

Einige Vordiplomprüfungen

Ingenieurschule
Biel

Vordiplomprüfung 1990

Diplôme préalable 1990

Klasse/ Classe I4T

Teil Math./ partie math.

(Die Prüfung gliedert sich in 3 Teile)
(L'examen se divise en trois parties)

Zeit pro Teil/ Temps à disposition:
70 Minuten/ 70 minutes

WIR90

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
 - Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
 - Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
 - Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
 - Erlaubte Hilfsmittel: Kursunterlagen, Formelbuch, Taschenrechner.
 - Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1 % betragen.
-

Aufgabe 1

1.1 6 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe der Methode der *Laplace-Transformationen* das Anfangswertproblem:

$$(1.1.) \quad 2 y'' + 12 y' + 16 y = 4 \sin(4t) \quad (\text{wobei } y = y(t))$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 1 .$$

1.2 5 Punkte

Berechnen Sie die *allgemeine* Lösung von

$$(1.2.) \quad 2 y'' - 12 y' + 16 y = 4 \sin(4t).$$

(Hinweis: Möglicher Ansatz: $y_{\text{part}} = A \sin(\dots) + B \cos(\dots)$.)

1.3 2 Punkte

Vergleichen Sie die spezielle Lösung von (1.1.) mit der allgemeinen Lösung von (1.2.): Was ist über das Verhalten der Lösungen für grosse Werte von t zu sagen?

1.4 2 Punkte

Berechnen Sie die *spezielle* Lösung von (1.2.) für die Randbedingungen:

$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 0.$$

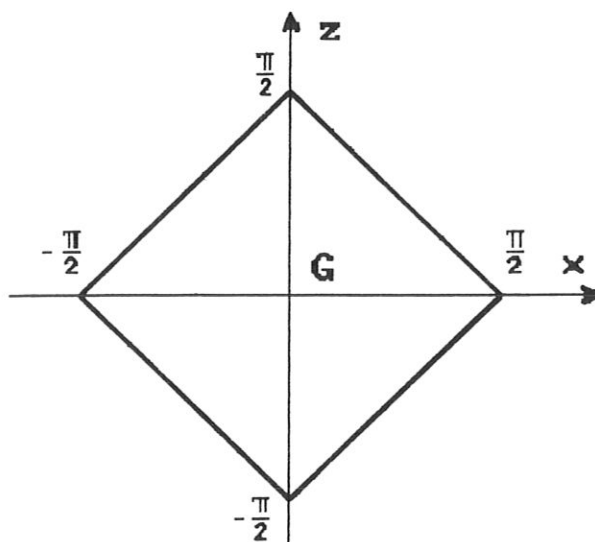
Aufgabe 2: Siehe Rückseite

Aufgabe 2

Sei $f(x,y,z) = \sin(x+y) \cos(y) + z^2 + 3$.

I sei das Intervall $I = [-2, 2]$.

G sei das in der Figur angegebene Gebiet.



2.1 5 Punkte

Berechnen Sie $\iint_G f(x,y,z) \, dG$ für $y = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.2 5 Punkte

Untersuchen Sie, ob $f(x,y,z)$ in $\{(x,y,z) / (x,z) \in G, y \in I\}$ ein oder mehrere lokale Extrema besitzt. Bestimmen Sie allenfalls diese Extrema.

Conditions:

- Chacun travaille indépendamment. Un comportement malhonnête aura comme suite l'immédiate exclusion de l'examen.
 - On exige de représenter clairement et nettement toutes les étapes parcourues en quête de la solution en indiquant les idées et les résultats provisoires. Les résultats sans déductions ne sont pas acceptés.
 - Il faut souligner les résultats par un double trait.
 - Il faut tracer proprement les parties qu'on veut annuler.
 - Moyens admis: Notes prises pendant les cours, livre de formules, calculateur de poche.
 - En employant des fractions décimales, il faut veiller à ce que le résultat final ne diffère pas plus de 0.1 % du résultat exact.
-

Problème 1

- 1.1 6 points Réolvez par la méthode des *transformations de Laplace* le problème aux valeurs initiales:

$$(1.1.) \quad 2 y'' + 12 y' + 16 y = 4 \sin(4t) \quad (\text{où } y = y(t))$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 1 .$$

- 1.2 5 points Calculez la solution *générale* de

$$(1.2.) \quad 2 y'' - 12 y' + 16 y = 4 \sin(4t).$$

(*Indication:* Disposition possible: $y_{\text{part}} = A \sin(\dots) + B \cos(\dots)$.)

- 1.3 2 points Comparez la solution particulière de (1.1.) à la solution générale de (1.2.): Que peut-on dire à propos du comportement des solutions pour les t à grandes valeurs?

- 1.4 2 points Calculez la solution *particulière* de (1.2.) pour les conditions limites:

$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 0.$$

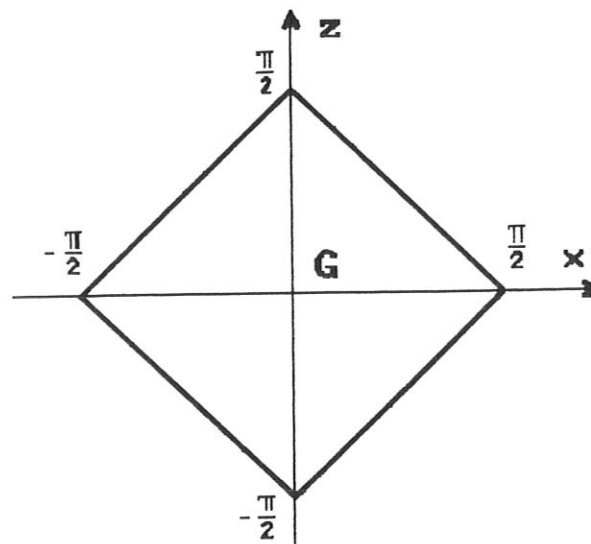
Problème 2: Voir verso

Problème 2

Soit $f(x,y,z) = \sin(x+y) \cos(y) + z^2 + 3$.

I soit l'intervalle $I = [-2, 2]$.

G soit le domaine indiqué par la figure.



2.1 5 points

Calculez $\int_G f(x,y,z) dG$ pour $y = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.2 5 points

Cerchez si $f(x,y,z)$ dans $\{(x,y,z) / (x,z) \in G, y \in I\}$ possède un ou plusieurs extrêmes locaux. Calculez, si c'est le cas, ces extrêmes.

Vordiplomprüfung 1990

Abt. I

Nachprüfung

Die Prüfung gliedert sich entsprechend
der Aufteilung des Unterrichts in 3 Teile:
Algebra, Analysis und Mathematik

Zeit inkl. Pause:
4 Stunden

WIR90

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Schreibzeug: Dokumententecht.
- Erlaubte Hilfsmittel: Kursunterlagen, Formelbuch, Taschenrechner.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1 % betragen.

Note:

- Die Prüfung besteht aus 3 Teilen. Für jeden Teil gibt es eine Teilnote. Die Prüfungsnote berechnet sich aus dem Durchschnitt der 3 Teilnoten.

Teil 1: Einfache Algebra

1. **2 Punkte** Vereinfachen Sie den nachfolgenden Ausdruck so weit wie möglich:

$$\neg(\neg(A \vee \neg B) \vee \neg B) \vee (A \vee \neg(B \wedge A))$$

Andere Schreibweise wie in der Schaltalgebra üblich:

$$((A+B')'+B')'+(A+(B \cdot A)')$$

2. **4 Punkte** Gegeben: $w = f(z) = -\frac{z}{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

2.1. Beschreiben Sie die geometrische Lage von w bezüglich z .

2.2. z beschreibt die Kurve $z(t) = 4 e^{it}$, $t \in [0, \pi]$
 Welche Kurve beschreibt dann w ?
 Zeichnen Sie die beiden Kurven!

3. **6 Punkte** Gegeben ist die Ebene $\Phi: x + 2y + 3z = 3$ sowie die Punkte $P(2/4/6)$ und $Q(1/1/0)$.
 Auf der Geraden \overline{PQ} fällt ein Lichtstrahl von der Lichtquelle P auf die Ebene Φ und wird reflektiert. Geben Sie die Geradengleichung des reflektierten Strahls.

4. **6 Punkte** Gegeben sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Geben Sie sämtliche Lösungen von

$$C (A \vec{x} + \vec{b}) - \vec{s} = C^{-1} \vec{t}$$

Teil 2: Einfache Analysis

5. **5 Punkte** Skizzieren Sie den Graphen der reellen Funktion

$$f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{4} (1 - x) \cdot \ln\left(\frac{1 - x}{2}\right)$$

Bestimmen Sie so weit wie möglich exakt eventuelle Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

6. **4 Punkte** $\int_7^k \frac{3x^2 + 15x - 12 - 30x}{x^2 - 6x - 7} dx = ? \quad k \in \mathbb{R}, k > 7.$

7. **4 Punkte** $\int_0^{\infty} \left| -\frac{2}{4} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right| e^{-x/2} dx = ?$

Hinweis: Integrieren Sie nach einer geeigneten Substitution zuerst über ein einfaches Teilintervall. Suchen Sie ein Gesetz zu finden (---> geometrische Reihe).

8. **4 Punkte** Sei $s > 0$. Der Graph einer Funktion 3. Grades schneidet die x -Achse in $-s$ und berührt sie in 0 . Zwischen $-s$ und 0 befindet sich ein Maximum. Für $x = 0$ hat die Funktion ein Minimum mit $f(0) = 0$. Zudem ist $f(s) = 2s$. Den Inhalt der Fläche zwischen der x -Achse und dem Graphen nennen wir A_1 . A_2 dagegen sei der Inhalt der Fläche oberhalb des Graphen bis zur Parallele zur x -Achse durch $(s/2s)$.

8.1. $f(x) = ?$

8.2. Was ist das Verhältnis der Inhalte von A_1 und A_2 ?

Teil 3: "Mathematik"

9. **6 Punkte** Lösen Sie mit Hilfe der Methode der *Laplace-Transformationen* das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} 2 y''' + 6 y'' + 6 y' + 2y &= 2 t^2 e^{-t} \\ \text{mit} \quad y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \\ y''(0) &= 0 \end{aligned}$$

10. **6 Punkte** Berechnen Sie die *allgemeine* Lösung von

$$y'' - 6 y' + 8 y = 2 \cos(2t).$$

(Hinweis: Möglicher Ansatz: $y_{\text{part}} = A \sin(\dots) + B \cos(\dots)$.)

11. **6 Punkte** Ein Reagenzglas wird wie folgt beschrieben: Ein Rotationszylinder um die z -Achse hat den Radius $r = 10$ und reicht von $z = 0$ bis $z = 20$. Der Zylinder sitzt auf einer Halbkugel mit $r = 10$, die natürlich ihren Mittelpunkt im Origo hat und von $z = 0$ bis $z = -10$ reicht. Die sich im Reagenzglas befindliche Flüssigkeit wird so in Rotation versetzt, dass ihre Oberfläche durch Rotation einer Parabel entsteht, die ihren Scheitelpunkt im Ursprung hat und zudem den Glasrand berührt. Wieviel Flüssigkeit ist im Glas?
Die verwendeten Formeln sind herzuleiten mit Ausnahme der für das Zylinder und für das Kugelvolumen.

12. **3 Punkte** Berechnen Sie $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$ mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung.
Genauigkeit: 3 Stellen!
-

Vordiplomprüfung 1991

Klasse E4D
Mathematik

Die Prüfung besteht aus 8 unabhängigen Aufgaben aus dem Gebiet der behandelten Mathematik. Total sind 90 Punkte möglich.

Zeit inkl. Pause:
0800 - 1200

WIR91/17/502

7 Probleme sind
auszuwählen und
zu lösen !

(Es ist aber nicht
verboten, alle 8
Aufgaben zu bearbeiten.)

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Erlaubte Hilfsmittel: Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbuch, Taschenrechner.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1 % betragen.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nicht akzeptiert.

WIR

Aufgabe 1**(18 Punkte)** Gegeben ist die folgende Differentialgleichung:

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = f(t)$$

- 1.1. **2 Punkte** Sei $f(t) = e^{-t}$. Wieviele Integralkurven gehen durch den Origo und haben dort eine horizontale Wendetangente?
- 1.2. **4 Punkte** Skizzieren Sie die Kurven resp. die Kurve von 1.1. über dem Definitionsbereich $D = [-1, 6]$.
- 1.3. **3 Punkte** Bestimmen Sie für die Kurven resp. für die Kurve von 1.2. in D die vorhandenen Extremwertstellen mit ihren Werten sowie die restlichen Wendepunkte, sofern vorhanden.
- 1.4. **3 Punkte** Bestimmen Sie die Kurvenlängen resp. die Kurvenlänge für die in 1.2. beschriebene Situation zwischen $t = -1$ und $t = 6$. Das numerische Resultat genügt.
- 1.5. **6 Punkte** Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $f(t) = \delta(t)$ und den Anfangsbedingungen: $y(0) = -1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

Fortsetzung: Rückseite

Aufgabe 2

(12 Punkte) Zeichnen Sie in der x/y -Ebene das Rechteck R , das durch $A(-1/1)$, $B(1/1)$ und die x -Achse markiert ist. Bestimmen Sie die beiden Parabeln 2. Ordnung $f(x)$ und $g(x)$, die durch A sowie durch B gehen, zwischen $x = -1$ und $x = 1$ in R verlaufen und den Flächeninhalt von R in 3 gleich grosse Teile F_1, F_2, F_3 teilen.

- 2.1. 4 Punkte Was sind die algebraischen Ausdrücke für f und g ?
- 2.2. 4 Punkte Wir lassen die Figur jetzt um die x -Achse rotieren. Was sind die Verhältnisse der Volumina, die von F_1, F_2 und F_3 erzeugt werden?
- 2.3. 4 Punkte Beantworten Sie dieselbe Frage wie in b), wenn die Rotationsachse die Gerade AB ist.

Aufgabe 3

(15 Punkte) Gegeben ist die Schar archimedischer Schrauben

$$\vec{x}(r, t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

Es ist $t \in [0, 2\pi]$.

- 3.1. 3 Punkte Berechnen Sie das begleitende Dreibein für $t = 0$.
- 3.2. 3 Punkte Berechnen Sie für $t = 0$ Krümmung und Krümmungsradius.
- 3.3. 3 Punkte Versuchen Sie, mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen und den Resultaten von 3.1. und 3.2. herauszufinden, welche Kurve der Mittelpunkt des Krümmungskreises beschreibt.
- 3.4. 3 Punkte Berechnen Sie die Torsion für $t = 0$.
- 3.5. 3 Punkte Berechnen Sie $\vec{v} = \vec{x}(r, t)'$. Setzen Sie $r = r(x, y, z) = \dots$ und $t = t(x, y, z) = \dots$. (Diese Funktionen müssen Sie herausfinden.) So erhalten Sie dann $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$. Berechnen Sie jetzt $\text{rot}(\vec{v})$.

Aufgabe 4*Kurzaufgabe*

4 Punkte Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\forall x \in (0, 1): e^{-kx} > (1-x)^k \quad \text{mit } k > 0.$$

Hinweis: Ein bequemer Ausgangspunkt ist der Fall $k = 1$.

Fortsetzung: Seite 3

Aufgabe 5*Kurzaufgabe:***4 Punkte**Suchen Sie eine Kurve $f(x)$ über $[1, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

- a) Die Kurvenlänge ist ∞ .
- b) Die Oberfläche des Rotationskörpers (um die x -Achse) ist ∞ .
- c) Das Volumen des besagten Rotationskörpers ist π .

Die Eigenschaften sind natürlich zu belegen!

Aufgabe 6**(12 Punkte)**

Es soll eine Schaltung entworfen werden, die eine 2-stellige Dualzahl mit den Ziffern A und B mit einer zweistelligen Dualzahl mit den Ziffern C und D multipliziert. Für die Stellen des Resultats sind kleine Buchstaben zu verwenden.

6.1. **4 Punkte**

Stellen Sie die möglichen Verknüpfungen in einer Tabelle dar (Leitwerttabelle).

6.2. **4 Punkte**

Lesen Sie aus der Tabelle auf sinnvolle Weise algebraische Ausdrücke für das Resultat ab, in denen nur Symbole für Serie-, Parallelschaltung und "Negation einzelner Schalter" vorkommen..

6.3. **4 Punkte**

Vereinfachen Sie diese Ausdrücke so weit wie möglich unter Beibehaltung der Symbole von 6.2. .

Aufgabe 7**(13 Punkte)**Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 wie folgt:

$$g_1 = \Phi \cap \Psi, \quad g_2: \vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{a}. \quad \text{Dazu kennen wir den Punkt } P_0.$$

7.1. **3 Punkte**

Ist die kleinst mögliche Kugel, die beide Geraden berührt, eindeutig bestimmt?

7.2. **5 Punkte**

Berechnen Sie den Mittelpunkt M und den Radius dieser Kugel, soweit Eindeutigkeit vorhanden ist.

7.3. **5 Punkte**Ist der Abstand der Gerade $h = \overline{MP_0}$ und g_1 grösser als der Abstand von h und g_2 ? Berechnen Sie diese Abstände!**Angaben:**

$$\begin{aligned} \Phi: & x + 2y - 2z + 8 = 0 \\ \Psi: & 2x - 2y + 3z - 6 = 0 \end{aligned}$$

Fortsetzung: Seite 4

Fortsetzung der Aufgabe 7:

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_0(-3/-1/-9).$$

Aufgabe 8**12 Punkte**

$\vec{f}(x, y) = f_1(x, y) \vec{e}_1 + f_2(x, y) \vec{e}_2$ stellt ein ebenes Vektorfeld dar. Der Definitionsbereich sei das Gebiet D mit dem Rand δD .

Der Greensche Satz besagt, dass gilt:

$$\int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA = \oint_C \vec{f} \circ d\vec{r}$$

C ist der orientierte Weg, der das Gebiet so umrandet, dass das Innere von D zur Linken liegt: $C = \pm \delta D$

Verifizieren Sie den Greenschen Satz für die folgende konkrete Situation:

$$\vec{f}(x, y) = (x y - x^2) \vec{e}_1 + (x^2 - y^2) \vec{e}_2$$

$$\delta D = C_1 \cup C_2, \quad C_1 = \{(x / y) \mid y = x^{0.5} \wedge x \in [0, 1]\}$$

$$C_2 = \{(x / y) \mid y = x^3 \wedge x \in [1, 0]\}$$

Hinweis: Machen Sie sich erst eine Skizze und parametrisieren Sie C_1 und C_2 auf geeignete Art.

Viel Glück!

Total mögliche Punktzahl: 90 Punkte

Vordiplomprüfung 1991
Diplôme préalable 1991
Klassen/ Classes I4T/W

Teil Algebra/ Partie algèbre

(Die Prüfung gliedert sich in 3 Teile)
(L'examen se divise en trois parties)

Zeit pro Teil/ Temps à disposition:
70 Minuten/ 70 minutes

WIR91

Richtlinie:

Directive:

3 Probleme sind
auszuwählen und
zu lösen.

3 problèmes sont
à choisir et à
résoudre.

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
 - Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
 - Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
 - Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
 - Erlaubte Hilfsmittel: Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbuch, Taschenrechner.
 - Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1 % betragen.
 - Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nicht akzeptiert.
-

Aufgabe 1

(12 Punkte)

Es soll eine Schaltung entworfen werden, die zu einer 3-stelligen Dualzahl mit den Ziffern A, B und C eine zweistellige Dualzahl mit den Ziffern D und E addiert. Für die Stellen des Resultats sind kleine Buchstaben zu verwenden.

1.1. 4 Punkte

Stellen Sie die möglichen Verknüpfungen in einer Tabelle dar (Leitwerttabelle).

1.2. 4 Punkte

Lesen Sie aus der Tabelle auf sinnvolle Weise algebraische Ausdrücke für das Resultat ab, in denen nur Symbole für Serie-, Parallelschaltung und "Negation einzelner Schalter" vorkommen..

1.3. 4 Punkte

Vereinfachen Sie diese Ausdrücke so weit wie möglich unter Beibehaltung der Symbole von 1.2. .

Aufgabe 2

10 Punkte

Berechnen Sie \vec{x} aus folgender Gleichung, falls möglich:

$$(A \vec{a} + B \vec{x})^t A + \vec{b}^t C = (A^{-1} \vec{k})^t \quad (\text{Hinweis: } (M \vec{v})^t = \vec{v}^t M^t)$$

Alle Lösungsschritte und Berechnungsmethoden müssen auf dem Blatt ersichtlich und nachvollziehbar sein. Bei Verwendung des Rechners ist zu erklären, welche Operationen dem Rechner überlassen werden.

Angaben: $C = A^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{a}^t = (i, 1, -1), \quad \vec{b}^t = (0, i, 0), \quad \vec{k}^t = (0, 0, 1).$$

Fortsetzung ->

Aufgabe 3**(10 Punkte)**Gegeben sind die Geraden g und h wie folgt:

$$g = \Phi \cap \Psi, \quad h: \vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{a}. \quad \text{Dazu kennt man den Punkt } P.$$

3.1. **3 Punkte**

Ist die kleinst mögliche Kugel, die beide Geraden berührt, eindeutig bestimmt?

3.2. **5 Punkte**

Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius dieser Kugel, soweit Eindeutigkeit vorhanden ist.

3.3. **2 Punkte**Liegt der Punkt P auf der Kugeloberfläche?**Angaben:**

$$\Phi: 2x + y - 2z + 8 = 0$$

$$\Psi: -x + 2y + 3z - 6 = 0$$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P(-1/-3/-5).$$

Aufgabe 4**(10 Punkte)**

Gegeben ist $m \in \mathbb{N}$ beliebig. m sei im 10-er-System dargestellt. Wählen Sie zwei beliebige, aber verschiedene Ziffern von m und vertauschen Sie diese. Dann entsteht eine neue Zahl n . Sei nun $d = m^2 - n^2$ und s und k die von hinten gezählte Platznummern der gewählten Ziffern in m , wobei $k > s$ ist. *Lassen Sie die Nummerierung mit 0 beginnen!* z sei die gesamte Anzahl Ziffern von m resp. n . Damit die Sache einen Sinn hat, muss natürlich $z > 1$ sein.

4.1. **2 Punkte**

Berechnen Sie den ggT aller Zahlen d im Falle $z = 2$.
(Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung $m = 10^k a + 10^s b$.)

4.2. **3 Punkte**

Berechnen Sie den ggT $t(z, k, s)$ aller Zahlen d für $m \in M$ bei beliebigem z und $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 9\}$. t enthält die "ewigen Teiler", die überall vorkommen und hängt offenbar von z, k und s ab.
(Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung $m = 10^k a + 10^s b + R$, wobei in R die restlichen Ziffern figurieren.)

4.3. **2 Punkte**Untersuchen Sie, welche Zahlen d mit $m \in M$ durch $9 \cdot 11$ teilbar sind.4.4. **3 Punkte**

$$\text{Sei } f(k, s, z, d) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 99 \text{ Teiler von } d \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beschreiben Sie diese Funktion!

Conditions:

- Chacun travaille indépendamment. Un comportement malhonnête aura comme suite l'immédiate exclusion de l'examen.
 - On exige de représenter clairement et nettement toutes les étapes parcourues en quête de la solution en indiquant les idées et les résultats provisoires. Les résultats sans déductions ne sont pas acceptés.
 - Il faut souligner les résultats par un double trait.
 - Il faut tracer proprement les parties qu'on veut annuler.
 - Moyens admis: Notes prises pendant les cours, livre de formules, calculateur de poche.
 - En employant des fractions décimales, il faut veiller à ce que le résultat final ne diffère pas plus de 0.1 % du résultat exact.
 - Comme il s'agit d'un document, un examen écrit au crayon ne sera pas accepté.
-

Problème 1

- 1 (12 points) Il faut créer un montage, qui additionne a un nombre dual à 3 places (avec les lettres A, B et C) à un nombre dual à deux places (avec les lettres D et E). Employez pour le résultat des lettres minuscules.
- 1.1. 4 points Représentez les liaisons possibles dans un tableau. (Tableau des valeurs logiques.)
- 1.2. 4 points Lisez pour le résultat dans le tableau de façon raisonnable des expressions algébriques dans lesquelles il n'y ait que des symboles pour des montages en séries, parallèles et pour "la négation des interrupteurs isolés.
- 1.3. 4 points Simplifiez ces expressions le plus possible en maintenant les symboles de 1.2. .

Problème 2

10 points Calculez \vec{x} de l'équation ci-dessus, si possible:

$$(A \vec{a} + B \vec{x})^t A + \vec{b}^t C = (A^{-1} \vec{k})^t \quad (\text{Indication: } (M \vec{v})^t = \vec{v}^t M^t)$$

Toutes les étapes de la solution et les méthodes doivent figurer sur la feuille et il doit être possible de les reconstruire sans l'aide de moyens spéciaux. Si vous utilisez la calculatrice, les opérations qui sont exécutées par la calculatrice doivent être expliquées.

Indications: $C = A^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{a}^t = (i, 1, -1), \quad \vec{b}^t = (0, i, 0), \quad \vec{k}^t = (0, 0, 1).$$

Voir verso ->

Problème 3**(10 points)**Voici les données des droites g et h :

$$g = \Phi \cap \Psi, \quad h: \vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{a}. \quad \text{On connaît aussi le point } P.$$

3.1. **3 points**

La plus petite sphère possible qui touche les deux droites, est-elle clairement définie?

3.2. **5 points**

Calculez le centre et le rayon de cette sphère autant que cela existe clairement.

3.3. **2 points**Est-ce que le point P est sur la surface de la sphère?**Indications:**

$$\Phi: 2x + y - 2z + 8 = 0$$

$$\Psi: -x + 2y + 3z - 6 = 0$$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P(-1/-3/-5).$$

Problème 4**(10 points)**

Donné: $m \in \mathbb{N}$ quelconque. m soit représenté dans le système décimal. Choisissez deux chiffres quelconque mais différents de m et échangez-les. Il en résulte un nouveau chiffre n . Soit $d = m^2 - n^2$ et soient s et k les numéros des places comptés en commençant par le dernier des chiffres de m ; il faut $k > s$. Commencez le numérotage par 0! z soit le nombre total des chiffres de m resp. n . Pour que la chose ait un sens, il est indispensable que $z > 1$.

4.1. **2 points**

Calculez le plus grand diviseur commun (pgdc) de tous les nombres d_m pour $z = 2$.
(Indication: Utilisez la représentation $m = 10^k a + 10^s b$.)

4.2. **3 points**

Calculez le pgdc $t(z, k, s)$ de tous les nombres d pour $m \in M$ si z est un nombre quelconque et $M = \{x \in \mathbb{N} | x > 9\}$. t contient les diviseurs qui apparaissent partout et dépend donc de z, k et s .
(Indication: Utilisez la représentation $m = 10^k a + 10^s b + R$, le reste des chiffres de m figurent dans R .)

4.3. **2 points**Examinez quels chiffres d avec $m \in M$ se laissent diviser par 9·11.4.4. **3 points**

$$\text{Soit } f(k, s, z, d) = \begin{cases} 1 & \text{si } 99 \text{ est diviseur de } d \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Décrivez cette fonction.

Vordiplom 1 1992

Klasse E1D (alt E2D)

Mathematik

Die Prüfung besteht aus 6 von 7 unabhängigen Aufgaben aus der behandelten Mathematik. Total sind 84 Punkte möglich.

Zeit inkl. Pause:

0800 - 1100

WIR92/17/604

Richtlinie:

6 Aufgaben sind auszuwählen
und zu lösen.

Es ist aber auch erlaubt,
alle 7 Aufgaben zu lösen.

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Erlaubte Hilfsmittel: Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbuch, Taschenrechner.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1 % betragen.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nicht akzeptiert.

WIR

A. Kürzere Aufgaben:
-----**Aufgabe 1.1 (6 Punkte)**

Berechnen Sie den folgenden Ausdruck so weit als möglich:

$$\frac{d}{dx} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n \cdot x)}{10^n} \right) - \frac{\ln(x)}{9} \right) = ?$$

Aufgabe 1.2 (6 Punkte)Beweisen Sie korrekt (*vollständige Induktion*):

$$\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \sum_{k=1}^n k^3$$

Hinweis: Schreiben Sie "die Summen aus" und beachten Sie den Trick, den man benutzt, um die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren.)

Aufgabe 2.1. (6 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des Tetraeders mit folgenden Eckpunkten:

$$A(-1/2/0), B(2/1/-3), C(1/0/1), D(3/-2/3).$$

Fortsetzung: Rückseite

Aufgabe 2.2 (6 Punkte)

Seien $z = a + ib$ sowie $z' = a' + ib'$ Zahlen $\in \mathbb{C}$.

2.2.1. (4 Punkte) Beweisen Sie durch Rechnung die folgende Gleichung:

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

2.2.2. (2 Punkte) Erklären Sie die geometrische Bedeutung dieser Gleichung mittels einer Skizze.

B. Längere Aufgaben:
-----**Aufgabe 3 (12 Punkte)**

Es besteht das Problem, mit Hilfe von Schaltungen zwei zweistellige Dualzahlen zu multiplizieren.

- 3.1. (4 Punkte) Erstellen Sie die Multiplikationstabelle für die Zahlen (entsprechend der "Wahrheitstabelle") und
- 3.2. (4 Punkte) lösen Sie das Darstellungsproblem, indem Sie Boolesche Ausdrücke herleiten, in denen nur "·", "+" und "-" vorkommen.
- 3.3. (4 Punkte) Lösen Sie das Minimalisierungsproblem, falls noch notwendig. Wenn Mehrdeutigkeit vorliegt, sind alle Alternativen aufzuführen. (Bedingungen wie in 3.2.).

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei $f(x) = e^x \ln(x)$.

- 4.1. (6 Punkte) Entwickle $f(x)$ in eine Potenzreihe um $x = 1$. (Resultat bis zu $O[x^5]$.)
- 4.2. (3 Punkte) Liegt $(0,2)$ im Konvergenzintervall? (Begründung!)
- 4.3. (3 Punkte) Lässt sich damit eine Näherungsformel für $\int_1^x f(\xi) d\xi$ herleiten? (Leiten Sie allenfalls die Formel her.)

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Gegeben sind die Kurven $x^2 + y^2 = 2$ und $y = 2 - x^2$ in der Halbebene mit $y \geq 0$. (Dabei sei $I = \{x \mid y(x) \geq 0\}$.)
Bestimmen Sie den gemeinsamen Inhalt (Durchschnitt) der Flächen zwischen der x-Achse und den Kurven.

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Das experimentelle Studium eines physikalischen Vorgangs führt auf folgenden Zusammenhang:

$$f(x) = a \frac{(x - 6)(x - b)}{x - 4}$$

Weiter ist bekannt, dass $g(x) = x - 5$ eine Asymptote sein muss.

Bestimmen Sie a , b und diskutieren Sie $f(x)$.
(Symmetrie, y-Achsenabschnitt, Nullstellen, Minima und Maxima, Wendepunkte, Pole, Graph.)

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Der Punkt $P_1(3/6/2)$ liegt auf der Kugel K_1 . Zentrum von K_1 ist der Origo. Konzentrisch um K_1 ist eine zweite Kugel K_2 vorhanden mit doppeltem Radius. K_2 ist innen verspiegelt.

Von P_1 aus wird tangential zu K_1 ein Laserstrahl mit $x = \text{const.}$ ausgesendet, der in P_2 auf K_2 trifft und dann nach P_3 auf K_1 geworfen wird (falls ein Schnittpunkt vorhanden ist). P_2 soll so sein, dass die y-Koordinate minimal ist.

Berechnen Sie die Koordinatengleichung der Spiegelebene in P_2 sowie die Koordinaten der Punkte P_2 und P_3 .

(Hinweis: Für einen Spiegel gilt das Reflexionsgesetz, d.h. Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.)

Viel Glück!

Total mögliche Punktzahl (Zusatzaufgabe inkl.): 84 Punkte.
Richtlinie: 6 Aufgaben sind auszuwählen und zu lösen.

Vordiplom 2 1992

Klasse E2D (alt E4D)

Mathematik

Die Prüfung besteht aus 8 unabhängigen Aufgaben aus dem Gebiet der behandelten Mathematik. Total sind 96 Punkte möglich.

Zeit inkl. Pause:
1400 - 1800

WIR92/22/604

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Erlaubte Hilfsmittel: Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbuch, Taschenrechner.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1 % betragen.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nicht akzeptiert.

WIR

A. Kürzere Aufgaben:
-----**Aufgabe 1.1 (6 Punkte)**

Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Schenkellänge a rotiert um die Höhe über der Basis. Bei welchem Basiswinkel ist das Volumen des entstehenden Kegels maximal?

Aufgabe 1.2 (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Identität:

$$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

Hinweis: Gehe mit der Darstellung $z = e^{i\xi}$ mit $\xi = \frac{2\pi}{n}$

in die Summenformel für die endliche geometrische Reihe.

B. Längere Aufgaben:
-----**Aufgabe 2 (12 Punkte)**

Lösen Sie allgemein die D'Gl.: $x y' + 3y = x^2$.

Fortsetzung: Rückseite

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Es ist bekannt, dass ein gegebenes physikalisches System im Idealfall durch die folgende Differentialgleichung beschrieben wird:

$$(I) \quad y'' + y = \delta(t) \text{ mit den Anfangsbedingungen } y(0) = y'(0) = 0.$$

Das System ist für $t > 0$ frei von äusseren Einwirkungen. Im Labor aber stellt man fest, dass keineswegs der Idealfall vorliegt. Um die vorhandene Dämpfung zu beschreiben, führt man noch das Glied $k \cdot y'$ ein mit $0 \leq k \leq 0.1$. Das führt zur D'Gl.:

$$(II) \quad y'' + ky' + y = \delta(t) \text{ mit den Anfangsbedingungen wie in (I).}$$

- Lösen Sie die beiden Differentialgleichungen.
- Beurteilen Sie, ob k im angegebenen Bereich zu sinnvollen Resultaten führt.
- Vergleichen Sie die Lösungen für $t = 2\pi$, wobei y für $k = 0.1$ zu rechnen ist.
- Was ist bei $k < 0$ zu bemerken?

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Diskutieren Sie die Fälle, in denen die folgende Gleichung keine eindeutige Lösung hat und geben Sie in diesen Fällen die Lösungsmenge an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ t & -4 & 2 \\ -1 & t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Gegeben sind die Flächen $\Phi_1: x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ und

$$\Phi_2: x^2 + y^2 - z - 3 = 0.$$

Die Schnittkurve(n) dieser Flächen schneidet(..n) die erstprojizierende Gerade durch $P_1(2/-1/0)$ im (in den) Schnittpunkte(n) $P (P_k)$.

- Bestimmen Sie die Schnittkurve(n) von Φ_1 mit Φ_2 .
- Bestimmen Sie den Winkel γ (Rad) zwischen Φ_1 und Φ_2 in P .

Fortsetzung: Seite 3

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Das experimentelle Studium eines physikalischen Vorgangs führt auf folgenden Zusammenhang zwischen x und y :

$$y = f(x) = a \frac{(x - 6)(x - b)}{x - 4} + \frac{1}{a x^2 + b}$$

Weiter ist bekannt, dass durch $g(x) = x - 5$ eine Asymptote gegeben ist.

Bestimmen Sie a , b und diskutieren Sie $f(x)$.

(Symmetrie, y -Achsenabschnitt, Nullstellen, Minima und Maxima, Wendepunkte, Pole, Graph.) Numerische Werte genügen.

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Der Punkt $P_1(3/6/-2)$ liegt auf der Kugel K_1 . Zentrum von K_1 ist der Origo. Konzentrisch um K_1 ist eine zweite Kugel K_2 vorhanden mit doppeltem Radius. K_2 ist innen verspiegelt.

Von P_1 aus wird tangential zu K_1 ein Laserstrahl mit $x = \text{const.}$ ausgesendet, der in P_2 auf K_2 trifft und dann nach P_3 auf K_1 geworfen wird (falls ein Schnittpunkt vorhanden ist). P_2 soll so sein, dass die y -Koordinate minimal ist.

Berechnen Sie die Koordinatengleichung der Spiegelebene in P_2 sowie die Koordinaten der Punkte P_2 und P_3 .

Aufgabe 8 (12 Punkte)

Für welche Werte des Parameters a besitzt das folgende Vektorfeld ein Potential?

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y(a e^{ax} \ln(x) + (e^x)/x) + x e^{x^2} \\ e^x \ln(x) + \cos(y) \\ 12.248 \end{pmatrix}$$

Bestimme das Potential, falls es existiert.

Viel Glück!

Total mögliche Punktzahl: 96 Punkte.

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Vordiplom 19.....

Name:

Klasse:.....

In diesen Umschlag gehören:

- *Aufgabenblätter*
- Saubere *Lösungen* nach den *Bedingungen* vgl. Aufgabenblätter Seite 1

Datum:

Unterschrift:

.....

.....

Vordiplom 1 1993
Klasse E1D
Mathematik

Zeit inkl. Pause:
0800 – 1100
(180 Minuten)

WIR93/24(23)/604/Mo 4.10.93

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

4. Oktober 1993

Vordiplomprüfung 1 in Mathematik 1993

Klasse E1D, INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Viel Glück !

1. **Extremwertaufgaben:** (Je 6 Punkte, total 12 Punkte)

- (a) Welcher Punkt des Graphen der Funktion $f(x) = y = x^2 + 1$ liegt am nächsten beim Punkt $(3, 1)$? (*Exakter Wert und Begründung!*)
- (b) Bei der Planung eines Hauses mit einem quadratischen Grundriss der Seitenlänge a sollen heutzutage auch ökologische Aspekte mitberücksichtigt werden. Man will das Dach so bauen, dass bei gefordertem Volumeninhalt die Wärmeabstrahlung (und somit die Oberfläche) minimal ist. Da der Bauherr einen Estrich mit mindestens $72m^3$ Inhalt wünscht, kommt nur ein Dach in Form ähnlich einer ägyptische Pyramide (quadratischer Grundriss) in Frage. Wie gross muss man somit die Seitenlänge a des Hauses mindestens planen?

2. **Einfache Integration:** (12 Punkte)

Es gilt:

$$f(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$$

- (a) Berechne exakt den Flächeninhalt zwischen der x -Achse, der y -Achse und dem ersten Abschnitt des Graphen der Funktion f im ersten Quadranten.
- (b) Quadriere f und berechne den beschriebenen entsprechenden Flächeninhalt abermals exakt.
- (c) Was ist das Verhältnis der beiden Flächeninhalte exakt? Entscheide damit die Frage, ob es eine Formel zur Berechnung des Integrals über $(f(x))^2$ mit Hilfe des Integrals über $f(x)$ geben kann, in der nur algebraische Operationen vorkommen.

3. Gleichungssysteme: (12 Punkte)

Gegeben ist folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} px - 2y - 2z &= 2 \\ x - y + z &= 6 \\ 2x + y - 2z &= -3 \end{aligned}$$

- (a) Es ist bekannt, dass für $z = 3$ eine Lösung existiert. Berechne p .
- (b) Berechne anschliessend x und y .
- (c) Für welches p hat das System keine Lösung?

4. Rechnen mit komplexen Zahlen: (12 Punkte)

Gegeben sei die komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$ mit Realanteil $\Re(a) > 0$.

- (a) Skizziere jeweils falls möglich in der komplexen Ebene \mathbb{C} diejenigen Punkte (resp. denjenigen Punkt) $z \in \mathbb{C}$, für die (resp. für den) gilt:

$$\frac{a - z}{\bar{a} + z} = 1$$

- (b) Betrachte die Zahlenfolge

$$z_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{1}}\right) \left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \dots \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

- i. Berechne für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Abstand zwischen z_n und z_{n+1} in \mathbb{C}
- ii. Bestimme folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_n| - |z_{n-1}|}{\operatorname{Arg}(z_n) - \operatorname{Arg}(z_{n-1})}$$

(Hinweis: Bernoulli, binomische Formel.)

5. Matrizen und Eigenwerte: (12 Punkte)

Gegeben sei die Matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechne die Eigenwerte von A .
- (b) Berechne D , U und U^{-1} derart dass gilt: $U^{-1} A U = D$
(D Diagonalmatrix).
- (c) Berechne A^{48} .

6. Kurzaufgaben: (Je 3 Punkte, total 12 Punkte)

- (a) Die urchigen Burschen Humbert, Edelbert, Bernhard, Hartmut und Hansdolf haben dieses Jahr auf der Alp 1999 Käse gefertigt. Da man 1999 nicht durch fünf teilen kann, entsteht Streit. Da kommt gerade der „böse“ Adolf vorbei, der letztthin am gesamtälpischen Schwingerfäscht Schwingerkönig geworden ist. Humbert der Schreckliche, der bei Adolf dem Bösen noch eine Rechnung offen hat, bekommt Angst und verschwindet unbemerkt. Adolf (der glaubt, dass er das Herz noch auf dem rechten Flecken habe) greift ein. Er packt die vier verbliebenen Streithähne hart und zwingt sie zur Einwilligung in folgendes Programm: Damit keiner leer ausgeht, bekommt jeder der vier zuerst einen Käse. Um den Rest soll sportlich gekämpft werden, pro Käse ein Wettkampf mit allen der vier unter sich. Bleibt etwas übrig, weil die urchigen nicht mehr kämpfen können (weil sie keine Kraft mehr haben) so gehört es Adolf. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die leider ununterscheidbaren Käse zu verteilen, falls es den urchigen Burschen gelingen sollte, immer alle Wettkämpfe auszutragen, sodass nichts übrigbleibt für Adolf?
- (b) Stelle eine Formel auf für die maximale Anzahl der Schnittpunkte von n Kreisen und beweise diese Formel mathematisch korrekt.
- (c) Berechne:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+c}$$

- (d) Berechne:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{x}\right)^x$$

— ENDE —

Vordiplom 2 1993
Klasse E2D
Mathematik

Zeit inkl. Pause:
1400 – 1700
(180 Minuten)

WIR93/16/604/Mo 4.10.93

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

4. Oktober 1993

Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 1993

Klasse E2D, INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Viel Glück !

1. Komplexe Zahlen: (12 Punkte)

Gegeben ist die Abbildung der Gaußschen Ebene $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \frac{3+z}{1-z}.$$

- (a) Bestimme die Fixpunkte.
- (b) Berechne $f(f(f(z)))$ und versuche damit auf f^{-1} zu schließen.
- (c) Was ist das Bild der imaginären Achse?

2. Extremalaufgabe: (12 Punkte)

Finde den Ort und den Wert des Minimums der Funktion

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2.$$

Der Definitionsbereich von f ist die Menge der Punkte (x, y) , für die gilt: $x^2 + y^2 \leq 3$. *Hinweis:* Passendes Koordinatensystem verwenden.

3. Laplace-Transformationen: (12 Punkte)

Berechne die Funktion $y(t)$, die folgendes Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{aligned} y' &= y + 2z \\ z' &= 2y + z + f(t) \end{aligned}$$

Dabei sind folgende Anfangsbedingungen gegeben:

$$y(0) = 0; \quad z(0) = 0.$$

Weiter ist f wie folgt bestimmt:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$$

4. **Integrationsproblem:** (12 Punkte)

Zu untersuchen ist folgendes Integral über das Gebiet S :

$$\iint_S x^2 dx dy$$

Dabei ist $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. S_1 ist das Dreieck begrenzt durch den Ursprung, den Punkt $A = (2, 1)$ und den Punkt $(0, 1)$ auf der y -Achse. S_3 erhält man aus S_1 durch Spiegelung am Ursprung. Spiegelt man das durch die Achsen und A gebildete Rechteck R_1 an der y -Achse, so erhält man das Rechteck R_2 . S_2 ist bezüglich R_2 das Komplement des Spiegelbildes von S_1 an die y -Achse. S_4 ist das Spiegelbild von S_2 an den Ursprung. S ist somit eine „ziemlich symmetrische“ Figur („Windrad“).

- (a) Berechne das Integral über S .
- (b) S^* erhält man aus S durch zentrische Streckung um einen unbekanntem Faktor k . Bestimme k so, dass das Integral über S^* den Wert 27 annimmt.

5. **Vektoranalysis:** (15 Punkte)

Sei A eine reelle Matrix und \vec{r} ein Vektor mit folgenden Koeffizienten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Das Vektorfeld \vec{v} erhält man auf \mathbf{R}^3 durch $\vec{v} = A \vec{r}$.

- (a) Berechne $\operatorname{div} \vec{v}$ und $\operatorname{rot} \vec{v}$.
- (b) Untersuche, unter welchen Bedingungen an die Koeffizienten von A das Vektorfeld \vec{v} konservativ ist. Von welchem Typ muss dann A sein?
- (c) Bestimme dann das Potential von \vec{v} (Potentialfunktion $\varphi(x, y, z)$) mit $\varphi(0, 0, 0) = 0$
- (d) Bestimme alsdann die Arbeit (Wegintegral) im Feld \vec{v} längs irgendeines Weges von $B(1, 3, 2)$ nach $C(3, 5, 1)$, wenn A wie folgt gegeben ist:

$$A = M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (e) Bestimme für M den Fluss des Feldes durch die Einheitskugel um den Ursprung.

6. Fourieranalysis: (12 Punkte)

Sei die 2π -periodische Funktion $f(x)$ gegeben durch $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $(0, 2\pi)$.

- (a) Bestimme die Fourierreihe von f . (Rechnung!)
(b) Berechne damit die folgenden Reihen:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Hinweis: Dirichletsche Bedingungen für die Konvergenz ... An den Sprungstellen Konvergenz gegen das arithmetische Mittel ... Parseval ...

- (c) Durch f wird nun eine Spannung beschrieben, die im Labor mittels Überlagerung von Sinus- und Cosinusfunktionen erzeugt werden soll. Man verwendet dazu einfach die ersten hundert Glieder der jeweiligen Summen in der Fourierreihe von f und bricht dann ab. Wie verhält sich voraussichtlich die so konstruierte Spannung an den Sprungstellen von f ? (*Stichwortartige Begründung.*)
- (d) Skizziere und beschreibe die einfachste stetige Funktion, die als Fourierreihe eine reine Sinusreihe hat, 8π -periodisch ist und auf dem Intervall $(0, 2\pi)$ durch $f(x) = x^2$ gegeben ist. Begründe die Wahl.

Man bedenke diesen Moment: Hier endet für Dich die letzte Mathematik-Prüfung an der ISB in dieser Klasse — oder vielleicht überhaupt im Leben ... Alles Gute denn für den weiteren Weg und viel Kraft im Streben nach jenen gewählten Zielen, die Zufriedenheit bringen!

— ENDE —

26. August 1993

Zum Vordiplom

Kürzere Aufgaben (von WIR)

1. **Extremwertaufgabe:** Bei der Planung eines Hauses mit einem quadratischen Grundriss der Seitenlänge a sollen heutzutage auch ökologische Aspekte mitberücksichtigt werden. Man will das Dach so bauen, dass bei gegebenem Volumeninhalt die Abwärmeabstrahlung (und somit die Oberfläche) minimal ist. Da der Bauherr einen Estrich mit mindestens $72m^3$ Inhalt wünscht, kommt nur ein Dach in Form ähnlich einer ägyptische Pyramide in Frage. Wie gross muss man somit die Seitenlänge a des Hauses planen?

Antwort: $6m \cdot \sqrt[6]{2}$

Versuche die folgende Frage „experimentell“ mit bescheidenen graphischen Mitteln zu beantworten: Kann bei gleicher Dachart und gleichem Estrichvolumen ein rechteckiger Grundriss mehr bringen?

Antwort: *Nein.*

2. **Komplexe Zahlen:** Gegeben ist die Abbildung der Gauss'schen Ebene $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ durch $f(z) = \frac{3+z}{1-z}$.

(a) Bestimme die Fixpunkte.

(b) Berechne $f(f(f(z)))$ und versuche damit auf f^{-1} zu schliessen.

(c) Was ist das Bild der imaginären Achse?

Antworten:

(a) $z = \pm i\sqrt{3}$

(b) Es gilt: $f(f(f(z))) = z$ sowie $f^{-1}(z) = \frac{z-3}{1+z}$

(c) Das Bild der imaginären Achse ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(1/0)$ und dem Radius 2.

3. **Einfache Integration:** Es gilt:

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$$

- (a) Berechne exakt den Flächeninhalt zwischen der x -Achse, der y -Achse und dem ersten Abschnitt des Graphen der Funktion f im ersten Quadranten.
- (b) Quadriere f und berechne den beschriebenen entsprechenden Flächeninhalt abermals exakt.
- (c) Was ist das Verhältnis der beiden Flächeninhalte exakt?

Antworten:

- (a) 3
- (b) $\frac{-3^{(\frac{5}{2})}}{4} + 3\pi \approx 5.52766$
- (c) $1 : \frac{-3^{(\frac{3}{2})}}{4} + \pi$

4. **Gleichungssysteme:** Gegeben ist folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} px - 2y - 2z &= 2 \\ x - y + z &= 6 \\ 2x + y - 2z &= -3 \end{aligned}$$

- (a) Es ist bekannt, dass für $z = 3$ eine Lösung existiert. Berechne p .
- (b) Berechne anschliessend x und y .
- (c) Für welches p hat das System keine Lösung?

Antworten:

- (a) $p = 3$
- (b) $x = 2$
 $y = -1$
 $z = 3$
- (c) $p = 14$

Vordiplom 1 1994
Klasse E1D
Mathematik

Zeit inkl. Pause:
0800 – 1100
(180 Minuten)

WIR94/25/604/Mo 10.10.94

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

10. Oktober 1994

Vordiplomprüfung 1 in Mathematik 1994

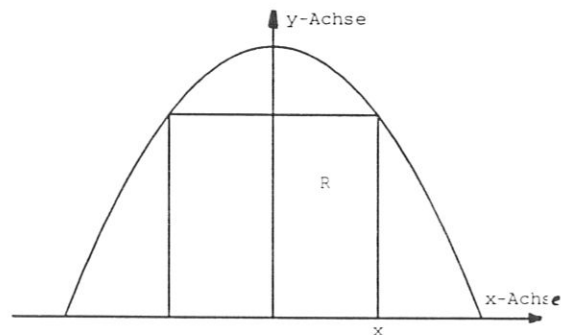
Klasse E1D, INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Viel Glück !

1. (12 Punkte)

Der durch $y = -x^4 + a$ ($a > 0$) und die x -Achse gegebenen Kurve wird gemäss Figur 1 ein Rechteck R eingeschrieben.

Figur 1



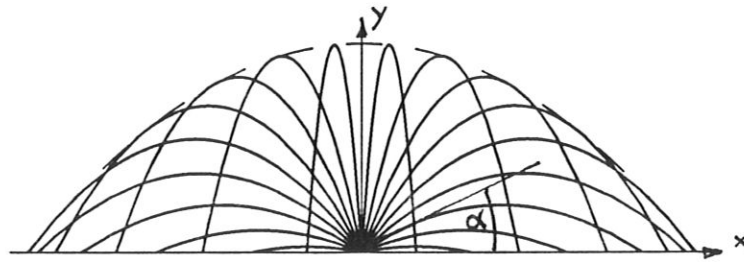
- Berechnen Sie exakt¹ die Seitenlängen und den Inhalt des eingeschriebenen Rechtecks R mit *maximalem* Flächeninhalt.
- Wie hängt das Verhältnis der Inhalte der Fläche zwischen Kurve und x -Achse und des Rechtecks von a ab?
- Für welches a ist das Rechteck ein Quadrat?

¹Z.B. $\sqrt{2}$ oder $2^{\frac{1}{2}}$ statt 1.414.

2.

(12 Punkte)

Figur 2



Ein Wohnzimmerspringbrunnen besteht aus einer grossen Zahl kleiner Wasserstrahlen. In einer vertikalen Schnittebene ((x, y) -Ebene) beobachtet man von einem Zentrum ausgehende Strahlen (vgl. Figur 2) unter verschiedenen Neigungswinkeln α . Alle austretenden Wassertropfen haben dieselbe Startgeschwindigkeit v_0 . Die vom Parameter α abhängigen Kurven $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ sind unter Vernachlässigung der Lufteinflüsse gegeben durch

$$x(t) = v_0 t \cos(\alpha) \quad (1)$$

$$y(t) = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

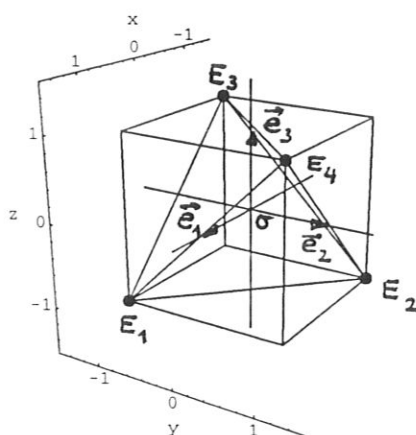
Es sei $v_0 = 1 \frac{m}{sec}$ und $g = 10 \frac{m}{sec^2}$.

- Schreiben Sie bei gegebenem Parameter α die Einzelkurven in der Form $y = f(x)$.
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Maximums (x_m, y_m) einer Einzelkurve in Abhängigkeit vom Winkel α .
- Sei C die Kurve, die bestimmt wird durch die Menge der Punkte maximaler Höhe, die von den Wassertropfen erreicht wird. Zeigen Sie, dass C eine Ellipse bildet. Geben Sie die grosse und die kleine Halbachse.

3. Die beiden Teilaufgaben sind voneinander unabhängig:
(12 Punkte)

(a)

Figur 3



Durch eine Orthonormalbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (ONB) und einen Ursprung O sei ein Koordinatensystem gegeben. Ein achsenparallel liegender Würfel mit Zentrum im Ursprung O des Koordinatensystems ist bestimmt durch den Eckpunkt $E_4 = (1/1/1)$ (vgl. Figur 3). Dem Würfel ist gemäss Figur ein Tetraeder mit den Ecken E_1, E_2, E_3, E_4 eingeschrieben. Durch eine lineare Abbildung \mathcal{A} des Raumes in sich wird E_1 in E_2 , E_2 in E_3 und E_3 in E_1 übergeführt. E_4 bleibt fix. A sei die Matrix, welche \mathcal{A} bezüglich der ONB $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ beschreibt. A' sei die Matrix, welche \mathcal{A} bezüglich einer ONB $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ beschreibt, deren erster Basisvektor vom Ursprung nach E_4 zeigt.

- i. Bestimmen Sie A, A' und $(A')^3$.
- ii. Bestimmen Sie A^{-1} sowie A^2 . Geben Sie zum Vergleich der beiden Matrizen eine geometrische Erklärung ab.
- iii. Bestimmen Sie zu A alle reellen Eigenwerte sowie einen Eigenvektor. Erklären Sie das Resultat geometrisch.

- (b) Die Spur einer $(n \times n)$ -Matrix $M = (m_{ij})$ ist definiert durch die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente: $Sp(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$.
Beweisen Sie, dass für beliebige $(n \times n)$ -Matrizen U und V gilt:
 $Sp(UV) = Sp(VU)$.

4.

(12 Punkte)

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Damit bildet man die (3×3) -Matrix
 $M = \vec{a} \cdot \vec{b}^t$.

(a) Zeigen Sie, dass M höchstens den Rang 1 besitzt.

(b) Beweisen Sie: $\det(E + \vec{a} \cdot \vec{b}^t) = 1 + \vec{a}^t \cdot \vec{b}$.

(c) Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ speziell gewählt. Berechnen Sie α so, dass die Matrix $H = (E + \vec{a} \cdot \vec{b}^t)$ nicht regulär ist. Lösen Sie in diesem Fall die Gleichungssysteme

i.
$$H \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii.
$$H \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.

(12 Punkte)

Es sei

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 t}}, \quad \text{wobei } m \text{ ein Parameter } \in [0, 1) \text{ ist.}$$

(a) Geben Sie die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 t}}$ in $z := m^2 \sin^2 t$ an.

(b) Benützen Sie die Rekursionsformel

$$\int_a^b \sin^n t \, dt = -\frac{\sin^{n-1} t \cos t}{n} \Big|_a^b + \frac{n-1}{n} \int_a^b \sin^{n-2} t \, dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

um aus $\frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 t}}$ eine Potenzreihe für $K(m)$ zu erhalten. (Es genügt, die ersten 5 Terme anzugeben.)

(c) Beweise die Rekursionsformel in 5b.

6. Unabhängige Teilaufgaben

(12 Punkte)

- (a) i. Lösen Sie die Gleichung $x^6 = 1$ in \mathbb{C} (*Skizze!*) und geben Sie die Zerlegung in Linearfaktoren von $p(x) = x^6 - 1$.
 ii. Zerlegen Sie $p(x)$ in möglichst viele Faktoren mit reellen Koeffizienten.
 iii. Berechnen Sie den Koeffizienten des Nenners $(x - 1)$ in der Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{x^6 - 1}$.

(b) i. Berechnen Sie

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

$$\text{Hinweis: } \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x \tan x}.$$

ii. Berechnen Sie daraus

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

iii. Berechnen Sie

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

— ENDE —

Vordiplom 2 1994
Klasse E2D
Mathematik

Zeit inkl. Pause:
1400 – 1700
(180 Minuten)

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

10. Oktober 1994

Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 1994

Klasse E2D, INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Viel Glück !

1. (12 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus zwei unabhängigen Teilaufgaben.

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$x^2 y'' - (a + b - 1)xy' + aby = 0 \text{ in } (0, \infty) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Ansatz $y = x^r$.

- (b) $y_0(x)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung $y' = (\frac{1}{2x} - \lambda)y$ zu einem bestimmten λ -Wert. Über diese Lösung weiss man, dass sie durch den Punkt $(x, y) = (1, 1)$ geht und an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ ein Maximum besitzt.
- i. Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen λ zur besagten Lösung.
 - ii. Bestimmen Sie $y_0(x)$ für $x > 0$.
 - iii. Skizzieren Sie $y_0(x)$ und beurteilen Sie das Verhalten für grosse x analytisch (Asymptote).

2.

(12 Punkte)

Ein Elektron mit der Masse m und der Ladung e bewegt sich auf einer ebenen Kurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ unter dem Einfluss des konstanten elektrischen Feldes $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und des konstanten magnetischen Feldes $\vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_3 \end{pmatrix}$. Es ist $E_2, H_3 > 0$. Die Bewegung des Elektrons wird wie folgt beschrieben:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - e H_3 \frac{dy}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + e H_3 \frac{dx}{dt} = e E_2 \quad (2)$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = y(0) = 0$ und $\frac{dx}{dt}(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 0$.

- Bestimmen Sie die Lösung für $\frac{e H_3}{m} = 1$ und $\frac{E_2}{H_3} = 2$. (Laplace-Transformationen.)
- Wie verhält sich die Lösung für grosse t ?
- Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\vec{r}(t)$? (Skizze!)

3.

(12 Punkte)

Sei

$$f_1(t) = t, \quad t \in I = [-\pi, \pi) \quad (3)$$

$$f_1(t) = f_1(t + 2\pi) \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad (4)$$

- (a) Sie können davon ausgehen, dass die Fourierkoeffizienten a_k und b_k von $f_1(t)$ bekannt sind. Berechnen Sie ohne Formelsammlung die Fourierkoeffizienten A_k und B_k von $f_2(t) = f_1(t)^2$ aus denen von $f_1(t)$.
- (b) Wenden Sie auf f_2 die Parsevalsche Gleichung an. Damit lässt sich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ berechnen. Führen Sie die Berechnung durch.
- (c) Berechnen Sie ohne Formelsammlung die Fourierreihe der 2π -periodischen Funktion $f_3(t) = \left(\frac{t}{\pi}\right)^3 - \frac{t}{\pi}$, $t \in I$. Welche Zahlenreihe entsteht für $t = \frac{\pi}{2}$?

4.

(12 Punkte)

Es sei $f(z) = \frac{i(z-1)}{z+1}$. Weiter sei $w = h(z)$ diejenige gebroche lineare Abbildung, für die gilt: $h(0) = i$, $h(i) = \infty$, $h(\infty) = 1$.

- (a) Bestimmen Sie $h(z)$.
- (b) Bestimmen Sie $h(f(z))$ und die Fixpunkte dieser Abbildung.
- (c) Bestimmen Sie die Bilder der reellen und der imaginären Achse für die Abbildung $f(z)$. Skizzieren Sie das Bild des ersten Quadranten.
- (d) Welche Geraden werden durch $f(z)$ in Geraden abgebildet?

5.

(12 Punkte)

Eine in der (x, y) -Ebene des Raumes liegende Kurve C ist in Polarkoordinaten gegeben durch $r(\varphi) = (1 - \cos \varphi)$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$. D sei das von der Kurve C begrenzte Flächenstück.

- (a) Skizzieren Sie die Kurve.
 (b) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(\varphi)$ und beurteilen Sie, ob die Krümmung überall endlich ist.
 (c) Berechnen Sie die Kurvenlänge sowie den Inhalt von D exakt¹.
 (d) Durch $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ x^2 - 2y \end{pmatrix}$ und $\vec{G}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ x \\ x - 2y \end{pmatrix}$ sind zwei Vektorfelder gegeben. Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{und} \quad \oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r}.$$

- (e) D sei die Grundfläche eines geraden Zylinders der Höhe 1. Berechnen Sie den Fluss des Feldes $\vec{G}(x, y)$ durch die gesamte Oberfläche des Körpers.

¹Z.B. $\sqrt{2}$ oder $2^{\frac{1}{2}}$ statt 1.414.

6. Unabhängige Teilaufgaben

(12 Punkte)

- (a) K sei der Einheitskreis (Mittelpunkt im Ursprung). Q sei ein Quadrat mit ebenfalls dem Mittelpunkt im Ursprung und den Eckpunkten auf den Koordinatenachsen. Wie gross muss die Seitenlänge des Quadrates sein, damit die nachfolgende Gleichung stimmt?

$$\iint_K (x^2 + y^2) dx dy = \iint_Q (x^2 + y^2) dx dy$$

- (b) Betrachten Sie das von t abhängige lineare Gleichungssystem

$$A(t) \cdot \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ und } A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 + t^2 \end{pmatrix}.$$

- i. Bestimme $\vec{x}(t) \forall t \in \mathbf{R}$.
- ii. Zeigen Sie: Die beiden Vektoren \vec{u} und \vec{v} der Lösung $\vec{x}(t) = c_1 \vec{u}(t) + c_2 \vec{v}(t)$ sind linear unabhängig $\forall t \in \mathbf{R}$.
- iii. Zeigen Sie:
 $\vec{x}(t)$ ist Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = B(t) \cdot \vec{x}$$

mit speziellem $B(t)$. Berechnen Sie $B(t)$.

Hinweis: Berechnen Sie $B(t)$ aus $A(t) \cdot \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ durch Differenzieren nach t . (Die Produktregel gilt auch für Matrizen.)

— ENDE —