine mittlere Lebenserwartung, d. h. eine mittlere Regenerationszeit der Bevölkerung von 65 Jahren an. Wie gross war dann die Chance eines Amerikaners, zur Welt zu kommen und nicht im Krieg zu fallen in den Jahren seit Ausbruch des 2. Weltkriegs bis 1982 etwa? Wie gross war seine Überlebenschance in Kriegen?*

28. *Was ist der Unterschied zwischen Zählexperimenten und Messexperimenten?*

29. *Was ist der Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeitsmodell und Realität?*

30. *Was bedeuten folgende Begriffe?*

    a) Zufallsvariable b) Stochastische Funktion

    c) Wahrscheinlichkeitsfunktion d) Verteilungsfunktion (Zus'hang mit c)?)

31. *Berechnen Sie bei einem Würfel die folgenden Wahrscheinlichkeiten:*

    a) $P(X=1)$ b) $P(1<X<2)$ c) $P(1\leq X<6)$

    d) $P(2/3<X<5/2)$ e) $P(X<5)$

Fortsetzung: Rückseite

32. *In einer Schachtel liegen 4 rote und 6 gelbe Kugeln. 2 werden ohne zurückzulegen gezogen. X = Anzahl der gezogenen roten Kugeln. Berechnen Sie:*

a) $P(X=0)$ b) $P(X=1)$ c) $P(X=2)$

d) $P(X=0 \vee X=1 \vee X=2)$ e) $P(1< X <2)$ f) $P(X \leq 1)$

f) $P(X \geq 1)$ g) $P(X>1)$ h) $P(0.5<X<10)$

33. *Skizzieren Sie die Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion und der Verteilungsfunktion beim Würfeln mit zwei Würfeln.*

34. *Skizzieren Sie Wahrscheinlichkeintsfunktion und Verteilungsfunktion:*

34.1. X = "Anzahl Kopf beim einmaligen Wurf einer Münze"

34.2. X = "Augensumme beim Würfeln mit 3 Würfeln"

34.3. X = "Anzahl Köpfe beim gleichzeitigen Wurf von 4 Münzen"

34.4. X = "Anzahl Würfe beim Würfeln mit einem Würfel bis zum Eintreffen einer 6"

35. *Gegeben sei folgende Funktion:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{2^x} & \text{für } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie F(x)!

b) Ist f(x) eine Wahrscheinlichkeitsfunktion?

36. *Bei der Kontrolle von Werkstücken werden zufällig zwei Stücke gezogen ohne zurückzulegen. Wir nehmen an, 10 Stücke seien vorhanden, 4 davon seien defekt.*
Sei X = "Anzahl defekter Stücke unter den gezogenen".
Skizzieren Sie f(x) *und* F(x).

37. *Was ist eine stetige Zufallsvariable? Was haben* f(x) *und* F(x) *dann für eine Bedeutung?*

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

38. *Beim Rouletspiel sei* X *der Winkel des Zeigers mit der Nordrichtung:* $0 \le X < 2\pi$
Entwerfen Sie die Graphen von $F(x)$ *und* $f(x)$.

39. *Untersuchen Sie* $F(x)$ *und bestimmen Sie gegebenenfalls die fehlenden Parameter bei bei folgenden Wahrscheinlichkeitsdichten:*

39.1. $f(x) = \begin{cases} kx & x \in [0, 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

39.2. $f(x) = \begin{cases} kx & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

39.3. $f(x) = c\, e^{-\alpha x}$ $c, \alpha = ?$

39.4. $f(x) = \begin{cases} c\, e^{-\alpha x} & x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

40. *Verschaffen Sie sich Klarheit über die Bedeutung folgender Begriffe:*

a) Masszahl einer Verteilung
b) Momente einer Verteilung
c) Mittelwert μ einer Verteilung
d) Varianz σ^2 einer Verteilung
e) Standardabweichung σ einer Verteilung
f) Streuung
g) Schiefe γ einer Verteilung
h) Mathematischer Erwartungswert
i) Durchschnittliche Erwartung
j) Momenterzeugende Funktion

41. *Berechnen Sie falls möglich Mittelwert und Standardabweichung der Verteilung:*

41.1. X = "Augenzahl beim Würfeln, $f(x_i) = 1/6$ für $x_i = 1, 2, \ldots, 6$

41.2. $f(x_1) = 1/10$; $f(x_2) = 2/10$; $f(x_3) = 4/10$;
$f(x_4) = 1/10$; $f(x_5) = 1/10$; $f(x_6) = 1/10$

41.3. $f(x) = \begin{cases} kx\,, & x \in [0\,, a] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

41.4. $f(c + x) = f(c - x)$ (symmetrisch)

41.5. X = "Anzahl 6 beim Wurf mit 2 Würfeln"

41.6. X = "Anzahl Würfe bis zu einer 6 beim Würfeln"

41.7. X = "Anzahl Köpfe beim einmaligen Wurf einer Münze"

41.8. $X = x/2$ für $0 \le x \le 2$, $X = 0$ sonst

Fortsetzung: Rückseite

42. *Vor dem Spiel zahlt Peter an Paul einen Betrag, der der durchschnittlichen Gewinnerwartung beim Spiel entspricht. Dann darf Peter würfeln. Sie haben folgendes vereinbart: Falls das Resultat 1 oder 2 ist, erhält Peter von Paul Fr. 10.- . Falls das Resultat 3 oder 4 ist, erhält Peter von Paul Fr. 20.- . Bei Resultat 5 erhält er Fr. 40.- , bei Resultat 6 erhält er Fr. 80.- . Was ist die durchschnittliche Gewinnerwartung, wenn das Spiel "statistisch gerecht" sein soll?*

43. *Peter und Paul würfeln mit 2 Würfeln. Peter zahlt beim Spiel an Paul soviel Franken, wie das Produkt der gewürfelten Zahlen beträgt. Wieviel muss Paul zuerst an Peter bezahlen, damit das Spiel fair ist?*

44. *Bei einer Lotterie werden für Fr. 30'000.- Lose ausgegeben zu Fr. 1.50. Als Gewinn winkt eine Reise zu Fr. 20'000.- . Wie gross ist die Gewinnerwartung eines Teilnehmers, der 5 Lose kauft?*

45. *Wie gross ist Mittelwert und Varianz von* $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ *?*

46. *Wie gross ist die Schiefe der folgenden Verteilung?* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x\, e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

47. *Wie sind die folgenden Verteilungen definiert?*

    a) Binomialverteilung b) Bernoulliverteilung

    c) Pascal-Verteilung d) Poissonverteilung

    e) Hypergeometrische Verteilung f) Gauss-Verteilung

48. *Was besagen die folgenden Sätze?*

    a) Grenzwertsatz von Moivre und Laplace

    b) Gesetz der grossen Zahlen von Bernoulli

49. *Bernoulli-Experiment, 8 mal wiederholt. Erfolgswahrscheinlichkeit beim Einzelversuch = 1/3. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, 5 mal Erfolg zu haben? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, 5 oder mehr mal Erfolg zu haben?*

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.** *Falls möglich, sind die Resultate mit* **Mathematica** *zu kontrollieren.*

50. *In einem Kartenspiel mit 32 Karten kommt 4 mal ein As vor. Felix zieht 6 mal eine Karte und legt sie anschliessend wieder zurück. Vor jeder Ziehung wird neu gemischt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 mal ein As kommt?*

51. *Bei einem eingespannten Gewehr ist die Trefferwahrscheinlichkeit für einen 5-er 0.1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mit 10 Schuss mindestens ein Treffer erzielt wird?*

52. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 6-maligem Würfeln mindestens 3 mal die 3 kommt?*

53. *Wir würfeln 1 mal mit 4 Würfeln. Wir gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine 6 oder eine 1 erzielt wird?*

54. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Serie von 15 Messungen 14 mal die letzte Ziffer eine 5 ist?*

55. *Bei einem Experiment sind positive und negative Messergebnisse gleichwahrscheinlich. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 20-maliger Wiederholung höchstens 1 mal ein negatives Ergebnis vorkommt?*

56. *In einer Werkstatt arbeiten 20 Arbeiter unabhängig voneinander. Jeder braucht die Bohrmaschine durchschnittlich während 6 Minuten pro Stunde. Genügen 5 Bohrmaschinen, wenn man zu grosse Wartezeiten vermeiden will?*

57. *In einer Serienproduktion werden Widerstände zu 20 Ω gefertigt. Die Firma garantiert eine Toleranz von $\pm$ 1.0 Ω . Die Wiederstände werden in Packungen zu 100 Stück geliefert. Aus Erfahrung weiss man, dass die Wahrscheinlichkeit bei der Produktion die Toleranz überschreiten, 0.5 % beträgt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer Packung mindes tens ein fehlerhaftes Stück befindet?*

58. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Dorfe mit 2000 Einwohnern mindestens 2 Einwohner am 1. April Geburtstag haben?*

59. *In einer Urne befinden sich 11 rote und 3 schwarze Kugeln. 4 Kugeln werden ohne zurückzulegen gezogen. Wie gross ist*

$$P(X \text{ sind rot}) , \quad X = \text{"Anzahl Kugeln"}$$

für x = 0, 1, 2, 3, 4 ?

Fortsetzung: Rückseite

60. *Halbfabrikat-Teile werden in Packungen zu 150 Stück geliefert. Nach dem Liefervertrag ist maximal 5% Ausschuss zulässig. Bei der Eingangskontrolle soll jede Packung gröffnet und die oberste Lage Teile begutachtet werden. Eine Lage enthält 10 Teile. Falls so kein defektes Stück entdeckt wird, will man die Packung akzeptieren, andererseits soll sie zurückgesandt werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung retour geht, obwohl sie weniger als 5% defekte Stücke enthält?*

60. *Vergleichen Sie die Verteilungsfunktion der hypergeometrischen Verteilung mit "$N=1000$, $M=20$, $n=100$" mit der Binomialverteilung mit "$p=0.02$ und $n=100$".*

61. *X sei die Dicke eines Werkstücks. Der Sollwert von X beträgt $\mu = 20$ mm. Aus Erfahrung wissen wir, dass X normalverteilt ist mit einer Schwankung $\sigma = 0.01$ mm. Als Toleranz ist ± 0.04 mm verlangt worden. Wieviel % Ausschuss müssen wir erwarten?*

62. *Sie wissen aus Erfahrung, dass Sie an der Fachmesse in 8% der Kundenkontakte Ihre grossartige Erfindung verkaufen können. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei 500 Kundenkontakten mindestens Ihre 25 mitgebrachten Ausstellungsstücke verkaufen können?*

63. *Die α-Teilchenzählung nach Rutherford und Geiger ergab folgende Resultate:*

Sei X = "Anzahl Teilchen"
Z = "Anzahl beobachtete Zeitintervalle zu 7.5 sec mit X Teilchen"

X_k	$A_{beobachtet}$ (n_k^*)	$A_{theoretisch}$ (n_k)
0	57	54
1	203	210
2	383	407
3	525	526
4	532	509
5	408	394
6	273	254
7	139	140
8	45	68
9	27	29
10	10	11
11	4	4
12	2	1
≥ 13	0	1

Vergleichen Sie die Resultate mit einer Poissonverteilung!

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 24 / 1

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Deskriptive Statistik

ISB, WIR90

---

1. *Was bedeuten die folgenden Begriffe?*

a) Deskriptive Statistik
b) Beschreibende Statistik
c) Beurteilende Statistik
d) Induktive Statistik
e) Mathematische Statistik
f) Affirmative Statistik
g) Explorative Statistik
h) Statistische Analyse
i) Hypothese
j) Massenerscheinung
k) Zufallsexperiment
l) Stichprobenumfang
m) Urliste
n) Modell
o) Strichliste
p) Häufigkeitsfunktion
q) Häufigkeitsverteilung
r) Klassenhäufigkeit
s) Punktdiagramm
t) Stabdiagramm
u) Histogramm
v) Staffelbild
w) Häufigkeitspolygon
x) Kreisdiagramm
y) Sankey-Diagramm
z) Summenhäufigkeitsfunktion
a1) Standardintervall
b1) Spannweite
c1) Median
d1) Modus

2. *Bei der medizinischen Eintrittsuntersuchung 1988 bei der Aufnahme des Studiums ist die Grösse der angehenden Studenten registriert worden. Hier die erste Urliste der Stichprobe (cm):*

173	163	165	177	189	160	159	171	199	161	166	174	161
175	166	157	166	173	159	169	165	170	178	175	173	180
179	169	167	175	162	164	158	170	172	153	163	177	178
168	177	168	173	181	169	172	169	176	181	174	174	173
169	163	158	175	169	164	166	173	177	172	184	179	174
170	164	168	173	176	174	168	175	168	173	179	166	165
175	165	160	156	168	168	175	173	173	174	172	178	169
166	173	158	173	167	171	170	172	171	168	184	181	179
161	169	172	171	167	171	178	170	165	171	169	171	166
176	164	157	168	167	177	162	161	178	157	156	169	170

Fortsetzung: Rückseite

2 Forts. Analysieren Sie die Stichprobe wie folgt:

a) Ordnen Sie die Werte der Grösse nach in einer Strichliste.

b) Bestimmen Sie Spannweite und Stichprobenumfang

c) Suchen Sie die extremen absoluten Häufigkeiten

d) Beurteilen Sie, ob eine Klasseneinteilung angebracht ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die Klassenhäufigkeiten.

e) Stellen Sie die Werte auf geeignete Weise graphisch dar. Experimentieren Sie mit verschiedenen Darstellungstechniken und beurteilen Sie den Effekt! Versuchen Sie es mit absoluten und mit relativen Häufigkeiten!

f) Suchen Sie Modus und Median.

g) Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung. Falls Sie Klassen genommen haben: Benützen Sie die Klassenmitten für die Rechnung und vergleichen Sie auch mit Mittelwert und Standardabweichung ohne Klasseneinteilung.

h) Skizzieren Sie die Häufigkeitsfunktion.

3. *Gehen Sie ebenso vor mit folgenden Urlisten:*

3.1. Bremsweg im m unter "gleichen" Voraussetzungen:

5.6	6.5	7.5	7.2	7.7	7.4	7.6	7.3	6.4	6.7
6.1	7.0	6.9	7.4	7.6	7.8	7.0	6.9	6.1	7.0

3.2. Geschwindigkeit 10 Sekunden nach dem Start (km/h, gleiche Bedingungen):

89 85 95 90 86 96 91 91 101 192 88 87 92 90 98 87 74 86

4. *Nehmen Sie einen Würfel zur Hand, würfeln Sie 20 mal und gewinnen Sie so eine Urliste. Wiederholen Sie das Experiment anschliessend 100 mal und machen Sie wieder eine Urliste. Beurteilen Sie nach gemachter Beschreibung des Materials den Unterschied in der Häufigkeitsverteilung. Stellen Sie die Resultate in geeigneter Weise dar.*

5. *Anzahl richtige Lösungen von 6 Aufgaben:* 0 1 2 3 4 5 6
Häufigkeit: 0 0 3 2 9 7 2
Stellen Sie den Sachverhalt in geeigneter Weise dar!

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

6. *In folgender Urliste sind gemessene Druckfestigkeiten des neuen Materials XB28 im hauseigenen Labor gegeben (Ableseeinheiten der Messvorrichtung, näherungsweise kp/cm^2): Bilden Sie Klassen, deren Mitte jeweils durch 25 teilbar ist und beschreiben Sie die Stichprobe statistisch!*

455	444	519	553	468	478	428	486	422	417
372	346	309	345	371	455	418	414	403	285
385	416	402	428	452	436	424	494	497	459
415	494	339	358	352	390	400	442	435	378
330	350	479	502	401	461	445	453	444	379
361	510	558	553	420	402	379	474	441	428
466	454	534	501	589	543	464	434	433	471
489	433	481	476	430	393	384	399	376	446
417	337	328	335	408	407	424	468	492	458

7. *Am 5. 2. 82 am Spätnachmittag haben die Schüler der Klasse D3ad der KHSBS an beliebigen Orten auf der Strasse in Basel beliebig ausgewählte Leute nach ihrer Weckzeit an jenem Tage befragt (Stunde und Minuten):*

550	630	740	530	530	650	650	700	620	600	700	710	550	740	630	430
650	600	330	700	630	650	620	620	650	710	630	650	610	610	930	600
630	620	530	710	740	600	540	620	730	650	710	800	740	1020	600	720
640	630	500	640	710	620	610	530	610	620	740	700	600	520	800	620
610	650	1100	810	800	600	520	540	710	620	220	630	730	950	540	650
700	700	900	900	830	630	600	600	620	530	640	720	840	620	730	610
730	720	710	650	600	650	730	750	700	710	620	930	740	650	830	630
620	830	650	730	700	740	700	700	630	810	610	820	620	720	700	730
650	800	640	1020	730	600	700	550	640	650	700	720	800	630	640	610
650	900	600	620	720	700	630	650	720	1300	630	750	700	540	700	550

a) Untersuchen Sie die Stichprobe und Stellen Sie die Resultate in geeigneter Weise dar.

b) Handelt es sich hier um ein Zufallsexperiment? Was ist der Rahmen des Versuchs?

c) Klassenarbeit: Wiederholung des Versuchs durch Ihre Klasse in derselben Jahreszeit in Ihrem Lebensraum. Was zeigt ein Vergleich der Resultate?

d) Skizzieren Sie die Summenhäufigkeitsfunktion.

8. *Würfeln Sie 20 mal und skizzieren Sie die Summenhäufigkeitsfunktion!*

Fortsetzung: Rückseite

9. *Für das neue Computernetz Ihrer Firma registrieren Sie folgende Anzahlen von Störfällen pro Woche (Wochen fortlaufend):*

136	258	234	386	145	312	22	132	519	132	46	87	43
75	30	108	12	45	188	274	198	420	54	176	110	116
187	254	216	138	37	48	2	178	588	614	312	275	18

a) Skizzieren Sie die Summenhäufigkeitsfunktion

b) Beschreiben Sie die Daten. Was können Sie aussagen?

10. *Sie haben für Ihre Prototypen des gleichen Produkts folgende Wirkungsgrade ermittelt (%):*

90.6 93.5 90.8 92.5 91.4 91.5 93.2 92.7 91.3 92.0

Beschreiben Sie die Gesamtheit dieser Daten.

11. *Berechnen Sie die statistischen Kennzahlen folgender Daten:*

11.1. 20 21 21 22 21 22 20 22 21 21 22 20 21 20

11.2. 120 150 130 160 180 140 190 120 150

12. *Sie haben die Lebensdauer der von Ihnen produzierten Schaltelementen von ihrem Labor messen und festhalten lassen (Tage):*

Lebensdauer (Tage, voll belastet)	Häufigkeit
750 - 850	3
850 - 950	8
950 - 1050	18
1050 - 1150	35
1150 - 1250	49
1250 - 1350	57
1350 - 1450	52
1450 - 1550	36
1550 - 1650	21
1650 - 1750	8
1750 - 1850	4
1850 - 1950	1

Berechnen Sie die statistischen Kennzahlen (Klassenmittelwert, Klassenstreuung etc.). Aussagen?

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.** *Falls möglich, sind die Resultate mit* **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 25 / 1

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Weiterführende Themen

ISB, WIR90

---

1. *Schritte in die beurteilende (mathematische) Statistik.*

2. *Statistische Datenanalyse mit industriellen Softwarepaketen (z.B. SAS, SPSX, BMDP, RS1).*

3. *Graphentheorie und Anwendungen (Informatik).*

4. *Anwendungen in der Datenbanktechnik (z.B. Sprachen wie SQL).*

5. *Computergraphiken und Computerfilme.*

6. *Ausgewählte Themen der höheren Mathematik (komplexe Analysis, höhere Agebra, partielle Differentialgleichungen etc.).*

7. *Ausgewählte Anwendungen in der Informatik (z.B. neuronale Netze, eine Sprache der künstlichen Intelligenz wie Prolog etc.).*

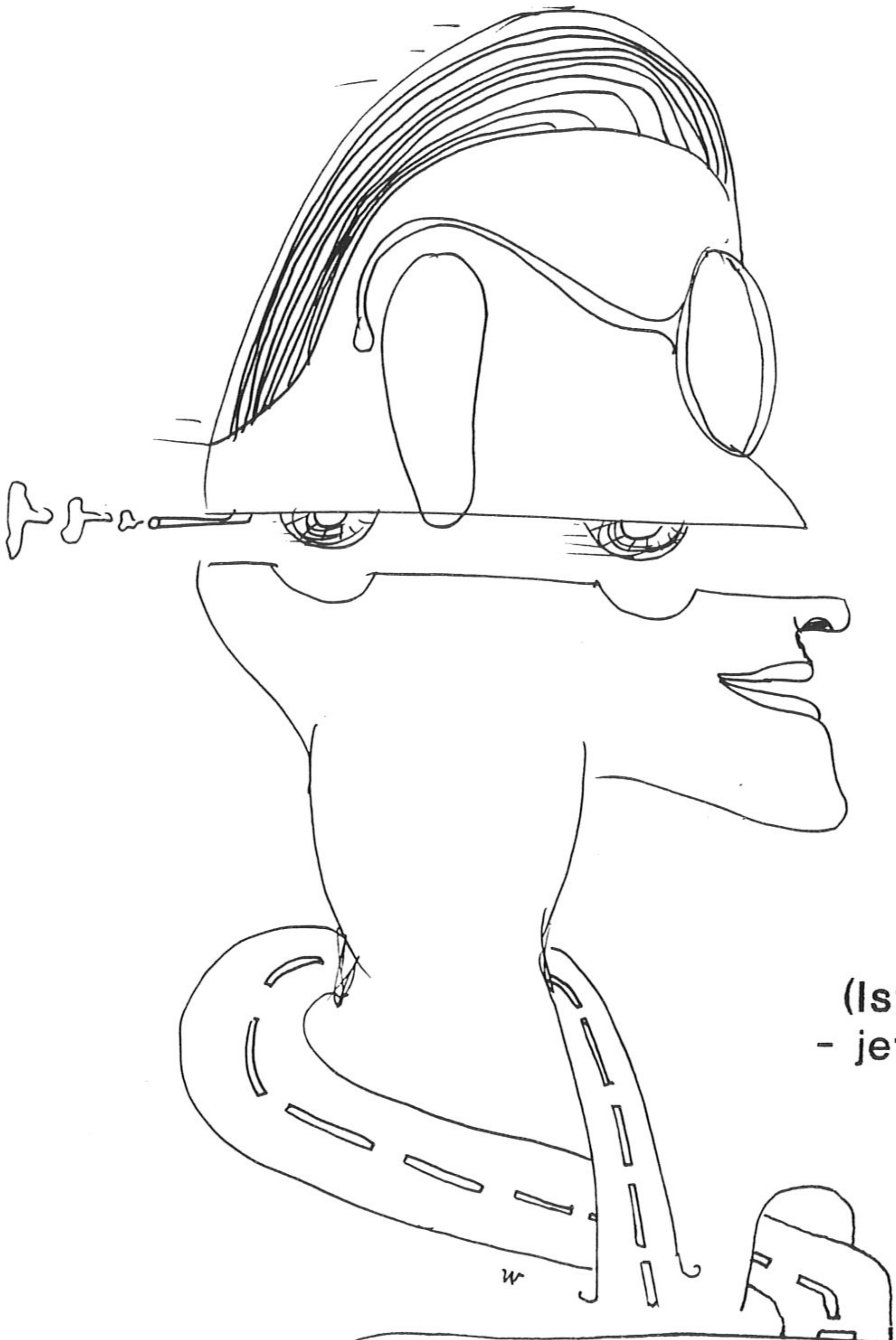
Fortsetzung: Rückseite

Bemerkung: Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Prüfungsserie
Prüfungsserie
Prüfungsserie

1990/91
1990/91
1990/91

Tête à voiture



Wie einem der Kopf
davonfahren kann

(Ist das Buch damit
- jetzt zweisprachig?)

Kultur?

- "Ist Ihre Firma wirklich eine Aktiengesellschaft und nicht eine Fasnachtsgesellschaft?" -
- "Eh wieseo? - Aeh interessant! Sie erstaunen mich - brüskierend!"
- "Wieso?? Weil hier alle Masken - äh Mitarbeiter - Masken tragen!"
- "Aehe - dann erklären Sie mir, wie man heute in diesem antiquierten Theater überhaupt noch eine Rolle spielen soll!"

(Im griechischen Theater trugen die Schauspieler Theatermasken - ebenso in der mittelalterlichen commedia del l'arte.)

Relax mal
im Theater!

Test1 E1D

Aufgaben aus alten Aufnahmeprüfungen

1. Gegeben seien die Seiten eines gleichschenkligen Trapezes:
$\overline{AB} = 20$ cm, $\overline{CD} = 4$ cm, $\overline{AD} = \overline{BC} = 17$ cm.
Man berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das entsteht, wenn man die Seite $\overline{AD}$ und die Seite $\overline{BC}$ bis zu ihrem Schnittpunkt S verlängert. 8 P

2. Ein Tankwagen soll drei Ölbehälter von 10.8 m^3, 4.5 m^3 und 19.5 m^3 nacheinander füllen. Beim ersten Behälter liefert der Tankwagen eine bestimmte Menge Öl pro Minute. Beim zweiten wird diese Menge um 1/3 herabgesetzt, und beim dritten liefert der Tankwagen 40 Liter pro Minute mehr als beim zweiten. Die totale Füllzeit für die beiden ersten Behälter ist gleich gross wie diejenige für den dritten allein. Welches ist diese Zeit? 8 P

3. 3.1. Man bestimme den Wert für x, für welchen der Ausdruck

$$\frac{2x}{4x^2 - 4x + 1} - \frac{2}{2x - 1}$$ null ist. 4 P

3.2. Es ist der Koeffizient k so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$\frac{2x}{4x^2 - 4x + 1} - \frac{2}{2x - 1} = \frac{kx - 8}{4x^2 - 1}$$

ersten Grades wird.

Löse dann die Gleichung. (Anleitung: Man vereinfache zuerst die Gleichung. Wie gross muss dann der Koeffizient des quadratischen Gliedes sein?) 4 P

4. 4.1. Es soll der Ausdruck $\left(\frac{x}{a} - 1\right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right)$ weitmöglichst vereinfacht werden. 4 P

4.2. Desgleichen der Ausdruck $\left(\frac{1}{a + b} - \frac{1}{a - b}\right) : \left(\frac{b}{1 + \frac{a}{b}}\right)$ 4 P

Viel Glück!

Test2 E1D

Logik, Mengenlehre, Relationen

1. Geben Sie für den folgenden Ausdruck die Wahrheitstafel. Was ist die vollständige kanonische Normalform? (a.N.F oder k.N.F: die einfachere.)

$$\neg A \lor (A \land C \land \neg B) \lor \neg C$$ 5 P

2. Vereinfachen Sie durch Äquivalenzumformung:

   2.1. $[(A \land B) \lor (A \lor \neg B)] \land [(A \lor B) \land (A \lor \neg B)]$ 5 P

   2.2 $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ 5 P

3. Ist der logische Schluss korrekt?

$$a \Rightarrow \neg b,\ c \Rightarrow a,\ b \ \vdash\ \neg c$$ 5 P

4. Beweisen Sie korrekt mit Hilfe der Definitionen:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$ 5 P

5. Auf einem Schiff sind 109 Feriengäste anwesend. 81 von ihnen lieben Spagetti, 24 essen gerne Kalamares und 35 möchten schwarze Oliven. 11 Feriengäste wollen aber Spagetti und Kalamares, 15 Spagetti mit Oliven, 7 hingegen verlangen Kalamares und Oliven. Wieviele Teller müssen bereitgestellt werden, auf denen es Spagetti sowohl als auch Kalamares als auch Oliven zu essen gibt? (Leider hat man vergessen, nach allen drei Bedürfnissen zu fragen...) 5 P

6. Ist die folgende Relation eine Äquivalenzrelation?

   Sei $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ gegeben durch "$aRb :\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq a \cdot b$" 5 P

7. Jemand überreicht Ihnen eine Karte auf der steht: "Der Satz auf der Rückseite ist wahr." Verwundert drehen Sie die Karte und lesen auf der Rückseite: "Der Satz auf der Vorderseite ist falsch." Sie drehen die Karte wieder um und .... Vielleicht wundern Sie sich jetzt noch mehr. Könne Sie das Problem in die formale Logik übersetzen und erklären? 5 P

Viel Glück!

Test3 E1D

Funktionen

1. Untersuchen Sie, ob folgender Sachverhalt richtig ist:

   $(f \text{ bijektiv}) \wedge (g \text{ bijektiv}) \Rightarrow (f \circ g \text{ bijektiv})$ — 4 P

2. $f(x) = 2x^2 + 8x - 35$, $g(x) = -x + 10$ — 6 P

   Wo ist $(f(x) < g(x)) \wedge (6.5\,x < 0)$?

3. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ — 7 P

   Gesucht sind
   a) Wertetabelle
   b) Graph
   c) y-Achsenabschnitt
   d) Eventuelle Nullstellen aus dem Graphen
   e) Wo ist $f(x) = \sqrt{x}$?

4. $f(x) = \sqrt{\quad}$, $g(x) = [x]$, $h(x) = x^2$ — 7 P

   a) Bestimmen Sie $\phi = h \circ g \circ f$
   b) Ist ϕ surjektiv?
   c) Ist ϕ injektiv?
   d) Ist ϕ bijektiv?
   e) Was ist D_ϕ ?
   f) Was ist W_ϕ ?

Viel Glück!

Test4 E1D

Zahlenlehre, Funktionen

1. Gegeben sind die Ziffern 4,9,1,1,9,9,0. Wieviele 7-ziffrige Zahlen zwischen 2'000'000 und 6'000'000 kann man damit bilden? — 4 P

2. Wieviele Lösungen mit x, y, z $\in \mathbb{N}$ hat folgende Gleichung: $x + y + z = 100$? — 4 P

3. Sporttoto: 13 Spiele sind zu beurteilen, für jedes Spiel hat man die Möglichkeit, 1, x oder 2 anzukreuzen. Auf wieviele verschiedene Lösungen kann man setzen? — 4 P

4. $$((k+1)! - k \cdot k!)\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right)\binom{2k-1}{k-1} \cdot k! = \ ?$$ (Vereinfachen!) — 4 P

5. Vereinfachen Sie: $$\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+1} = \ ?$$ — 4 P

6. Lösen Sie die Gleichung $$\tan(x) \cdot \operatorname{ctg}(x) = 0.6384$$ — 4 P

7. Skizzieren Sie die Funktion $f: x \mapsto y = \arctan(x)$ und lösen Sie die Gleichung $$\arctan(x) = \frac{\Pi}{4}$$ — 4 P

8. Skizzieren Sie in Polarkoordinaten: $r(\phi) = \cos^2(\phi/2) \cdot \phi^2 \qquad \phi \in [0, 2\Pi]$ — 4 P

9. Berechnen Sie möglichst exakt: $\log_{3,7}(1/3.6) + \log_{3,7}(3.6) = \ ?$ — 4 P

10. Berechnen Sie möglichst exakt: $\log_{e^{2}}(e^{Pi}) = \ ?$ Pi ist Π. — 4 P

Bemerkung: Die meisten Aufgaben sind relativ einfach und geben nicht sehr viel zu tun. Lösen Sie diejenigen Aufgaben zuerst, die Ihnen am einfachsten vorkommen und versuchen Sie, pro Aufgabe mit 5 Minuten auszukommen.

Viel Glück!

Test5 E1D

Boolsche Algebra, Zahlenlehre

1. *Vereinfachen Sie so weit wie nur möglich den Boolschen Ausdruck:* 4 P

$$d + \bar{d}\,(a\,b\,c + \bar{a} + \bar{b} + \bar{c})\,(d + d\,e)\,(d + e\,f) + (a\,\bar{d})$$

2. *3 einstellige Dualzahlen a, b und c sollen mit Hilfe einer Schaltung addiert werden.*

   a) Erstellen Sie die Tabelle der Leitwerte. 4 P

   b) Leiten Sie daraus einfache Boolschen Ausdrücke für die Schaltungen ab. 4 P

   c) Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie nur möglich. Die Schalterzahl soll minimal sein und man soll mit "Serie", "parallel" und "Negation" auskommen. 4 P

3. *Beweisen Sie die folgenden Aussagen (falls möglich):*

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} : k \,\big|\, \left[k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3\right] \qquad (\text{"}|\text{" bedeutet "teilt"})$$ 2 P

4. *Versuchen Sie zu beweisen:*

   a) $$\forall_{n \in \mathbb{N}}: \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$ 5 P

Als Alternative zu Aufgabe 4:

5. *Gegeben ist die folgende Folge von Gleichungen:* 5 P

$$\begin{array}{lcrcr}
1\cdot 2 & = & 2 & = & 6/3 \\
1\cdot 2+2\cdot 3 & = & 8 & = & 24/3 \\
1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4 & = & 20 & = & 60/3 \\
1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5 & = & 40 & = & 120/3
\end{array}$$

Suchen Sie das allgemeine Gesetz und beweisen Sie es.

Viel Glück!

Test6 E1D

Zahlenlehre, Grenzwerte

1. Berechnen Sie exakt: 4P

   k.g.V.(224424, 56322) = ? Methode vorgeschrieben: Euklidscher Algorithmus!

2. Verwandeln sie $0.54\overline{54}...$ in einen gewöhnlichen Bruch (gekürzt)! 4 P

3. Berechnen Sie das Inverse von $[5]$ in $(\mathbb{Z}_{13}, \cdot)$! 4 P

4. Berechnen Sie jeweils x vollumfänglich:

   a) $16 \equiv 22\,x \pmod{30}$ 4 P

   b) $18\,x \equiv 1 \pmod{53}$ 4 P

   c) System: 4 P
   $$4\,x + y \equiv 8 \pmod{12}$$
   $$2\,x - y \equiv 10 \pmod{12}$$

5. Berechnen Sie den Grenzwert, falls möglich:

   a) Rekursiv definierte Folge: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ 4 P

   b) $a_n = [n - \cos(\Pi/4)] \,/\, (n + 1)$ 4 P

   c) $a_n = [(1 - n^2)/n] \cdot \sin(1/n)$ 4 P

   d) $a_n = (n^2 + 6)/(3\,n^2 + 5)$ 4 P

   e) $a_n = (n^{1/2} - n^2)/(n^{1/2} + n^2)$ 4 P

   f) $a_n = 10 - 9 + 8.1 - 7.29 + 6.561 - ....$ (n Summanden) 4 P

6. Berechnen Sie:

   $$\lim_{x\to 6} \; (x - 6)^4 \,/\, (x^4 - 6^4)$$ 4 P

Viel Glück!

Test7 E1D

Komplexe Zahlen, Differentialrechnung

1. 1.1. Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ wird abgebildet in $w = \dfrac{|z|}{\bar{z}}$. Wo liegt das Bild geometrisch bezüglich z? (Begründung!) 5 P

   1.2. $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -2 - 5i$, $(z_1 - z_2)(z_1 + z_2^2)/z_1 = ?$

   Die Einzelschritte müssen auf dem Blatt sichtbar sein. 5 P

2. 2.1. Was ist die Summe aller 5. Einheitswurzeln? (Begründung!) 5 P

   2.2. $((2 - 3i)^2 / (2 + 3i) + (2 + 3i)^{(1/6)}) - (2 - 3i) = ?$ 5 P

3. $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 8x^{(1/2)} + 6$, $g(x) = \ln(x^2 + x)\, e^x$, $F(x) = f(g(x))$

   3.1. $F'(x) = ?$ (Ableiten nach den Regeln, keine Umformungen erwünscht!) 5 P

   3.2. Steigungswinkel der Tangente in Rad an die Kurve F für $x = 3$? 5 P

4. $f(x) = e^{\sinh(x^2/(x+1)}$, $g(x) = x \ln(e^{(x^2)/(x+1)})$.

   4.1. Berechnen Sie die Ableitung von f und g! 5 P

   4.2. Ist $f'(1)$ grösser oder kleiner als $g'(2)$? 5 P

Viel Glück!

Test8 E1D

Differentialrechnung, Grenzwerte, Funktionendiskussion

1. Berechnen Sie die Ableitung:

   1.1. $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} + \sin(x)\cos(x) - \ln(\tan(x))$ 3 P

   1.2. $f(x) = x^{(x^x)} - x^{(1/3)} + 1$ 3 P

2. Berechnen Sie die Ableitung von $y = f(x)$ in $F(x, y) = 0$:

   2.1. $F(x, y) = 2\,x\,y - x^2 + y^2 - 4$ 3 P

   2.2. $F(x, y) = \sin^2(x\,y) + \cos^2(x\,y)$ 3 P

3. Vermischte Aufgaben:

   3.1. $f(x) = x^{-2} + x^{-1}$ $f^{-1}(x) = ?$, $(f^{-1}(x))' = ?$ 4 P

   3.2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\sin(x^2)}{x\sin(x)} = ?$ 4 P

4. Diskutieren Sie folgenden Funktionen:

   4.1. $f(x) = e^{-x^4+1}$ 6 P

   4.2. $f(x) = \dfrac{(x - 3)(x - 6)}{(x - 4)}.$ 6 P

Viel Glück!

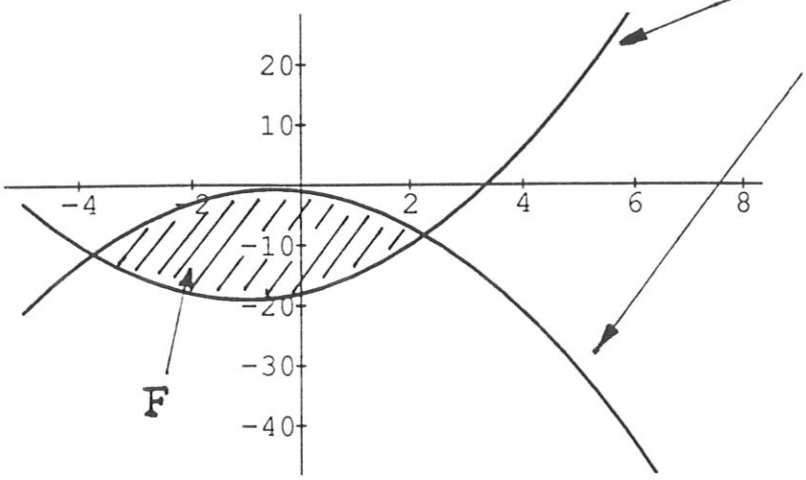
Test9 E1D

Integralrechnung

1. Wie gross ist der Inhalt der schraffierten Fläche? 4 P

$f_1(x) = x^2 + 2x - 18$

$f_2(x) = -x^2 - x - 1$



$F = ?$

2. $f(x) = \begin{cases} \sin(x+\pi) & x \in [-2\pi, -\pi) \\ \sin(x) & x \in [-\pi, 0) \\ 1/\sqrt{x} & x \in [0, 2\pi) \end{cases}$ $\qquad \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\, dx = ?$ 4 P

3. $\int \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}\, dx = ?$ 4 P

4. $\int (\sin(x)\, e^x + \cos(x)\, e^x)\, dx = ?$ 4 P

5. $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{[\ln(x)]^3 - 1}{x\, [\ln(x)]^2}\, dx = ?$ 4 P

6. $\int_0^{\pi/2} (\cos(x))^3\, dx = ?$ 4 P

7. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} + 6\, \frac{\sqrt{x - 5}}{5}\, dx = ?$ 4 P

Viel Glück!

Test10 E1D

Vektorrechnung, Vektorgeometrie

1. Gegeben sind die folgenden Vektoren bezüglich der Orthonormalbasis $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) Bilden die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis? 3 P

   b) Stellen Sie, falls möglich, $\vec{d}$ bezüglich $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. 3 P

   c) Berechnen Sie die Länge von $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} - \vec{d}$.
   (Natürlich bezüglich der ursprünglichen Basis.) 3 P

2. Durch A(3/3/3) und B(5/−2/6) ist eine Gerade g gegeben. Bestimmen Sie den Punkt C(18/y/z) so, dass $C \in g$ ist. 4 P

3. Gesucht ist die kleinste Zahl a, so dass $|\sin(x) + \cos(x)| \leq a$ ist.
(Begründung!) 3 P

4. Zwei Kreise mit dem Radius r haben den Mittelpunktsabstand r/2.
Berechnen Sie den Flächeninhalt einer so entstehenden Mondsichel! 4P

5. Vereinfachen Sie: $\sin(\alpha+\beta)/(\cos(\alpha)\cos(\beta))$ 2 P

6. Gegeben sind g_1: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$g_3: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) Berechnen Sie die Eckpunkte des entstehenden Dreiecks. 3 P

   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks. 3 P

   c) Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks 3 P

   d) Entscheiden Sie rechnerisch, ob der Punkt P(2/3) im Innern des Dreiecks liegt. 2 P

Viel Glück!

Test1 E2D

Aufgaben aus alten Vordiplomprüfungen

1. Vereinfachen Sie den Boolschen Ausdruck:

$$Z = X \cdot Y + [\,(X + Y) \cdot Y\,]'$$ 3 P

2. Berechnen Sie mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* Das **unbestimmte Integral**:

$$\int \frac{2\,x^2 + 9x + 12}{x^2 + 6x + 10}\,dx = ?$$ 6 P

3. Der Graph eines Polynoms 3. Grades schneidet die x-Achse nur einmal, und zwar in $x = -p$. Für $x = 0$ existiert ein Maximum. Für $x = 2p$ ist der Funktionswert gleich gross wie im Maximum, nämlich $y = 3p$.
Der Graph teilt das Rechteck, gebildet durch die x-Achse, die Parallele zur x-Achse durchs Maximum, die Parallelen zur y-Achse durch $x = -p$ und $x = 2p$, in 2 Flächenstücke mit den Inhalten A_1 und A_2..

   3.1. Man bestimme die Koeffizienten des Polynoms in Funktion des Parameters p und dann das Polynom. 5 P

   3.2. Man bestimme das Verhältnis $A_1 : A_2$ der beiden Flächeninhalte. 5 P

4. Von einem Punkt P(3/3/5) fällt ein Lichtstrahl in Richtung des Vektors $\vec{a} = (-1,\ -1,\ -2)^t$ auf einen Planspiegel, der durch die Ebene E: $x + 2y + 3z = 6$ beschrieben wird. Bestimmen Sie eine **Parameterdarstellung der Geraden**, auf der der reflektierte Strahl liegt. 5 P

Viel Glück!

Test2 E2D

Reihenlehre

1. Bestimmen Sie die Summen der folgenden Reihen:
   (Mit den bekannten Methoden möglich.)

   1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$ 1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ Je 5 P

2. Wo konvergiert die folgende Reihen absolut? - Wo divergiert sie?

   $$\frac{x-2}{1} + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{n} + \ldots$$ 5 P

3. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz:

   3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n!)^3}$ Je 5 P

4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

   4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n)}{3n+2}$ 4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$

   4.3. $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \ldots$

   4.4. $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \ldots$ 4.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^p}$

   4.6. $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots$ Je 5 P

Viel Glück!

Test3 E2D

Potenzreihen, Fourierreihen

1. 1.1. Entwickeln Sie $f(x) = e^{x^2} + e^x$ um $x_o = 0$ in eine Potenzreihe bis zum 6. Glied. 4 P

   1.2. Was ist der Konvergenzradius? (Begründung!) 1 P

   1.3. Berechnen Sie mit Hilfe von 1.1. eine Näherung von $\int_0^2 f(x)\,dx$. 4 P

2. 2.1. Skizzieren Sie $f(t) = |t| + t \quad t \in (-\pi, \pi]$, $f(t+2\pi) = f(t)$ 1 P

   2.2. Entwickeln Sie f(t) in eine Fourierreihe! 4 P

   2.3. Können Sie f(t) in eine Potenzreihe entwickeln? Wie sieht eine solche Entwicklung aus? - Begründung! 2 P

3. $g(t) = e^{-at} \quad t \in [0, \infty]$, $g(t) = 0$ sonst. 3 P

   Berechnen Sie die Fouriertransformierte von g(t).

4. Erklären Sie Gibbs Phänomen! 1 P

Viel Glück!

Test4 E2D

Repetitionsaufgaben Vektorgeometrie

1. Gegeben: Punkte A (-2/0/0), B (4/2/0), C (6/-1/1), D (3/1/6).
   M_1, M_2, M_3, M_4 sind die Mittelpunkte von AC, AB, BD, CD.

   1.1. Wie gross ist der Flächeninhalt von $M_1M_2M_3M_4$? 4P

   1.2. Wie gross ist das Volumen von $AM_1M_2M_3M_4D$? 4P

2.
$$\begin{aligned}
3x - 20w + y &= 11\\
x + y + 11z &= 7\\
2x - 2y + z - v &= 2\\
-x - 8z + 16w &= -1\\
(4x + 2y + 11z - 20v &= 18)
\end{aligned}$$
5P

Lösen Sie dieses System nach den Regeln von Cramer.
Die Art der Determinantenberechnung ist freigestellt, jedoch müssen die einzelnen Zwischen-Resultate aufgeführt sein.

3. Gegeben sind die Geraden h_1 und h_2.

$$h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Was ist die kürzeste Distanz zwischen h_1 und h_2 ? 6P

4. Gegeben sind zwie Ebenen Φ_1 und Φ_2.

$$\Phi_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
8P

Für welchen Punkt P der Schnittgeraden ist die Distanz zum Ursprung minimal und wie gross ist diese Distanz?

Viel Glück!

Test5 E2D

Differenialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Differentiale, Fehlerrechnung, Matrizenrechnung, Eigenwerte

1. Berechnen Sie eventuelle Extremwertstellen, Sattelpunkte etc. und versuchen Sie eine 3D-Skizze von der Fläche zu entwerfen:

$$f(x, y) = x^2 + x + 3x\,y - y^2$$ 8 P

2. $$W = \frac{1}{2} R\,S^2\,(R - S) + q\,\frac{R + S}{R - S}$$

Berechnen Sie W mit dem Fehler von W, wenn folgende Werte gemessen werden:

$$R = 46.245 \pm 0.035 \text{ n}$$
$$S = 45.015 \pm 0.015 \text{ n}$$

Aus dem Tabellenbuch:

$$q = 1.32915 \pm 0.00002 \text{ n}^2$$ 8 P

3. $$f(x, y, g(z)) = e^{x+y} \sin(x \cdot y \cdot g(z))$$

$$g(z) = \sin^2(z) + z^3 - z^2 + z$$

Berechnen Sie das totale Differential von f ! 8 P

4. Gegeben ist folgende Matrix: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Es wird vermutet, dass ein Eigenwert eine natürliche Zahl kleiner als 6 sein könnte.

Berechnen Sie die allfälligen Eigenwerte und Eigenvektoren von M ! 8 P

Viel Glück!

TEST6 E2D

Differentialgleichungen

1. Zeichnen Sie das Richtungsfeld! (Achtung Zeitaufwand!)

1.1.	$y' = (x + y)/(x - y)$	3 P
1.2.	$y' = x \operatorname{sgn}(y) \sqrt{|y|}$	3 P

2. $y' = \dfrac{x}{y}$

a) Wo existiert die Lösung eindeutig?	2 P
b) Richtungsfeld?	3 P
c) Lösung?	2 P

3. Was können Sie über die Grösse der Lösungsmannigfaltigkeit folgender D'Gl. sagen?

$$\cos(x)\, y''' - \sin(x)\, y' + \tan(x)\, y' - e^x\, y = x^x$$ 1 P

4. Gegeben ist $y' = \sin(x)\, y + \sin(x)$

a) Allgemeine Lösung?	4 P
b) Lösung des AWP $y(1) = 1$?	2 P

5. Lösen Sie allgemein die folgende D'Gl.:

$$y''' - 4y'' - 6y' = 18\, x$$ 4 P

6. Was ist die allgemeine Lösung von

$$(x^3 y + x\, y + x^2)\, dx + 0.5\, x^2\, dy = 0 \quad ?$$ 4 P

7. Lösen Sie das folgende AWP:

$$y''' - y = e^x$$
$$y(0) = 2$$ 5 P

Viel Glück!

TEST7 E2D

Laplace-Transformationen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

1. Suchen Sie die Laplace-Transformierte:

   1.1. $f(t) = t^4 e^{-4(t-4)} + t^4 \cos(4(t-4)) - \sin(4t) / t$ — 5 P

   ($t^4 \cos(4(t-4))$ mit exponentieller Dämpfung!)

   1.2. $g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ mit f aus 1.1. — 2 P

2. Suchen Sie die Laplace-Transformierte (durch Rechnung!):

   2.1. $f(t) = |\sin(t)|$ — 4 P

   2.2. $g(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \pi] \\ |\sin(t)| & t \geq \pi \end{cases}$ mit f aus 2.1. — 2 P

3. Lösen Sie die folgenden AWP mit Hilfe von Laplace-Transformationen:

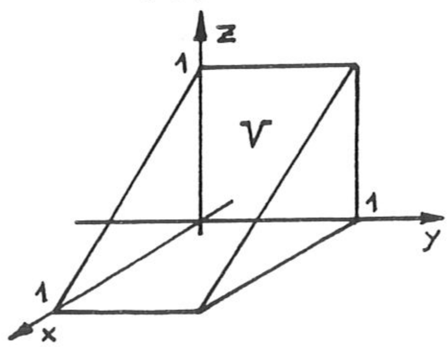
   3.1. $y' - 7y = e^{7x}$, $y(0) = 0$ — 4 P

   3.2. $y + y' = \sin(x)$, $y(0) = 1$ — 4 P

   3.3. $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$ — 6 P

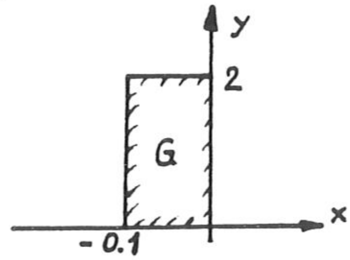
4. Berechnen Sie exakt:

   $$\int_V (x - y + z)\, dV$$ — 5 P



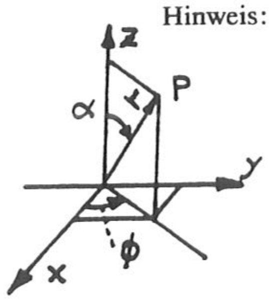
5. Berechnen Sie näherungsweise:

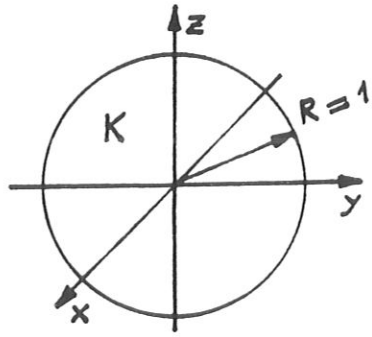
   5.1. $$\int_G \frac{\arctan(x)}{x}\, dG$$ — 5 P



   5.2. $$\int_K \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dK$$ — 5 P

Hinweis: $dx\, dy\, dz = D\, dr\, d\phi\, d\alpha$ mit $D = r^2 \sin(\alpha)$





Viel Glück!

TEST8 E2D

Raumkurven, Vektoranalysis

1. Gegeben ist die Kurvenschar $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\ \sin(t/2) \\ t^2 \\ r\ \cos(t) \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor allgemein. 2P

b) Berechnen Sie die Tangente für $r = 1$ und $t = 0$. 2P

c) Berechnen Sie die Krümmung für $r = 1$ und $t = 0$. 2P

d) Berechnen Sie den Mittelpunkt des Krümmungskreises und den Krümmungsradius für die Werte in c). 2P

e) Berechnen Sie das begleitende Dreibein für die Werte in c) 2P

f) Fertigen Sie eine 3D-Zeichnung der Kurve an für $r = 1$ und zeichnen Sie die Resultate von b), d) und e) ein. *(Die Teilaufgabe zählt nur, wenn die verwendeten Resultate richtig sind.)* 2P

g) Berechnen Sie die Torsion und den Torsionsradius für die Werte in c) 3P

h) Sei $\vec{v}(r, t)$ der in a) berechnete Geschwindigkeitsvektor. Die Menge dieser Geschwindigkeitsvektoren bilden ein Vektorfeld. Beschreiben Sie dieses Vektorfeld in der Form $\vec{v} = \vec{w}(x, y, z)$. (r und t sind zu ersetzen.) 2P

i) Berechnen Sie rot $\vec{w}$ und entscheiden Sie, ob es sich um ein konservatives Feld handelt. *(Zählt nur, wenn h) richtig gelöst worden ist.)* 3P.

2. Gegeben ist $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{2(x+y)} \\ 2z^2 + y^2 - y + 1 \\ 2\ \sin(x\ z) \end{pmatrix}$

Berechnen Sie rot(grad(div $(\vec{v})$)). 6P
(Die Teilresultate müssen sichtbar sein.)

3. Sei $\vec{w} = \begin{pmatrix} e^{2(y^2)} \\ 3z + y \\ \sin(y) \end{pmatrix}$ und γ: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$

Berechnen Sie das Kurvenintegral von $\vec{w}$ längs γ. 6P
(Die Teilresultate müssen sichtbar sein.)

Viel Glück!

TEST9 E2D

Ehemalige Vordiplom-Prüfungsaufgaben

1. Eine lineare Abbildung des 3-dimensionalen Raumes in sich besitze die Abbildungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Man weiss, dass die Gerade, die durch den Origo und den Punkt P(1/1/1) geht, eine Fixgerade ist und der Origo unverändert gelassen wird, während der Punkt A(4/-3/2) in B(-6/1/2) übergeführt wird. Bestimme die fehlenden Elemente der Abbildungsmatrix und berechne den Bildpunkt D von C(18/11/36)!

8 P

2. Gegeben sei ein 3-dimensionales Vektorfeld $\vec{X}$:

$$\vec{X} = \vec{X}(x, y, z) = x\, z\, \vec{e_1} + x \sin(y)\, \vec{e_2} + (z + e^x)\, \vec{e_3}\ .$$

Berechne das Linienintegral dieses Vektorfeldes längs des Weges $C = C_1 \cup C_2$, wobei C_1 ein Stück Parabel $z = x^2$ ist, $x \in [0, 1]$, $y = 0$. C_2 verläuft parallel zur y-Achse mit $y \in [0, \pi]$, $x = 1$, $z = 1$.

8 P

3. Der Kaffee in einer zylinderförmigen Tasse mit Radius r wurde längere Zeit gleichmässig umgerührt. Die resultierende Kaffeeoberfläche (oben) ist durch ein quadratisches Polynom $y = a_o + a_1 x + a_2 x^2$ bestimmt (Querschnitt). In der Mitte steigt der Kaffee bis zur Höhe c, am Rand bis zur grösseren Höhe d. Um wieviel Kaffee handelt es sich?

7 P

4. Gegeben sei die Raumfläche im $\mathbb{R}^3$ $\quad 3x^2 z - 4xyz - 7x + 4y = 5$

4.1. Man bestimme den einzigen Punkt auf der Raumfläche mit horizontaler Tangentialebene.

6 P

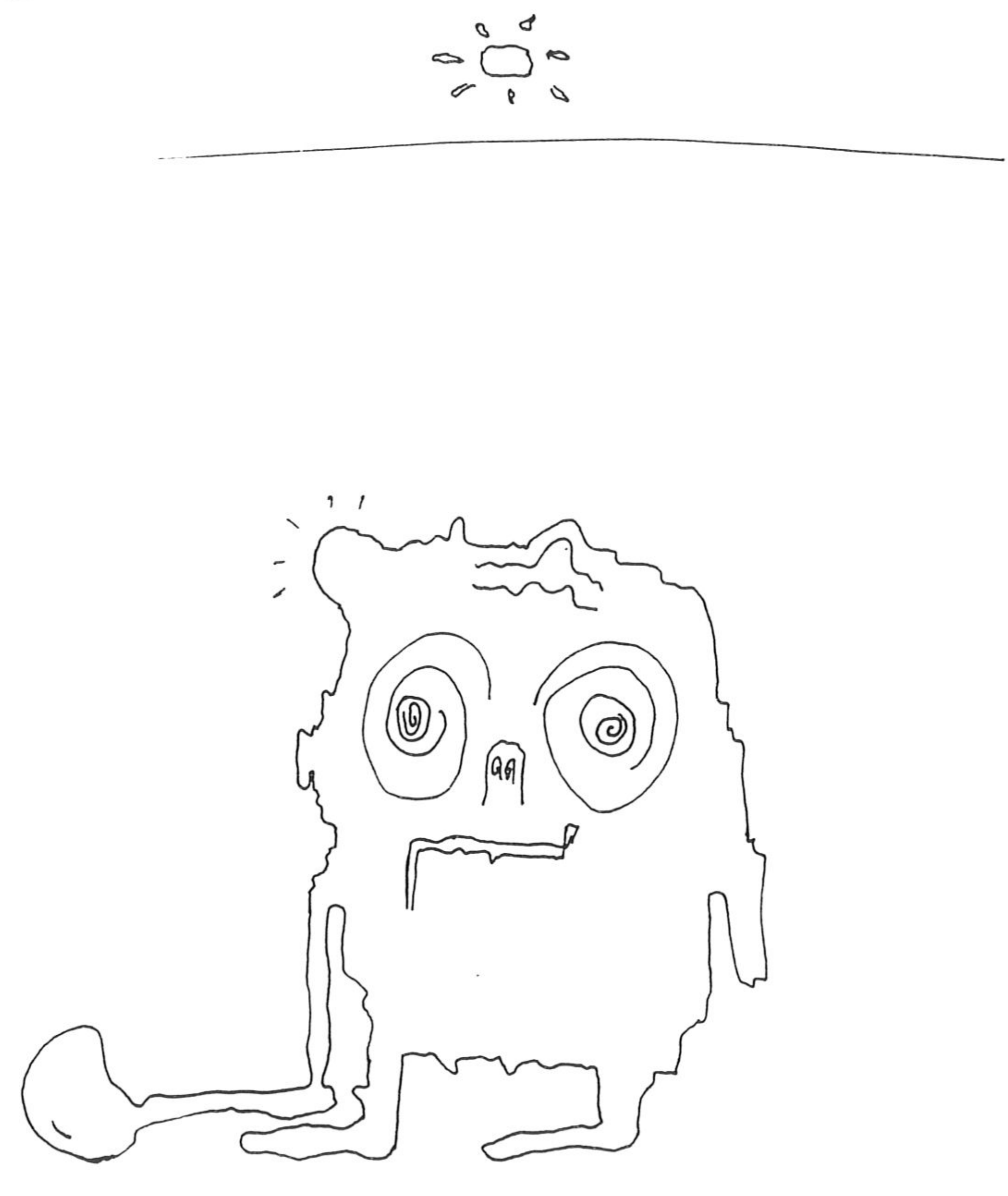
4.2. Man bestimme diese Tangentialebene in der Form $z = z(x, y)$

2 P

4.3. In dieser horizontalen Tangentialebene liege das Dreieck gegeben durch A(10/0/z), B(5/5/z), C(2/1/z). Man berechne das Volumen des Körpers der entsteht, wenn man das Dreieck rotieren lässt um die Parallele zur x-Achse in der horizontalen Tangentialebene mit $y = 0$.

8 P

Viel Glück!



IS OVER

W

Wary Bumm nach dem Praxistest