Vordiplom 1 1995

Klasse E1D

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
Teil Analysis: 08.00 – 10.00,
(10.00 – ca. 10.10 abgeben, bereitstellen)
Teil Algebra: 10.10 – 11.10
(180 Minuten)

WIR95/20/604/Mo 9.10.95

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

9. Oktober 1995

Vordiplomprüfung 1 in Mathematik 1995

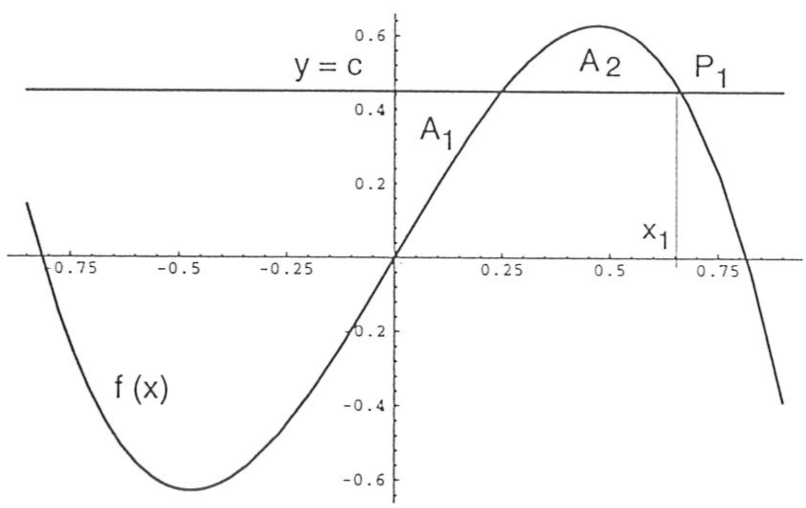
Klasse E1D, INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Viel Glück !

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Von der zum Ursprung punktsymmetrischen Funktion $f(x) = y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ist bekannt, dass $a_1 = 2$ sowie $a_3 = -3$ ist. Durch die Gerade $y = c$ werden zwei Flächen mit den Inhalten A_1 und A_2 definiert (vgl. Abb. 1). P_1 ist der Punkt $(x_1, f(x_1))$.

Abbildung 1: Skizze



(a) Bestimmen Sie die fehlenden Koeffizienten a_i.

(b) Berechnen Sie c *exakt*[1] so, dass $A_1 = A_2$ ist.
Hinweis: Man integriere $h(x) = f(x) - c$ von 0 bis x_1.

[1] Z.B. $\sqrt{2}$ oder $2^{\frac{1}{2}}$ statt 1.414.

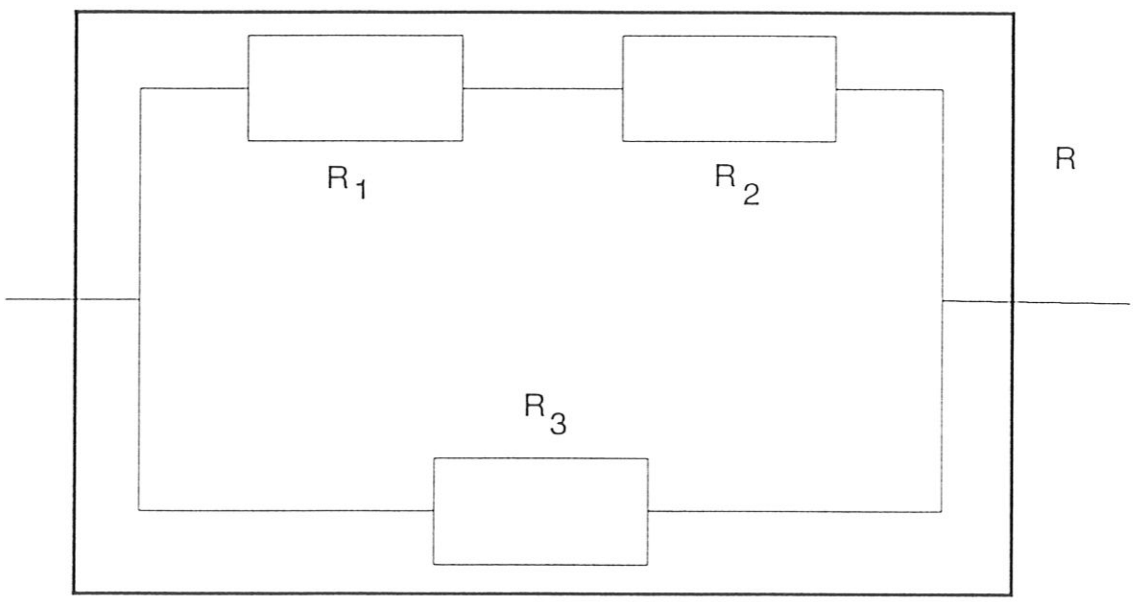
Aufgabe 2 (12 Punkte)

Nach der in Abbildung 2 gezeigten Schaltung wird ein Gesamtwiderstand R mit Hilfe von drei eingekauften Widerständen R_1, R_2 und R_3 zusammengebaut. R_1 und R_2 sind in Serie, R_3 ist jedoch dazu parallel geschaltet. Der Lieferant garantiert: $R_1 = 10\Omega \pm 0.5\Omega$, $R_2 = 30\Omega \pm 0.5\Omega$, $R_3 = 100\Omega \pm 6\Omega$.

Der Lehrling, der die Schaltung sauber zusammenlöten und ausmessen musste, meldet Ihnen, dass der Gesamtwiderstand um etwa 5Ω vom gerechneten Wert abweiche. Das ist weniger als die Summe der einzelnen Toleranzen.

Berechnen Sie den absoluten Fehler des Gesamtwiderstands und beurteilen Sie, ob die Arbeit des Lehrlings akzeptiert werden kann.

Abbildung 2: Skizze



Aufgabe 3

Zur Auswahl stehen zwei unabhängige Teilaufgaben.
Es muss nur ein davon gelöst werden!

(12 Punkte)

(a) Gegeben ist

$$z_0 = 0 \tag{1}$$

$$z_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{i\varphi}}{2}\right)^k \tag{2}$$

Dabei ist $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

i. Skizzieren Sie die ersten 8 Punkte in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ und verbinden Sie jeweils z_k mit z_{k+1} durch ein Geradenstück. Den so entstehenden Streckenzug von z_0 bis z_n nennen wir s_n. (Maßstab: $1 Einheit \hat{=} 4\,cm$.)

ii. Berechnen Sie falls möglich den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} z_n$ exakt. (Das Resultat ist in der Form $z_\infty = a + ib$ (a, $b \in \mathbf{R}$) zu schreiben.)

iii. Berechnen Sie die exakte Länge des Streckenzuges s_∞.

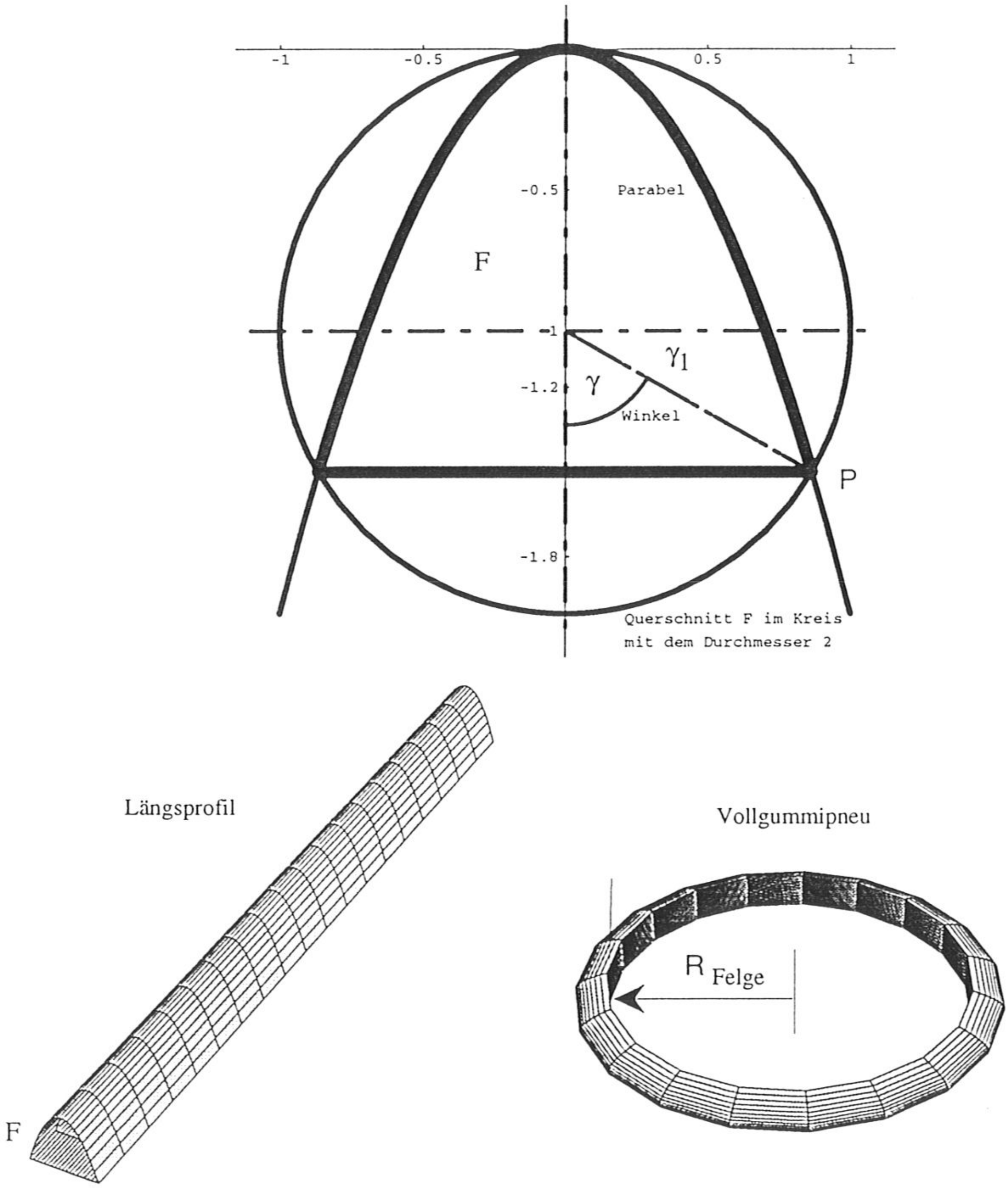
Alternative:

(b) Es wird folgender Sachverhalt vermutet:

$$2\sum_{k=1}^{n} k + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n\,(n+1)^2\,(n+2)$$

Beweisen sie die Formel durch *vollständige Induktion* (oder widerlegen Sie die Formel).

Abbildung 3: Skizze



Aufgabe 4 (15 Punkte)

Ein Vollgummipneu mit parabelförmigem Querschnitt F (vgl. Abb. 3) soll durch stirnseitige Verschweissung eines Längsprofils hergestellt werden. Mit der vorhandenen Maschine lassen sich Profile herstellen, deren Querschnitte in einen Kreis von maximal $2\,cm$ Durchmesser passen.

(a) Geben Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die Funktion der Parabel. Dabei ist die Öffnung der Parabel abhängig vom Winkels γ. (γ oder $\gamma_1 = \pi - \gamma$ ist als Parameter zu wählen.)

(b) Die Verwendung des fertigen Rades erfordert, dass möglichst viel Gummi vorhanden ist. Bestimmen Sie den Winkel γ so, dass der Inhalt der Querschnittsfläche dem Betrage nach *maximal* wird. Berechnen Sie damit den Betrag des Inhalts der Querschnittsfläche F.

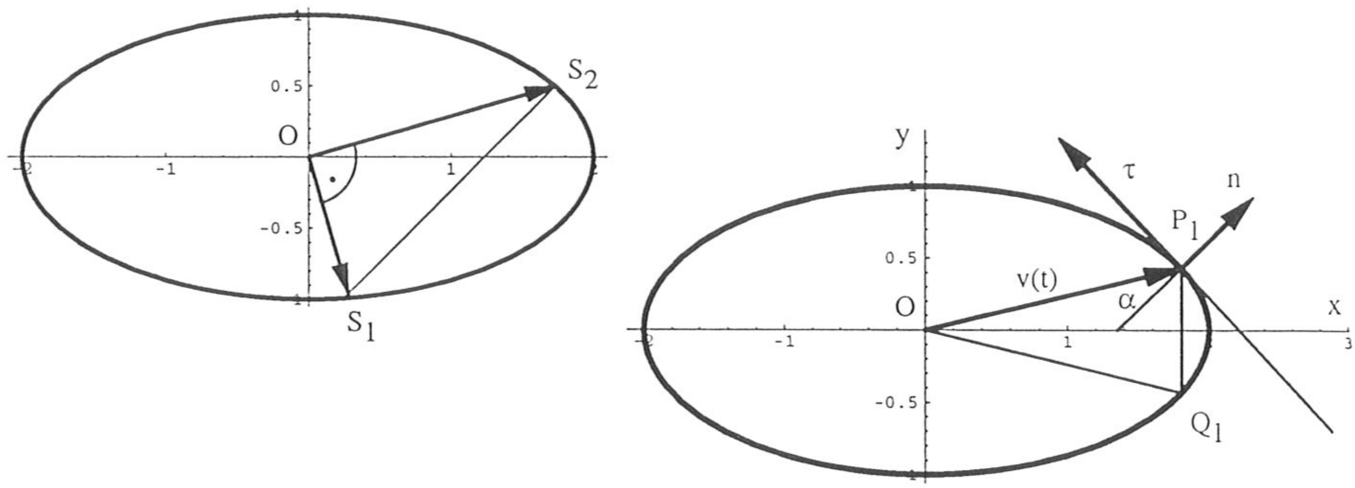
(c) Der fertige Pneu soll auf eine Felge mit dem Durchmesser $d = 20\,cm$ aufgezogen werden. Welches Gummivolumen V ist notwendig für einen Pneu, dessen Form durch Rotation des Parabelbogens entsteht? (Der parabelförmige Querschnitt F rotiert auf dem Felgenradius R_{Felge}, vgl. Figur in Abb. 3.)

— Ende Teil Analysis —

— FORTSETZUNG: Teil Algebra —

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Abbildung 4: Skizze



Durch $\vec{v}(t) = \binom{2cos(t)}{sin(t)}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ ist eine Kurve in Parameterform gegeben. Die Gerade $\overline{OS_1}$ steht senkrecht auf der Geraden $\overline{OS_2}$ (vgl. Abbildung 4 links oben).

(a) Setzen Sie $\vec{OS_1} = \begin{pmatrix} 2cos(t) \\ sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie damit $\vec{OS_2}$ sowie den Flächeninhalt $A(t)$ des Dreiecks OS_1S_2.

(b) Ein von O ausgesandter Lichtstrahl wird bei P_1 an der Kurve (Tangente τ) nach Q_1 gespiegelt. Bei welchem $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ wird der Lichtstrahl von Q_1 aus wieder nach O reflektiert? (Falls es ein solches t gibt, genügt ein numerisches Resultat.)

Aufgabe 6 (12 Punkte)

(a) Eine Matrix M heisst *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, sodass $M^n = N$ ist. (N ist die Nullmatrix.) Sei $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$.

i. Welche Bedingung muss für die Determinante von M gelten, damit M nilpotent sein kann?

ii. Sei M die spezielle Matrix $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ s & 0 & s\lambda \end{pmatrix}$. Können s und λ so gewählt werden, dass $M_1^2 = N$ ist? Berechnen Sie λ und s, sofern das möglich ist.

(b) Seien

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & 0 & -sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\varphi) & 0 & cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

i. Wählen Sie x, y und z so, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch M_3 in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet wird.

ii. Sei $M_5 = M_4 \cdot (M_2 \cdot M_3)$, M_3 wie oben berechnet. Die Matrix M_5 bildet die Ebene $\Phi_1 :\ z = 1$ in eine Ebene Φ_2 ab. Bestimmen Sie den Abstand der Bildebene Φ_2 vom Ursprung.
(Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, was die geometrische Bedeutung von M_4 und von φ ist.)

iii. Die Vektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ (Orthonormalbasis) definieren einen Einheitswürfel. Eine (3×3)-Matrix bildet bekanntlich den Einheitswürfel in einen Spat ab. (Der Spat kann auch entartet sein, z.B. wenn alle drei Bildvektoren parallel zu einer Ebene sind.) Berechnen Sie auf kurze Art das Volumen des durch M_5 erzeugten Bildes des Einheitswürfels.

— ENDE —

Vordiplom 2 1995

Klasse E2D

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
14.00 – 17.00
(180 Minuten)

WIR95/24/604/Mo 9.10.95

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

9. Oktober 1995

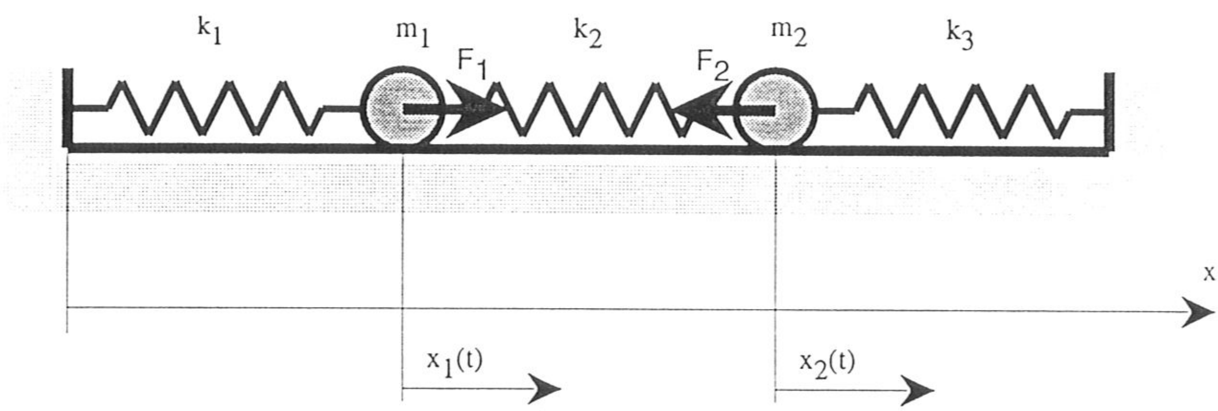
Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 1995

Klasse E2D, INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Viel Glück !

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Abbildung 1: Skizze



Zwei Kugeln mit den Massen $m_1 = 4$ und $m_2 = 2$ sind an drei Federn mit den Federkonstanten $k_1 = k_2 = 2$ und $k_3 = 1$ gemäss Abbildung 1 befestigt. Die Reibung der Kugeln auf der Unterlage soll nicht berücksichtigt werden. Dasselbe gilt für die physikalischen Einheiten.
$x_1(t)$ und $x_2(t)$ seien die Auslenkungen von m_1 bzw. m_2 aus ihrer Ruhelage. Bis zur Zeit $t = 0$ ist das System in Ruhe (d.h. $x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0$). Für $t > 0$ greift je eine konstante Kraft $\vec{F}_1 = 1$ an m_1 resp. $\vec{F}_2 = -1$ an m_2 in Richtung der x-Achse an.

(a) Stellen Sie die Differentialgleichungen auf für die Auslenkungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der beiden Kugeln.

(b) Bestimmen Sie die Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Abbildung 3 zeigt den Fahrleitungsdraht der SBB unter einer Betonbrücke. Zur Zeit $t_0 = 0$ ist die Spannung im Draht $15\,000\,V$. $200\,cm$ unter der Brücke hängt der Draht mit $1.5\,cm$ Durchmesser. (Zur Vereinfachung: Kreisförmiger Querschnitt.)
Um den *Potentialverlauf* unter der Brücke zur Zeit t_0 näherungsweise berechnen zu können nehmen wir an, der Boden sei unendlich weit weg, die Brücke sei unten eben und ihre Länge sowie ihre Breite seien unendlich gross.
Zur Lösung des Problems bilden wir die geometrische Situation in $\mathbf{C}$ durch eine *Möbiustransformation* derart ab, dass der Kreis (Draht) und die Gerade (Brücke) in zwei zentrische Kreise übergehen. Das Bild von $z_0 = 0$ ist $w_0 = i$. Die Einheiten dürfen nun weggelassen werden.

(a) Bekanntlich liefert die Möbiustransformation

$$f(z) = c\,\frac{z+ib}{z-ib}$$

die gewünschte Abbildung ($b \in \mathbf{R}$). Der Drahtquerschnitt geht dabei in D über, das restliche Gebiet unter der Brücke in G, das Gebiet oberhalb in H, vgl. Abb. 3. Berechnen Sie b und c.
Hinweis: Im Bildbereich bilden die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ ein symmetrisches Punktepaar bezüglich der beiden zentrischen Kreise. Man suche die Urbildpunkte.

(b) Die Umgebung des Drahtes ist quellenfrei, d.h. $div\vec{E} = div(grad(\varphi)) = \triangle\varphi = 0$
Schreiben Sie im Bildgebiet (aufgefasst als reelle Ebene $\mathbf{R}^2$) die Potentialgleichung $\triangle\varphi = 0$ in Polarkoordinaten (r, α). Berechnen Sie φ in Abhängigkeit vom Radius $r = |f(z)|$.

———

Abbildung 2: Skizze

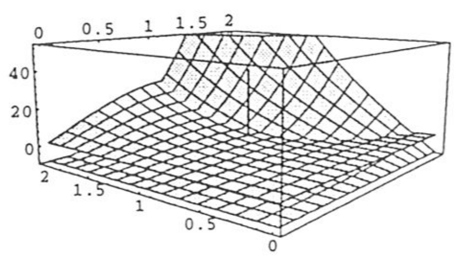
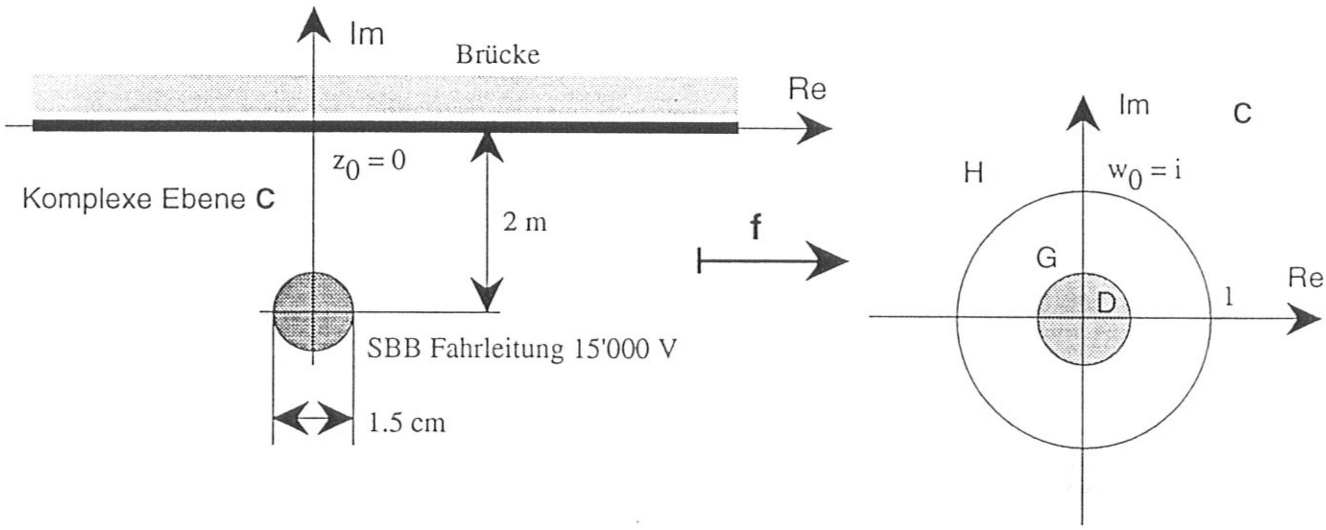


Abbildung 3: Skizze



Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Die Schnittkurve γ der beiden Flächen

$$\begin{aligned} z = f(x,y) &= 2x^2y^3 + 6x^3y - 8 \\ z = g(x,y) &= 4xy^3 - 2x^3y^2 + 2 \end{aligned}$$

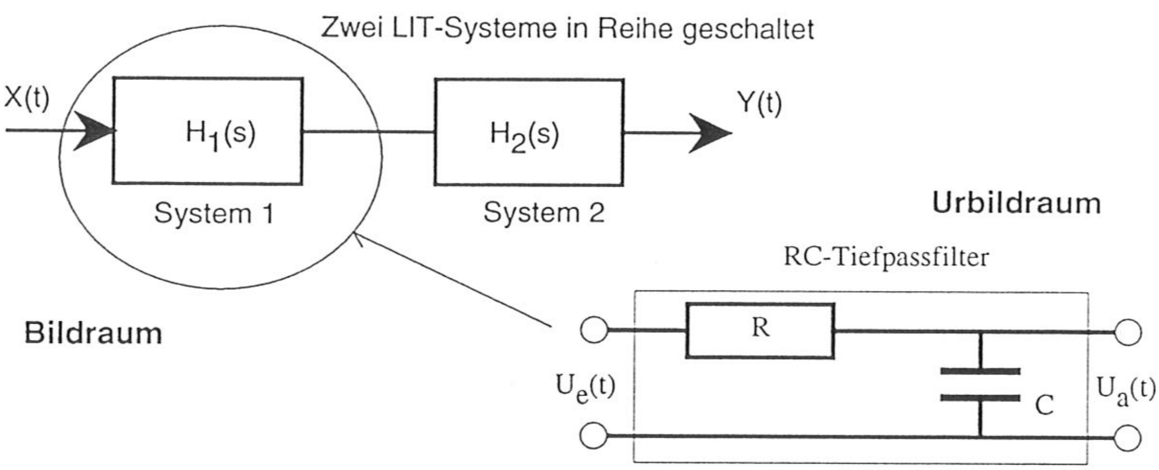
durchstösst die xy-Ebene in der Nähe des Punktes $(x_0, y_0) = (1,1)$. (Vgl. dazu Abb. 2.) Zur Verbesserung dieses Wertes bestimme man

(a) die Tangentialebenen von $z = f(x,y)$ sowie von $z = g(x,y)$ in (x_0, y_0);

(b) den Schnittpunkt (x_1, y_1) der Schnittgeraden der beiden Ebenen mit der Ebene $z = 0$ sowie die Werte $f(x_1, y_1)$ und $g(x_1, y_1)$.
Vergleichen Sie die Differenz $g(x_1, y_1) - f(x_1, y_1)$ mit der Differenz $g(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)$ in Dezimalbruchform.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Abbildung 4: Skizze



Ein RC-Tiefpassfilter (vgl. Abbildung 4) wird bekanntlich durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$RC\,\dot{U}_a + U_a = U_e.$$

Dabei ist $R = 100\,k\Omega$ und $C = 10\,\mu F$. U_e ist die Eingangsspannung, U_a die Ausgangsspannung des Filters.

(a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion (Bildraum) sowie die Impulsantwort (Urbildraum) dieses Filters. (Man beziehe sich auf die Einheiten Ω, F und V. In den Rechnung können die Einheiten dann weggelassen werden.)

(b) Zwei solche identische Filter werden in Serie geschaltet. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems und zeigen Sie damit, dass das System stabil sein muss.

(c) Sei $U_e(t) = 10\,(1 - cos(t))\,V$. Zur Zeit $t = 0$ ist das System in Ruhe. Berechnen Sie und skizzieren Sie die Ausgangsspannung $U_{GS}(t)$ des Gesamtsystems (Serie).

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Abbildung 5: Skizze

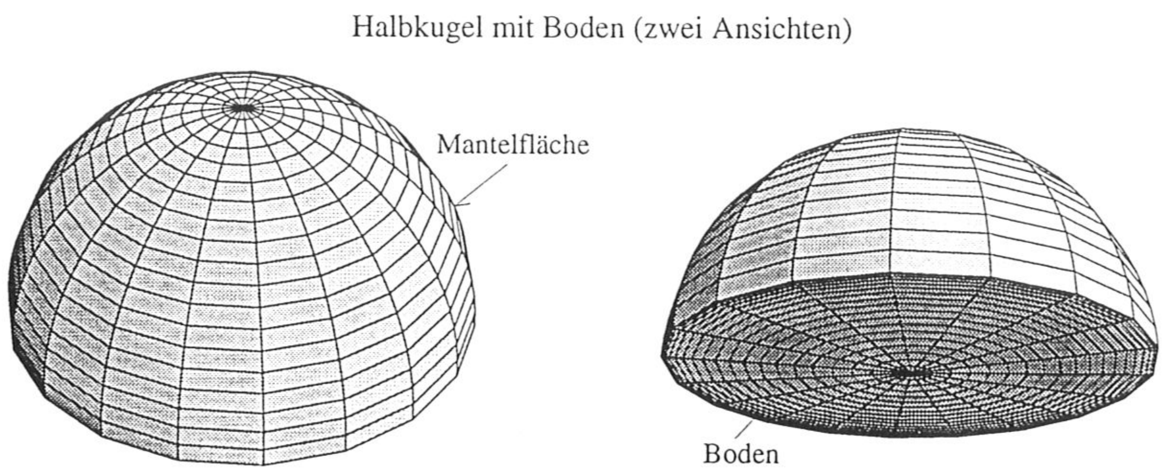


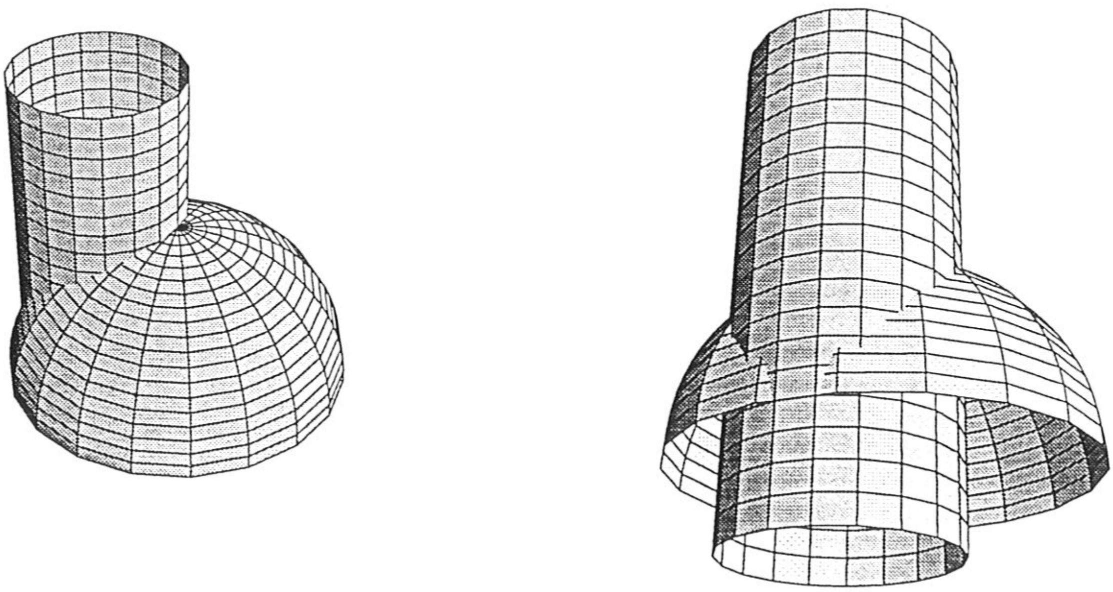
Abbildung 5 zeigt eine Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $(z \geq 0)$ mit Boden.

(a) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$ durch die gesamte Oberfläche sowie durch die Mantelfläche.

(b) Berechnen Sie den Fluss der Rotation des Vektorfeldes $\vec{F_2} = \begin{pmatrix} -y^3 \\ yz^2 \\ y^2 z \end{pmatrix}$ durch die Mantelfläche sowie durch die Bodenfläche.

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Abbildung 6: Skizze



Die Halbkugel $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4$, ($z \geq 0$, vgl. Abbildung 6) wird vom Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ ($z \in \mathbf{R}$) geschnitten.
Wir setzen $x = x(t) = cos(t)$.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Parameterdarstellung $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \\ 2sin(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}$ die Schnittkurve beschrieben wird und berechnen Sie die Krümmung κ dieser Kurve für $t = \pi$.

(b) Bestimmen Sie für $t = \pi$ den Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}$ und den Hauptnormaleneinheitsvektor $\vec{N}$.
Berechnen Sie damit den Mittelpunkt des Krümmungskreises für $t = \pi$.

— ENDE —

Vordiplom 1, Algebra, 1996

Klassen E1B, E1D

Mathematik

Zeit:

Teil Algebra: 60 Minuten
Teil Analysis: 120 Minuten,

(dazwischen: abgeben, bereitstellen)

WIR96/24/302//23/604//Mo 7.10.96

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

7. Oktober 1999

Vordiplomprüfung 1 in Algebra 1996

Klassen E1B, E1D, INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Diese Aufgabe besteht aus zwei unabhängigen Teilaufgaben, die beide gleich bewertet werden.

(a) Gegeben ist das komplexe Polynom

$$p(z) = iz^5 + az^4 - 40iz^3 - 80z^2 + 80iz + b, \qquad (a,\, b \in \mathbf{R})$$

Von diesem Polynom weiss man, dass die Summe der Nullstellen $-10/i$ beträgt und das Produkt der Nullstellen $-31/i$.
Stellen Sie alle Nullstellen in einer Skizze graphisch dar (Maßstab: 1 *cm* resp. 2 Häuschen $\hat{=}$ Einheit.) Beantworten Sie damit die Frage, ob dieses Polynom eine reelle Nullstelle hat.
Hinweise: Setzen Sie $iz = w$, *Hauptsatz der Algebra,* $(w+k)^n = ?$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$.
Für welche x, y, z, w gilt $A \cdot B = B \cdot A$? Wählen Sie bei der Berechnung gegebenenfalls x als Parameter.

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Sei $S = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie x so, dass $det(S) = 4$ ist. Verwenden Sie in den nachfolgenden Teilaufgaben das erhaltene Resultat.

(b) Stellen Sie S in der Form $S = UDU^{-1}$ dar ($D = Diagonalmatrix$).

(c) Untersuchen Sie, was mit dem Vektor $\vec{b}_n = S^{-1}(S^{-1}(\ldots(S^{-1}\vec{a})\ldots)) = (S^{-1})^n\,\vec{a}$ ($\vec{a} \in \mathbf{R}^3$) passiert, wenn n ($n \in \mathbf{N}$) gegen ∞ strebt.

(d) Sei T eine beliebige symmetrische Matrix mit $T = UDU^{-1}$ (D Diagonalmatrix).
$P_n(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0$ sei das charakteristische Polynom von T. Erklären Sie, weshalb die folgende Gleichung gilt:

$$P_n(T) = T^n + c_{n-1}T^{n-1} + \ldots + c_1 T + c_0 E = N \qquad (N = Nullmatrix)$$

— ENDE —

Vordiplom ◇ Examen propédeutique 2, 1996

Klasse — classe B2

Mathematik ◇ mathématiques

Dauer / *Durée*: 8.00 h – 11.00 h

Teil / *partie* 1: 90 Minuten / *minutes*
Teil / *partie* 2: 90 Minuten / *minutes*,

(dazwischen kurze Pause ◇ *courte récréation entre les deux parties*)

WIR96/B2/21/RIIb//Mo 7.10.96

Bedingungen — Conditions:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge. *Tous les problèmes sont à résoudre soi-même. Un comportement malhonnête a comme conséquence l'exclusion immédiate de l'examen.*

- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert. *Pour écrire il faut un moyen inéffaçable. Le crayon est accepté seulement pour les dessins et les esquisses.*

- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert. *On demmande une présentation de déduction de la solution claire et propre. Des résultates sans déduction ne sont pas acceptés.*

- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen. *Quand des fractions décimales sont utilisées le résultat exact et le résultat présenté ne doivent pas différer de plus que* 0.1%.

- Resultate sind doppelt zu unterstreichen. *Les résultates sont à souligner deux fois.*

- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen. *Les parties pas valables sont à tracer nettement.*

- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert! *Pour chaque problème il faut utiliser une nouvelle feuille. Le verso doit rester libre. Peut-être il ne sera pas corrigé!*

- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
  Moyen permis: *Cours (résumé), livres de formules, calculatrice, papier et écritoire.*

7. Oktober / *octobre*1996

Vordiplomprüfung — Examen préalable 1996

Klasse / classe E2
INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) / école d'ingénieurs Bienne (ETS)

Viel Glück ! ◇ Bonne chance!

Probl. 1 **(12 Punkte / *points*)**

(a)

$$f(x) = k\, e^x \sqrt{x} + e^{4k} - k\, x, \qquad \frac{d}{dx} f(x) = ?$$

(b)

$$f(x) = \frac{y}{log(x^2) + y} + x^{\frac{1}{x}}, \qquad \frac{d}{dx} f(x) = ?$$

(c)

$$f(x) = x \sin(x^2) \cos(x^2), \qquad \int f(x)\, dx = ?$$

(d)

$$f(x) = \frac{x^3(\cos(x^2) + e^{(x^2)})}{\ln(|x| + 5)}, \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\, dx = ?$$

Probl. 2 (12 Punkte / *points*)

Abbildung 1: Skizze / *esquisse*

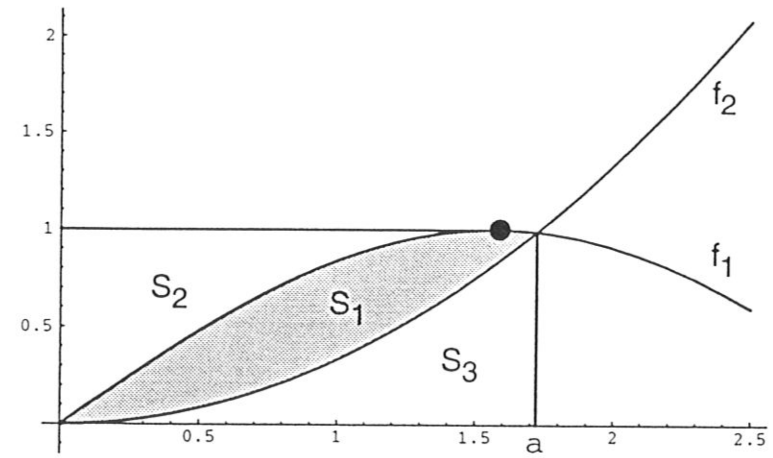


Abb. 1 zeigt $f_1(x) = \sin(x)$ und $f_2(x) = \frac{x^2}{3}$.
L'image 1 montre $f_1(x) = \sin(x)$ *et* $f_2(x) = \frac{x^2}{3}$.

(a) Berechnen Sie a (vgl. Skizze) numerisch.
Calculer a (voir esquisse) numériquement.

(b) Berechnen Sie die Flächeninhalte von S_1, S_2 (bis $\frac{\pi}{2}$) und S_3.
Calculer la surface de S_1, S_2 (jusqu'à $\frac{\pi}{2}$) et S_3.

Probl. 3 **(12 Punkte / *points*)**

Abbildung 2: Ein Turm / *Une tour*

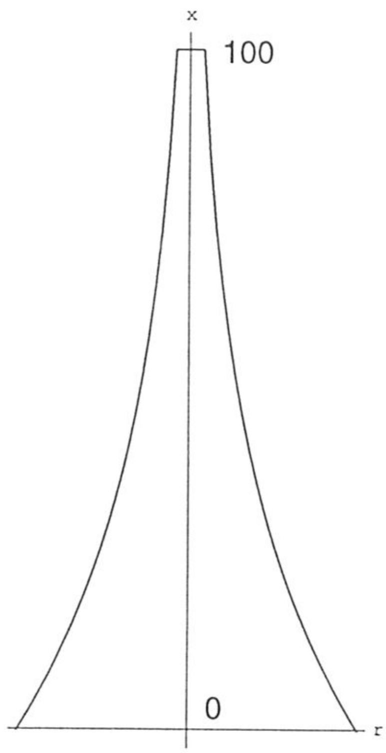


Abb. 2 zeigt einen rotationssymmetrischen Turm. Dabei ist $r(x) = c\,e^{ax}$. Für $x = 0$ ist $r = 2.0$, für $x = 100$ ist $r = 1.2$ (in m).
L'image 2 montre une tour à symétrie de révolution. Soit $r(x) = c\,e^{ax}$. Pour $x = 0$ on a $r = 2.0$, pour $x = 100$ on a $r = 1.2$ (en m).

(a) Berechnen Sie die Funktion $r(x)$.
Calculer la fonction $r(x)$.

(b) Wie gross ist r bei $x = 2$?
Calculer r à $x = 2$!

(c) Berechnen Sie das Volumen des Turms.
Calculer le volume de la tour.

Probl. 4 **(12 Punkte / *points*)**

Gegeben ist die Funktion — *Soit donnée la fonction* $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x + 2$.

(a) Kontrollieren Sie, ob diese Funktion bei $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 3.84732$ eine Nullstelle hat.
Controller si cette fonction a un zéro à $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 3.84732$.

(b) Skizzieren Sie die Funktionskurve.
Dessiner une esquisse de la courbe de cette fonction.

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Kurve.
Trouver tous les zéros, les points extrêmes et les points d'infléxion de cette fonction.

Probl. 5 **(12 Punkte / *points*)**

Gegeben ist das Gleichungssystem — *Soit donné le système d'équations*:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ rx - y - z &= 1 \\ 2x + y - 4z &= -3q \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Für $z = 3$ und $q = 1$ existiert eine Lösung. Berechne x, y und r.
Pour $z = 3$ *et* $q = 1$ *il existe une solution. Calculer* x, y *et* r.

(b) Sei $q = -2$. Für welche r existieren keine resp. unendlich viele Lösungen?
Soit $q = -2$. *Decider pour quels* r *il n'y a pas de solution resp. infiniment de solutions.*

Probl. 6 **(12 Punkte / *points*)**

Eine Gruppe von Studenten hat die Körpergrösse von Mitstudenten gemessen. Hier sind die Messdaten (in cm):
Un group d'étudiants a mesuré la taille d'un nombre d'étudiants de l'école. Voici les données (en cm):

173	178	177	173	184	161	162	169	154	188
177	177	169	183	185	183	173	192	182	181
176	177	169	177	173	163	192	165	156	159
175	173	179	178	177	168	158	183	187	175
174	173	179	169	179	168	174	194	160	187

(a) Teilen Sie die Daten in Klassen ein mit den Klassenmitten $152, 157, 162, \ldots$ (Klassenbreite 5).
Classifier les données dans des classes dont les millieus sont $152, 157, 162, \ldots$ *(largeur des classes* 5*).*

(b) Berechnen Sie Mittelwert sowie Standardabweichung der Klassen.
Calculer la valeur moyenne et la déviation standard.

(c) Stellen Sie die Klassen in einem Balkendiagramm oder Histogramm dar.
Représenter ces classes à l'aide d'un diagramme de barre ou bien histogramme.

Probl. 7 **(12 Punkte / *points*)**

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:
Résoudre les équations différentielles suivantes:

(a)

$$y(x)\,y'(x) - x = 1, \qquad y(1) = 2$$

(b)

$$y'(x) = e^{-x}\,y(x)$$

Probl. 8 **(12 Punkte / *points*)**

Gegeben sind die folgenden Matrizen. *Soient données les matrices suivantes:*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M_4 sei die Inverse von M_3 — *soit M_4 l'inverse de M_3,*
$M_5 = M_4 \cdot M_2$.
Die Gerade g ist gegeben durch — *la droite g soit donnée par*

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbb{R}).$$

(a) Berechnen Sie / *Calculer* M_4 und / *et* M_5.

(b) Berechnen Sie das Bild g' von g unter M_5 / *Calculer l'image g' de g : $\vec{v} = M_5 \cdot \vec{r}$.*

(c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g' mit der Geraden $y = x$.
Calculer le point d'intersection de g' avec la droite $y = x$.

(d) Bestimmen Sie das Volumen des Spats, der aufgespannt wird durch die Ortsvektoren zu den Punkten $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.
Vergleichen Sie das Resultat mit der Determinante von M_1.
Calculer le volume du parallélépipède étendu par les vecteurs liés aux points suivants: $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.
Comparez le résultat avec la valeur de la déterminante de M_1.

— ENDE — ◇ — FIN —

Vordiplom 2 1996

Klasse E2D

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
14.00 – 17.00
(180 Minuten)

WIR96/18/604/Mo 7.10.96

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

7. Oktober 1996

Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 1996

Klasse E2D, INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Viel Glück !

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = (2(x-y) - 3(x-y)^3)\, cos(x+y).$$

Der Definitionsbereich ist das Gebiet $D = (-0.4, 0.4)^2$.

(a) Suchen Sie einen Punkt im Innern von D (der Rand ∂D gehört nicht zu D), in dem die Funktion f ein *Maximum* annimmt.

(b) Berechnen Sie das Volumen zwischen D und dem Graphen von f (2-dim. Fläche).

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(z) = (-2)^z$ mit $z \in \mathbf{C}$ (komplexe Zahlen $\mathbf{C}$).

(a) Klären Sie die Frage, ob f komplex differenzierbar (holomorph) ist.

(b) Skizzieren Sie die Bilder der reellen und der imaginären Achse unter f.

(c) Während die Achsen nur einen Schnittpunkt haben (den Ursprung), haben die Bilder der Achsen vermutlich mehrere Schnittpunkte.
Berechnen Sie allenfalls die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Bildkurven der Achsen.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

1929 gelang *E. Hubble* die zweite seiner Entdeckungen, die für die Kosmologie von ungeheurer Tragweite ist: Die Rotverschiebung in den Linien der Spektren ferner Galaxien wächst proportional mit der Entfernung r an. Deutet man diese Rotverschiebung als Dopplereffekt, so gilt für die Fluchtgeschwindigkeit v der Galaxien und den Abstand r die Beziehung: $v = H_0 \cdot r$. [1] (H_0 heisst *Hubble-Konstante.* Über sie wird heute stark gestritten.)
Um das Problem eventueller Einflüsse auf H_0 zu untersuchen (z.B. Richtungsabhängigkeit, Störungen), machen wir den allgemeineren Ansatz $\dot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r})$. Um in diesem Zusammenhang die Variante $\dot{\vec{r}} = H \cdot \vec{r}$ zu studieren (H = Matrix), wollen wir zur Vereinfachung im Zweidimensionalen (euklidscher Fall) das Modell

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a\,x(t) + b\,y(t) \\ \dot{y}(t) &= c\,x(t) + d\,y(t) \end{aligned}$$

mit speziell gewählten Koeffizienten untersuchen. Wir setzen zur weiteren Vereinfachung: $a = d$ und $b = -1$, $c = 1$.

(a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem bei den versuchsweise gewählten Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ mit Hilfe der Laplace-Transformation. Kontrollieren Sie das Resultat durch Einsetzen.

(b) Beschreiben Sie die Bahnkurven der Galaxien mit Hilfe einer Zeichnung bei verschiedenen Parametern a. Welche Werte für a kommen wohl physikalisch nicht in Frage?

(c) Studieren Sie die Position einer Galaxie für $t \to \infty$ in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Gegeben seien die Vektorfelder

$$\vec{v}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} (a-b) \\ (b-c) \\ (c-a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} a\,x \\ b\,y \\ c\,z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} a\,x \\ b\,y \\ c\,z \end{pmatrix}.$$

(a) Untersuchen Sie, für welche Parameter a, b und c alle drei Felder konservativ sind.

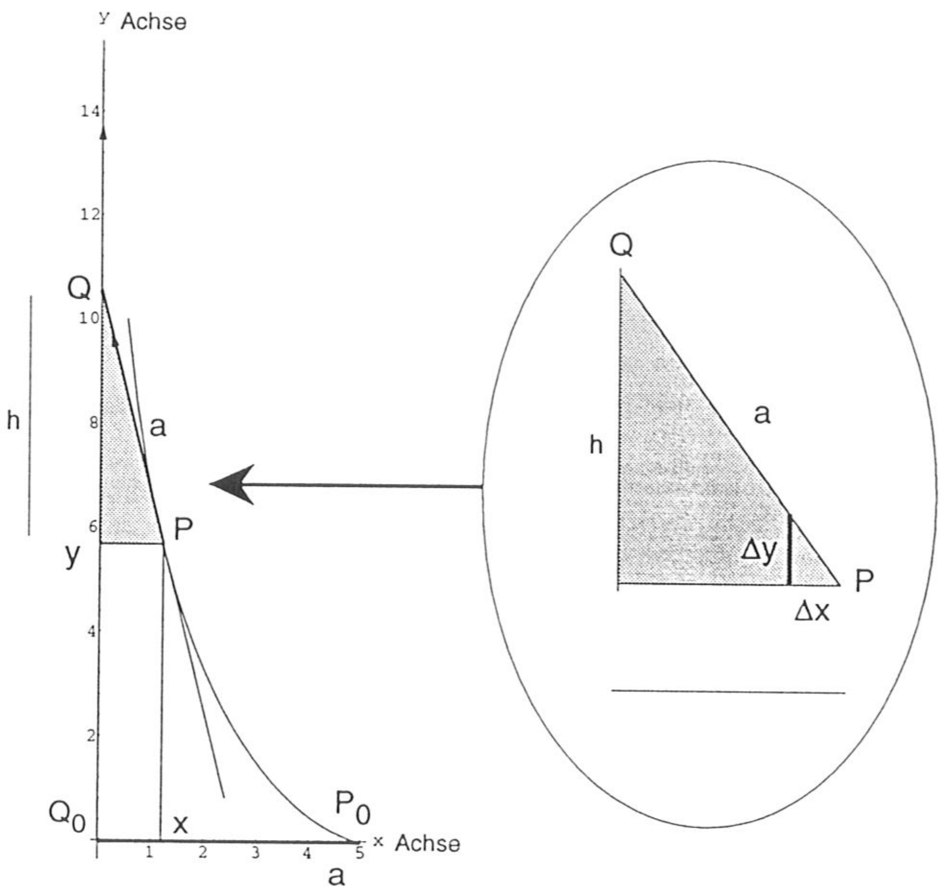
(b) Untersuchen Sie, für welche Parameter a, b und c alle drei Felder quellenfrei sind.

(c) Berechnen Sie im konservativen Falle für alle drei Vektorfelder den Fluss durch die Einheitskugel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt.

[1] So beschrieben von Unsöld in "Der neue Kosmos".

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Abbildung 1: Skizze



Ein Traktor, der sich ursprünglich im Punkt $Q_0(0,0)$ befand (vgl. schematische Skizze Abb. 1), fährt in Richtung der positiven y-Achse. Er muss einen Baumstamm der Länge a wegschleppen, der zu Beginn parallel zur x-Achse lag und in $P_0(a,0)$ den Boden berührte. Momentan befindet sich der Traktor in der Position $Q(0, y+h)$. Das Ende des Baumstammes hinterlässt am Boden eine Spur (Schleppkurve). Es befindet sich momentan in der Position $P(x,y)$. Da sich h durch a und x ausdrücken lässt, kann man anhand der gezeigten Abb. 1 ein Modell in Form einer Differentialgleichung gewinnen.

(a) Wählen Sie $a = 5$ und stellen Sie die Differentialgleichung auf.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung.

(c) Berechnen Sie die y-Koordinate sowie den Krümmungsradius der Schleppkurve an der Stelle $x = 4$.

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Potenzreihe

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \qquad x \in [-1, 1)$$

(a) Leiten Sie daraus die Fourierreihe für $\ln(2\sin\frac{t}{2})$ her $(0 < t < 2\pi)$ und berechnen Sie damit eine numerische Approximation der Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k} = \frac{\cos 1}{1} + \frac{\cos 2}{2} + \frac{\cos 3}{3} + \ldots$$

Hinweis: Setze $x = re^{it}$ und betrachte den Realanteil der entstehenden Gleichung. Man benutze die gegebene Tatsache, dass die so gewonnene Beziehung auch auch für $r = 1$ und $0 < t < 2\pi$ erfüllt ist.

(b) Leiten Sie aus der eben gewonnenen Reihe die Fourierreihe von $\ln(2\cos\frac{t}{2})$ her $(-\pi < t < \pi)$.

(c) Berechnen Sie damit die Fourierreihe von $\ln(\cot\frac{t}{2})$, $0 < t < \pi$. Gewinnen Sie damit eine numerische Approximation der unendlichen Summe

$$\frac{\cos 1}{1} + \frac{\cos 3}{3} + \frac{\cos 5}{5} + \frac{\cos 7}{7} + \ldots$$

— ENDE —

Vordiplom 1, Analysis, 1997

Klasse E1b – Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
08.00 – 11.00
(180 Minuten)

WIR97/20/302//Mo 6.10.97

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: 6 Aufgaben auswählen und lösen.

6. Oktober 1997

Vordiplomprüfung in Analysis 1997

Klasse E1b, INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Ein Volumen ist begrenzt durch vier Flächen, die durch folgende Gleichungen definiert sind:

$$\begin{aligned} x &= 2z^2 && (1)\\ x &= 4 - z^2 && (2)\\ y &= 0 && (3)\\ x + y &= 12 && (4) \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Volumeninhalt dieses Körpers. (Skizze!)

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = x^{\frac{1}{x}} - y^2$. Durch diese Funktion wird im $\mathbf{R}^3$ eine Fläche definiert.

(a) Berechnen Sie die Koordinaten des vermuteten Punktes in der (x, y)-Ebene, in dem der Funktionswert global gesehen maximal wird.

(b) Durch die Gleichung $f(x, y) = x^{\frac{1}{x}} - y^2 = 0$ wird in der (x, y)-Ebene eine Kurve k definiert. Berechnen Sie die Koordinaten derjenigen eventuellen Punkte, in denen k die Gerade $x = y$ schneidet.

(c) Bestimmen Sie allenfalls approximativ Punkte auf k, in denen die Krümmung 0 ist.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Gegeben seien Polynome $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, für welche gilt:

$$p(2x) = p(x)' \cdot p(x)''.$$

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k dieser Polynome.

(b) Aus einem solchen Polynom $p(x)$ wird ein neues Polynom $q(x)$ durch Veränderung des Koeffizienten a_{n-1} gewonnen, sodass die Summe der Nullstellen von $q(x)$ gleich 1 wird. Um welchen Wert ändert sich bei dieser Operation allenfalls der Inhalt der Fläche unter der Kurve zwischen 0 und 1?

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Mit welcher Genauigkeit kann die Brennweite f einer Linse bestimmt werden, wenn ein Objekt, das sich in einer Distanz $g = 37.0 \pm 0.1\ cm$ vor der Linse befindet, ein scharfes Bild erzeugt, dass ich im Abstand $b = 56.4 \pm 0.4\ cm$ hinter der Linse befindet?
(Hinweis: Die Linsengleichung lautet $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$.)

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

In welchem Punkt P der Ebene Φ, die durch $2x + 3y + 4z = 12$ gegeben ist, wird die Funktion $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ minimal? Berechnen Sie diesen Punkt.

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Die Funktion $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ wird über dem Definitionbereich $D_f = \{(x, y) | f(x, y) \geq 0\}$ betrachtet.

(a) Berechnen Sie den Inhalt der von $f(x, y)$ erzeugten Fläche über D_f. (Allenfalls genügt das exakte Resultat für diesen Oberflächeninhalt.)

(b) Die durch $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \\ f(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$ gegebene Kurve verläuft auf der durch f erzeugten Fläche.
Berechnen Sie die Krümmung dieser Kurve in dem Punkt, der am höchsten liegt.

Aufgabe 7 **(12 Punkte)**

Das Integral $f(x) = \int_0^x \sqrt[3]{1 + t^3}\, dt$ kann für $|x| < 1$ als Potenzreihe in x gewonnen werden, indem man die Binomialreihenentwicklung des Integranden benutzt.

(a) Berechnen Sie damit die Potenzreihe von $\frac{f(x)}{x}$. Berechne weiter den Wert von $\frac{f(x)}{x}$ an der Stelle $x = 0.1$ auf 4 Stellen genau.

(b) Berechnen Sie damit ebenso $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^4}$.

— ENDE —

Vordiplom 1, Algebra, 1997

Klasse E1b – Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
08.00 – 11.00
(180 Minuten)

WIR97/20/302//Di 7.10.97

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: 6 Aufgaben auswählen und lösen.

7. Oktober 1997

Vordiplomprüfung in Algebra 1997

Klasse E1b, INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

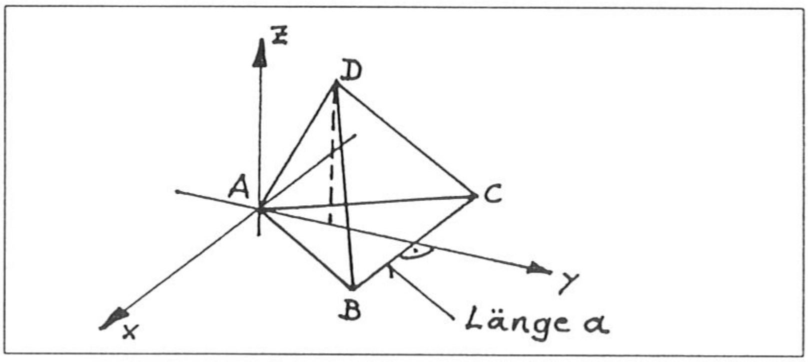
Viel Glück !

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Eine Ebene Φ schneidet die Koordinatenachsen bei $x = 1$, $y = 2$ und $z = 3$. Zwischen dieser Ebene und den Koordinatenebenen (Grundebenen), die durch die Koordinatenachsen gegeben sind, ist eine exakt hineinpassende Kugel eingeschlossen, die alle vier genannten Ebenen in je einem Punkt berührt.
Berechnen Sie das Volumen dieser Kugel. (Skizze!)

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Ein nicht reguläres Tetraeder hat 5 gleich lange Seiten je der Länge 1 sowie eine Seite der Länge a. Es liegt in einem Koordinatensystem so wie in der Skizze gezeigt.



(a) Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte.

(b) Berechnen Sie den Volumeninhalt des Tetraeders.

(c) Berechnen Sie den kürzesten Abstand der Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben ist die Summe $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Berechnen Sie exakt einige aufeinanderfolgenden Werte S_n und versuchen Sie damit, eine einfache Summenformel zu finden..

(b) Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Formel mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Alternative: **(4 Punkte)**
Falls es Ihnen nicht geling, eine befriedigende Formel für S_n zu finden, so beweisen Sie an Stelle der gefragten Formel die Richtigkeit der nachfolgenden Gleichung:

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1 = n^2$$

(c) Untersuchen Sie das Verhalten von S_n für grosse n. (Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} S_n$.)

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Beschreiben Sie exakt das Gebiet in der komplexen Zahlenebene $\mathbf{C}$, in dem die Ungleichung $|z| < 2|z - i|$ erfüllt ist. Setzen Sie dazu $z = x + i\,y$.

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

In der Funktion $z(t) = \frac{2}{1+i\,t}$ sei t eine reelle Variable. Durch $t \longmapsto z(t)$ wird die reelle Achse $\mathbf{R}$ auf eine Kurve in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ abgebildet. Offenbar haben wir hier einen Spezialfall einer Möbiustransformation, eingeschränkt auf die reelle Achse.

(a) Zeichnen Sie in $\mathbf{C}$ die Punkte, die zu $t = 0$, $t = \pm 1$, $t = \pm 2$, $t = \pm\infty$ gehören.

(b) Zeigen Sie, dass die durch $z(t)$ gegebene Kurve ein Kreis in $\mathbf{C}$ ist.

(c) Berechnen Sie alle t-Werte, deren Bilder mit dem Nullpunkt zusammen ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Durch eine affine Abbildung φ wird das Dreieck ABC mit $A(0,0)$, $B(2,0)$ und $C(1,3)$ in das Dreieck $A'B'C'$ mit $A'(\frac{3}{4}, -\frac{5}{2})$, $B'(\frac{7}{4}, -1)$ und $C'(\frac{7}{2}, \frac{23}{4})$ abgebildet. Bezüglich der Ortsvektoren ist φ gegeben durch

$$\varphi: \quad \vec{OP} \quad \longmapsto \quad \vec{OP'} = M \cdot \vec{OP} + \vec{c}.$$

Dabei ist M eine symmetrisch Matrix.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der gegebenen Dreiecke M und $\vec{c}$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von M.

(c) Durch φ wird der Einheitskreis K ($\vec{x} = \binom{cos(t)}{sin(t)}$) um den Ursprung auf die Bildfigur K' abgebildet. K' ist eine Ellipse.
Skizzieren Sie die Lage von K' und berechnen Sie die Länge der beiden Halbachsen von K' sowie das Verhältnis der Flächeninhalte von K' und K. Was hat dieses Verhältnis mit den Eigenwerten von M sowie mit der Determinante von M zu tun?

Aufgabe 7 **(12 Punkte)**

Die durch eine Gleichung wie $16x^2 - 8xy + 10y^2 = 72$ definierte algebraische Kurve ist im nicht entarteten Fall ein Kegelschnitt. Bekanntlich kann die darin enthaltene quadratische Form $16x^2 - 8xy + 10y^2$ durch $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}$ dargestellt werden. Dabei ist $\vec{x} = \binom{x}{y}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = U \cdot D \cdot U^{-1}$ mit $U^{-1} = U^T$ (U unitär). Durch $P = U^T$ wird $ax^2 + 2bxy + cy^2 = (\vec{x}^T\, P^T)\, D\, (P\vec{x}) = \vec{y}^T\, D\, \vec{y}$, wobei $\vec{y} = P\vec{x}$ gesetzt worden ist.

(a) Führen Sie mit Hilfe der Eigenvektoren von A im vorliegenden Falle ein neues Koordinatensystem ein und skizzieren Sie darin die Kurve.

(b) Berechnen Sie den kleinsten positiven Drehwinkel, durch den die erste Achse des alten Koordinatensystems in eine der Achsen des neuen Koordinatensystems gedreht werden kann.

— ENDE —

Vordiplom 1997

Klasse B2 – Architektur

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
14.00 – 17.00
(180 Minuten)

WIR97/19/R4/Mo 6.10.97

Bedingungen — Conditions:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge. *Tous les problèmes sont à résoudre soi-même. Un comportement malhonnête a comme conséquence l'exclusion immédiate de l'examen.*

- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert. *Pour écrire il faut un moyen inéffaçable. Le crayon est accepté seulement pour les dessins et les esquisses.*

- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert. *On demmande une présentation de déduction de la solution claire et propre. Des résultates sans déduction ne sont pas acceptés.*

- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen. *Quand des fractions décimales sont utilisées le résultat exact et le résultat présenté ne doivent pas différer de plus que* 0.1%.

- Resultate sind doppelt zu unterstreichen. *Les résultates sont à souligner deux fois.*

- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen. *Les parties pas valables sont à tracer nettement.*

- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert! *Pour chaque problème il faut utiliser une nouvelle feuille. Le verso doit rester libre. Peut-être il ne sera pas corrigé!*

- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
  Moyen permis: *Cours (résumé), livres de formules, calculatrice, papier et écritoire.*

- **Punkte:** 12 erreichbare Punkte pro Aufgabe.
  Nombre de points: *12 points par problème sont possibles.*

- Ziel: 6 Aufgaben auswählen und lösen. *But: Choisir et résoudre 6 problèmes.*

Deutsche Version

6. Oktober / *6 octobre* 1997

Vordiplomprüfung — Examen préalable 1997

Klasse / classe B2
INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) / école d'ingénieurs Bienne (ETS)

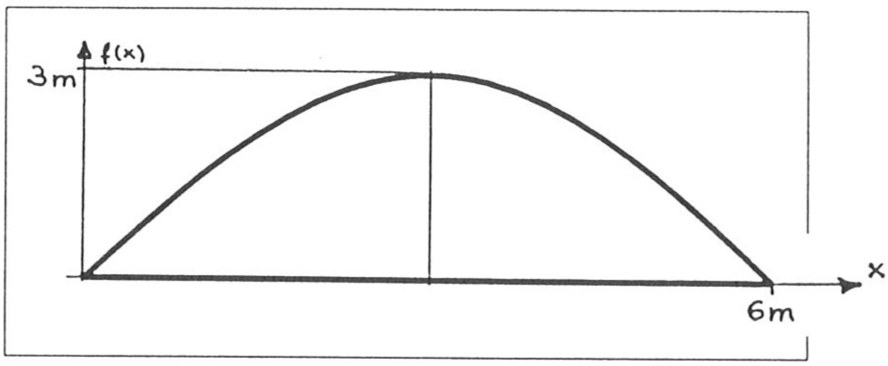
Viel Glück ! ◇ Bonne chance!

Aufgabe 1 In einem gegebenen Raum sind zwei Drähte gespannt, die wir für die Rechnung näherungsweise durch zwei Geradenstücke beschreiben wollen. Das erste Stück liegt auf der Geraden g. Diese ist gegeben durch die $\overline{P_1P_2}$ mit $P_1(0,1,1)$ und $P_2(1,0,2)$. Das zweite Stück liegt auf der Geraden q, gegeben durch $\overline{Q_1Q_2}$ mit $Q_1(1,1,3)$ und $Q_2(-2,-3,5)$. Die folgenden unabhängigen Teilaufgaben sind zu lösen:

(a) Berechnen Sie den kürzesten Abstand zwischen den beiden Geraden.

(b) P_0 sei derjenige Punkt der Geraden g, der dem Ursprung O am nächsten liegt. Auf q heisst der entsprechende Punkt Q_0. Berechnen Sie den Inhalt des Dreiecks OP_0Q_0.

Aufgabe 2 Die Terrasse eines Hauses soll einen sinusförmigen Grundriss bekommen (vgl. Skizze).



Der Aussenrand der Terrasse kann durch die Funktion $f(x) = a\ \sin(k\ x)$ berschrieben werden, wobei die fehlenden Parameter a und k aus der Skizze zu bestimmen sind. (Breite 6 m, Tiefe 3 m, m: Meter, vgl. Skizze. In der Rechnung darf die Masseinheit weggelassen werden.)

(a) Berechnen Sie die y-Koordinate des Flächenschwerpunktes S des Grundrisses.

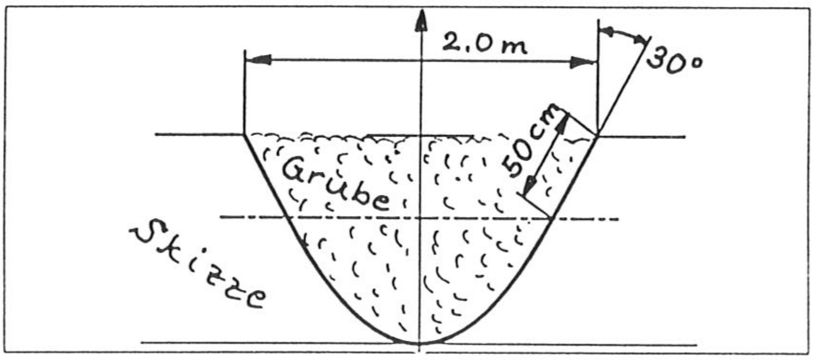
(b) Berechnen Sie den Radius des Krümmungskreises an der Stelle x mit maximalem y.

(c) Berechnen Sie näherungsweise die Länge des Terrassengeländers im Grundriss. Beschreiben Sie dabei Ihr Vorgehen bei der Berechnung.

Aufgabe 3 Die Brüder Eleck und Trick wollen sich für das Dachabwasser ihres neuen Elektro-Magazins eine kreisrunde Sickergrube selber bauen. Der Untergrund besteht aus festem Lehm, worin das Wasser nur sehr langsam versickert. Der zur Verfügung stehende Platz erlaubt ihnen einen Grubendurchmesser von 2.0 m. Sie gehen davon aus, dass bei einer Hangneigung bis zu 60° gegen die Horizontale keine grossen Auswaschungsprobleme der Grubenränder zu befürchten sind. Daher beginnen sie mit dem Spaten im Winkel von 30° gegen die Vertikale in die Erde zu stechen. So graben sie ca. 50 cm tief in Spatenrichtung (vgl. Skizze des Grubenquerschnitts). Dann geht ihr Loch ohne Knick in ein Rotationsparaboloid über. (Es ist in Metern zu rechnen. Die Einheiten dürfen weggelassen werden.)

(a) Stellen Sie die Gleichungen der Funktionen auf, die den Rand des Grubenquerschnitts beschreiben.

(b) Wieviele Liter Wasser kann die leere Grube aufnehmen? (Berechnen Sie den Volumeninhalt der noch leeren Grube mit Hilfe der Integralrechnung.)

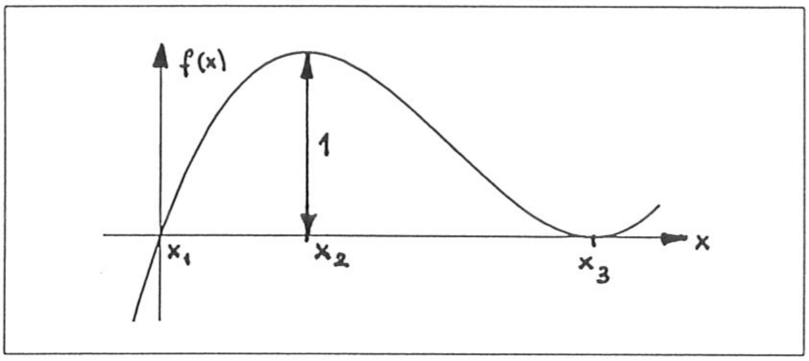


Aufgabe 4 Aufgrund der in der letzten Aufgabe beschriebenen Sickergrube der Brüder Eleck und Trick stellt sich das Problem, wieviel Wasser in einer Sickergrube noch Platz findet, nachdem diese mit Kies gefüllt worden ist. Dieses Problem soll jetzt anhand einer Modellrechnung behandelt werden.
Dabei gehen wir von einer vorhandenen Kiesqualität mit einem mittleren Kieselsteindurchmesser von $d = 2.0$ cm aus. Für diese Aufgabe können vereinfacht die Steine als kugelförmig und in dichter Packung angenommen werden (d.h. eine Tetraederpackung, Mittelpunkte benachbarter Kugeln bilden Tetraeder).
(Es ist in Zentimetern zu rechnen. Die Einheiten dürfen weggelassen werden.)

(a) Berechnen Sie am Modell eines geeigneten schiefen gleichseitigen Parallelepipeds (gleichseitiger Spat) der Kantenlänge $2rn$ (r = Kieselsteinradius resp. Kugelradius) das Verhältnis $v(r)$ zwischen „Inhalt des gegebenen Kiesvolumens im gefüllten Spat" und „Inhalt des noch leeren Spat" für sehr grosse n (Grenzfall $n \to \infty$).

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von $v(r)$ annähernd das noch vorhandene Sickervolumen in einer kiesgefüllten Sickergrube in Prozent vom Gesamtvolumen V_0. Untersuchen Sie, was mit diesem Restvolumen passiert, falls statt Kies einmal Sand mit dem Korndurchmesser 1.0 mm verwendet wird?

Aufgabe 5 Ein Geländequerschnitt kann in einem gegebenen Bereich mit einem passenden Massstab durch eine Parabel 3. Ordnung (kubische Parabel) dargestellt werden. Dazu gehört die durch das Polynom 3. Grades gegebene Funktion $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Der Graph verläuft so wie in der Skizze gezeigt. Es gibt Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_3 = 2$, ein Maximum bei x_2 der Grösse $f(x_2) = 1$ sowie ein Minimum bei $x_3 = 2$.



(a) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_3, \ldots, a_0$.

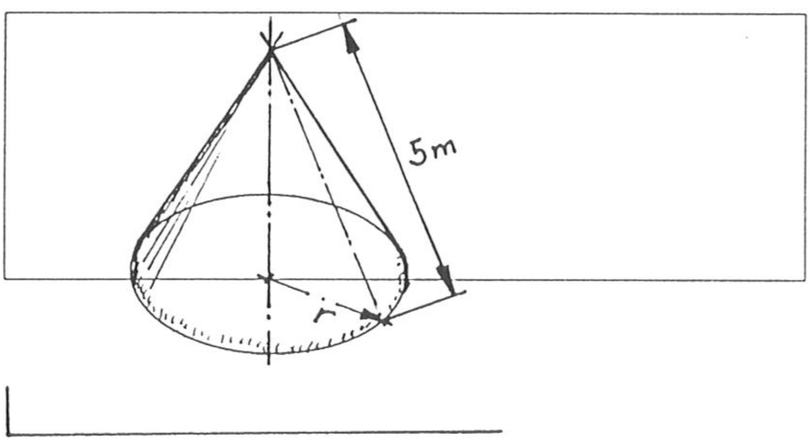
(b) Berechnen Sie den Querschnittsflächeninhalt zwischen $x = 0$ und $x = 2$. (Vgl. Skizze.) Falls es nicht gelungen ist, a_3 bis a_0 zu berechnen, kann dieses Teilproblem mit der anderen Funktion $p(x) = \frac{e}{\pi} \cdot (x - 2) \cdot (3x - 2) \cdot x$ gelöst werden.

Aufgabe 6 Eine lineare Abbildung $\mathcal{A}$ ist durch eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegeben. Sie bildet $\overrightarrow{OP} = \binom{1}{1}$ in $\overrightarrow{OP'} = \binom{3}{1}$ ab. Den Vektor $\overrightarrow{OQ} = \binom{1}{2}$ bildet sie in $\overrightarrow{OQ'} = \binom{2}{4}$ ab.

(a) Berechnen Sie die Matrix A.

(b) Berechnen Sie das Bild des Punktes $S(2, 4)$.

Aufgabe 7 Die nachstehende Skizze zeigt ein kreisrundes Indianerzelt. Die vorhandenen Baumstangen lassen eine Zeltstangenlänge von 5 *Metern* zu.
Berechne den Radius r an der Basis, sodass das Volumen des Zeltes maximal wird.



Aufgabe 8 Diese Aufgabe besteht aus unabhängigen kürzeren Teilaufgaben..

(a) In einer Lieferung von 120 gutverpackten Granitabdeckungsplatten hat der Lieferant bewusst 15% Platten zweiter Wahl mit geringeren Defekten versteckt. Der Empfänger erwartet aber erstklassige Ware. Zur Kontrolle vor dem Abtransport auf die diversen Baustellen beschliesst der Empfänger, 10% der Platten zu prüfen und zu diesem Zweck auszupacken. Die Auswahl dazu geschieht nach einer als Zufallsverfahren akzeptierbaren Methode.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine defekte Platte entdeckt wird.

(b) Die Polizei hat an einer Geschwindigkeitskontrolle 17 Lastwagen mit 45 km/h registriert, 18 mit 50 km/h, 14 mit 55 km/h, 22 mit 60 km/h, 13 mit 65 km/h und einen mit ca. 70 km/h. Die Höchstgeschwindigkeit am Ort war 60 km/h (!).
Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Lastwagen sowie die Standardabweichung.

(c) Das Problem, eine senkrecht stehende Säule mit quadratischem Querschnitt zu konstruieren, die derart geformt ist, dass in jedem horizontalen Querschnitt dieselbe Druckspannung herrscht, lässt den nachstehenden einfachen Ansatz zu: Konstante Spannung $\sigma = \frac{F}{A} \approx \frac{F+\Delta F}{A+\Delta A}$. (Dabei ist F die Druckkraft und A der Querschnitsflächeninhalt r^2.) Umgeformt ergibt das $\frac{F}{A} \approx \frac{\Delta F}{\Delta A} \longrightarrow \frac{dF}{dA}$. Da $F = \varrho \cdot g \cdot \Delta V$ ist mit $\Delta V \approx A \cdot \Delta x$ (Höhe x), erhält man daraus die Differentialgleichung

$$Konstante\ k = \frac{dx}{dA} \cdot A(x).$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung und berechnen Sie die Integrationskonstante zur Anfangsbedingung $A(0) = 0$.

— ENDE — ◇ — FIN —

Vordiplom 1, Algebra, 1998

Klasse E1a – Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
08.00 – 11.00
(180 Minuten)

WIR98/23/604/Di 6.10.98

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn mehr als 6 Aufgaben gegeben sind: 6 Aufgaben auswählen und lösen.

6. Oktober 1998

Vordiplomprüfung in Algebra 1998

Klasse E1a, Hochschule für Technik und Architektur BIEL (HTA)

Viel Glück !

Aufgabe 1 (12 Punkte)

In einer stark windigen Berggegend soll ein Kran aufgebaut werden. M ist der Fusspunkt dieses Krans, der einen horizontalen Arm mit dem Radius von 20 Metern hat. Die Höhe vom Fusspunkt bis zum Arm misst 22 Meter. In der Nähe des Krans verläuft sehr geradelinig eine elektrische Leitung. Der nächstgelegene Draht geht vom Punkte P_1 eines ersten Mastes zum Punkte P_2 eines zweiten Mastes. In einem speziell gewählten Koordinatensystem ist M gegeben durch $(0,0,0)$, P_1 durch $(0,30,10)$ und P_2 durch $(20,40,30)$ (alle Angaben in Metern). Der Leitungsdraht sei für die Rechnung durch eine Gerade g approximiert (jeweils beidseitig der Masten!). Es besteht das Problem zu untersuchen, ob bei einem unvorhergesehenen Umkippen des Krans um den Fusspunkt M Gefahr für die Leitung besteht. Da die Drähte durch eine Gerade approximiert sind und zudem schwingen können, soll im ungünstigsten Fall eine Sicherheitsdistanz von 5 Metern zwischen der Geraden und der Kugelsphäre um M mit dem Kippradius eingehalten werden.

(a) Skizzieren und beschriften Sie die Situation.

(b) Berechnen Sie den kürzesten Abstand von der Geraden g zum Fusspunkt M.

(c) Berechnen Sie den Kippradius des Krans um den Fusspunkt M und entscheiden Sie, ob die Sicherheitsdistanz eingehalten werden kann.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sowie die Ebenenschar Φ_h :

$$\vec{r_h}(\lambda,\mu) = h\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie von A die Determinante sowie die Spur.

(b) Berechnen Sie von A die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

(c) Berechnen Sie daraus die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von $A \cdot A = A^2$.

(d) Durch A und A^2 sind zwei lineare Abbildungen gegeben. Suchen Sie die durch A und A^2 erzeugten Bilder der Ebenenschar Φ_h. Was fällt dabei auf?

(e) Durch den Ursprung und die Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Tetraeder definiert. Wie ändert sich sein Volumen bei der Abbildung durch A?

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Bilden Sie sämtliche Permutationen der drei Zahlen $1, 2, 3$ und interpretieren Sie jede Permutation als einen Punkt in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem. (Skizzieren Sie die Situation.)

(a) Welche Figur entsteht dadurch?

(b) Begründen Sie Ihre Vermutung. (Verwenden Sie dazu die Vektoren, die durch die Punktepaare mit kürzestem Abstand gegeben sind.)

(c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S der Figur.

(d) Durch den Ursprung O, die Figur sowie den Punkt $Q(4, 4, 4)$ ist ein Körper definiert. (Der Körper entsteht durch Verbindung benachbarter Punkte der Figur sowie durch Verbindung dieser Punkte mit O und Q.) Berechnen Sie den Volumeninhalt dieses Körpers.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Betrachten Sie in der komplexen Zahlenebene C ein beliebiges Dreieck mit den Eckpunkten (Zahlen) z_1, z_2, z_3 und dem Schwerpunkt z_s (Eckpunkte nummeriert im Uhrzeigersinn – fertigen Sie eine Skizze an!). Wenn Sie über jeder Seite nach aussen das gleichseitige Dreieck errichten, erhalten Sie drei neue Eckpunkte p_1, p_2, p_3 (p_1 soll z_1 gegenüber liegen etc.). Die Schwerpunkte dieser gleichseitigen Dreiecke sind m_1, m_2, m_3 (m_1 im Dreieck mit p_1 etc.).

(a) Berechnen Sie p_1, p_2 und p_3 (zyklisch!). *Hinweis: Interpretieren Sie die komplexen Zahlen als Vektoren. – Z.B. entsteht der Punkt p_1 aus z_2 durch Drehung um z_3 um einen bekannten Winkel. Nutzen Sie hier die Beziehung zwischen Drehverhalten und Multiplikation komplexer Zahlen aus.*

(b) Berechnen Sie die Schwerpunkte m_1, m_2, m_3.

(c) Berechnen Sie den Schwerpunkt z_m des Dreiecks mit den Eckpunkten m_1, m_2, m_3 und vergleichen Sie diesen Punkt mit dem Schwerpunkt z_s des ursprünglichen Dreiecks.

(d) Zeigen Sie, dass das durch m_1, m_2, m_3 gegebene Dreieck immer gleichseitig ist, indem Sie zeigen, dass sich z.B. der von m_1 nach m_2 zeigende Seitenvektor um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ in den von m_1 nach m_3 zeigende Seitenvektor drehen lässt. (Wegen der zyklischen Vertauschung muss z.B. nur dieser Fall behandelt werden.)
Hinweis: Benützen Sie bei der Rechnung Beziehungen wie $1 - e^{\frac{i\pi}{3}} = -e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$, was aus einer Skizze sofort ersichtlich ist.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Gesucht ist die Menge der Vektoren $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T\} := U^\perp$, die senkrecht stehen auf den gegebenen Vektoren $\vec{v_1} = (1, 2, 3, 4, 5)^T$, $\vec{v_2} = (2, 3, 4, 5, 6)^T$ und $\vec{v_3} = (3, 4, 5, 6, 7)^T$. ($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$ spannen einen Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^5$ auf. $U^\perp$ heisst *Orthogonalraum*.)

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Vektoren aus $U^\perp$. Verwenden Sie dabei die Koordinatenvariablen mit den höheren Indices als Parameter. *Hinweis: Skalarprodukt, Gleichungssystem.*

(b) Untersuchen Sie, für welche k der Vektor $(k, 1, -2, 1, k)^T$ zu $U^\perp$ gehört.

Aufgabe 6 (12 Punkte)

(a) In einem Koordinatensystem befinden sich auf der x-Achse zwei Punkte $F_1(c,0)$ und $F_2(-c,0)$. Die Menge der Punkte $P(x,y)$, für die gilt $|d(P,F_1)-d(P,F_2)| = const. = 2a$, bildet eine Kurve mit zwei Ästen, *Hyperbel* genannt. (d steht für Distanz.) Wir setzen $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$. Damit lässt sich aus der Gleichung $|d(P,F_1)-d(P,F_2)| = 2a$ durch Umformung die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gewinnen. Führen Sie diese Umformung durch!

(b) Parallel zu einer geraden Meeresküste fährt ein Schiff. An der Küste befinden sich zwei Stationen A und B der Küstenwache 320 km voneinander entfernt. Ein Koordinatensystem sei so gelegt, dass die x-Achse auf der Küstenlinie liegt, A und B gleich weit vom Ursprung entfernt liegen und die y-Achse Richtung Meer zeigt. (Machen Sie sich eine Skizze.) Da es möglich ist, mit Hilfe der hochentwickelten Navigationstechnik einigermassen exakt Kurs zu halten, weiss man auf dem Schiff infolge einer früheren Positionsbestimmung, dass der Abstand zur Küste $y = 80$ km beträgt. Um 10 Uhr ($\pm 1 \mu sec$) senden die beiden Stationen A und B je ein identifizierbares Radiosiglal aus, das sich mit Lichtgeschwindigkeit (ca. $3 \cdot 10^5 \frac{km}{sec}$) ausbreitet. Das Signal von A wird auf dem Schiff 400 μsec früher registriert als das Signal von B. Damit lässt sich die Position des Schiffes auf der x-Achse bestimmen. Führen Sie diese Positionsbestimmung durch! (Berechnen Sie die zur Laufzeitdifferenz des Signals gehörige Längendifferenz d in Kilometern und lassen Sie dann die Einheiten weg.)
Hinweis: Verwenden Sie den 1. Teil der Aufgabe.

Aufgabe 7 (12 Punkte)

$z(t) = (t + \frac{1}{2}) + i(t - \frac{1}{2}))$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschreibt eine Kurve in der komplexen Zahlenebene.

(a) Um welche Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

(b) Wo liegen die Punkte $w(t) = \frac{1}{2}(z(t))^2 - 0.75i$, wenn t die reellen Zahlen durchläuft? Skizzieren Sie auch diese Kurve und berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

(c) Berechnen Sie die minimalen Werte von $|Re(z(t) - w(t))|$ und $|Im(z(t) - w(t))|$. Was lässt sich daraus für den minimalen Wert von $|z(t) - w(t)|$ folgern?

— ENDE —

Vordiplom 1, Analysis, 1998

Klasse E1b – Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
08.00 – 11.00
(180 Minuten)

WIR98/20/302/Mo 5.10.98

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn mehr als 6 Aufgaben gegeben sind: 6 Aufgaben auswählen und lösen.

5. Oktober 1998

Vordiplomprüfung in Analysis 1998

Klasse E1b, Hochschule für Technik und Architektur BIEL (HTA)

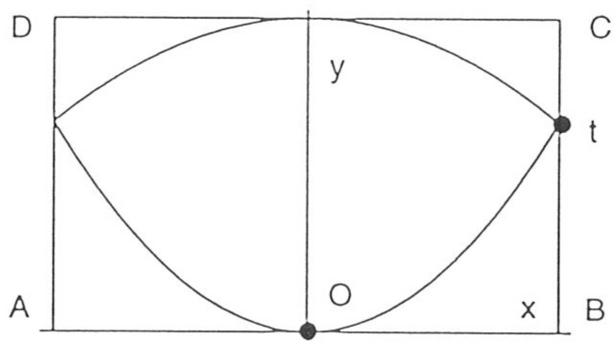
Viel Glück !

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Die Funktion $f(x) = 2sin(\frac{x}{2}) + 1$ soll im Intervall $[0, \ \pi]$ durch eine Parabel $p(x) = ax^2 + bx + c$ angenähert werden, so dass die mittlere quadratische Abweichung zwischen f und p minimal ist. Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c. *Hinweis: Durch eine geeignete Koordinatentransformation lässt sich die Rechnung vereinfachen.*

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Gegeben ist das Rechteck $A(-4,0)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$, $D(-4,4)$ sowie zwei Parabelbögen mit der y- Achse als Symmetrieachse. (Vgl. Skizze.)



(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t die Funktionsgleichungen der beiden Parabeln.

(b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die beiden Parabelbögen begrenzt wird.

(c) Berechnen Sie den Wert von t, für den sich die beiden Parabeln unter einem rechten Winkel schneiden.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Der Verkehrsfluss F gibt an, wieviele Autos pro Zeiteinheit eine bestimmte Stelle passieren. In einem einfachen Modell zum Studium von F wird angenommen, dass alle Autos die gleiche Baulänge l haben und sich mit gleicher Geschwindigkeit v in der gleichen Richtung fortbewegen. Weiter wird angenommen, dass der von einem Auto benötigte Fahrbahnbedarf L (d.h. die Distanz von der vordern Stossstange des Fahrzeugs bis zur vordern

Stossstange des folgenden Fahrzeugs), welcher ein Fahrzeug aus Sicherheitsgründen einnimmt, ebenfalls für alle Autos gleich gross ist. Aus physikalischen Gründen (Bremsweg incl. Berücksichtigung der Reaktionszeit) gilt für L:

$$L = L(v) = l + av + bv^2$$

Die Parameter $a > 0$ (Reaktionszeit) und $b > 0$ (Fahrbahntyp) sind fest vorgegeben.

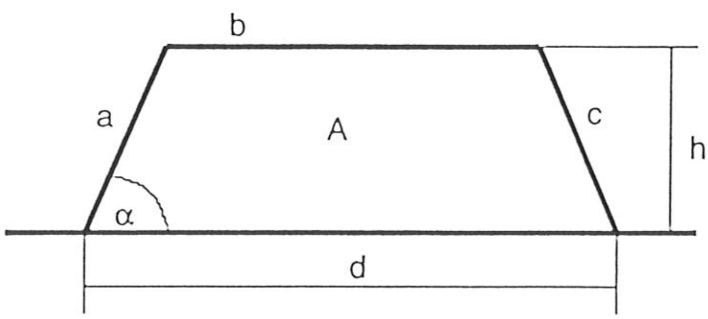
(a) Erklären Sie kurz, warum F sich nach der Formel $F(v) = v/L(v)$ berechnen lässt.

(b) Skizzieren Sie rein qualitativ die Funktion $F(v)$ für $v \geq 0$.

(c) Berechnen Sie den maximalen Verkehrsfluss F_{max} (das Resultat muss möglichst stark vereinfacht werden!) und die zugehörige Geschwindigkeit v_{opt}. Zur Kontrolle: Interessanterweise ist v_{opt} nicht von der Reaktionszeit a abhängig.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Im Orient wird von einem Ingenieur beim Studium der Überdachung einer langen, geraden Rennbahn ein trapezförmiger Querschnitt (vgl. Figur) von minimal $A = 400\ m^2$ vorgeschlagen. Mit dieser Quadratmeterzahl können bei der vorgesehenen Nutzung alle Bedingungen erfüllt werden. Nebenbedingungen: Der Winkel α an der Basis soll minimal $60°$, die Basisbreite d minimal 25 m, die Höhe h minimal 7 m betragen. Da bei der Grösse des Projektes die Baukosten und damit die Materialkosten wesentlich sind, soll der minimale Umfang $u = a + b + c$ (a = c) beim gegebenen Querschnitt$A$ berechnet werden.



(a) Berechnen Sie u_{min} (ohne Berücksichtigung der Nebenbedingungen).

(b) Überprüfen Sie, ob damit die Bedingungen an α, d und h, erfüllbar sind.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $f(x) = \int_0^x \frac{sin(\omega t^2)}{t^2}\, dt$. ($\omega$ ist hier Parameter.)

(a) Entwickeln Sie $f(x)$ in eine Potenzreihe. (Es darf dabei von der Potenzreihe von $sin(x)$ ausgegangen werden.)

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius.

(c) Approximieren Sie $\int_{-1}^1 \frac{sin(\omega t^2)}{t^2}\, dt$ mit Hilfe des vorhergehenden Resultates, indem Sie nur Potenzen von x bis zum Exponenten 10 berücksichtigen.

(d) Berechnen Sie $\int_{-a}^{a} \frac{sin(\omega t^2)}{t^2}\, dt$ für eine beliebige Zahl a und beantworten Sie die Frage, ob $f(x)$ zur Klasse der geraden oder der ungeraden Funktionen gehört.

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Ein Werkstück ist wie folgt gegeben:
Durch $z = h(r, \varphi) = \frac{\varphi}{4}$ ist über der Grundebene in Zylinderkoordinaten eine Funktionsfläche gegeben. Der Definitionsbereich ist festgelegt durch $r \in [1, 2]$ und $\varphi \in [0, \frac{3\pi}{2}]$. Zwischen der Grundebene und der Funktionsfläche ist dadurch ein Volumen (Körper) definiert.

(a) Skizzieren Sie den Körper!

(b) Berechnen Sie den Volumeninhalt des Körpers (zwischen Grundebene und Funktionsfläche mit dem gegebenen Definitionsbereich).

(c) Berechnen Sie bei einem beliebigen festen Winkel φ die Tangentensteigung für die innere und die äussere Randkurve der Funktionsfläche über dem Definitionsbereich. Wie hängt diese Steigung vom Radius r ab?

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Eine Ellipse ist gegeben durch die Parameterdarstellung $\vec{x(t)} = \binom{a\,cos(t)}{b\,sin(t)}$. Wir wählen den Fall $a = 2$.

(a) Berechnen Sie die Krümmung als Funktion von t. b ist dabei Parameter.

(b) Berechnen Sie die Krümmung für $t = 0$ als Funktion von b.

(c) Wie gross muss b gewählt werden (Fall $t = 0$), damit der Krümmungsradius gerade 1 ist? Skizzieren Sie den Fall und berechnen Sie noch die Brennpunkte. Was fällt auf?

— ENDE —

Vordiplom 2, Mathematik, 1998

Klasse E2b – Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
14.00 – 17.00
(180 Minuten)

WIR98/18/306/Mo 5.10.98

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn mehr als 6 Aufgaben gegeben sind: 6 Aufgaben auswählen und lösen.

5. Oktober 1998

Vordiplomprüfung in Mathematik 1998

Klasse E2b, Hochschule für Technik und Architektur BIEL (HTA)

Viel Glück !

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sind die Differentialgleichungen

$$u'(x) - tan(x)\,u(x) = -sin(x) \tag{1}$$
$$x\,v'(x) = v(x) + 4x \tag{2}$$

(a) Suchen Sie diejenige spezielle Lösung $u_0(x)$ der ersten Gleichung, die durch den Ursprung geht.

(b) Berechnen Sie diejenige spezielle Lösung $v_0(x)$ der zweiten Gleichung, die die Bedingung $v_0(\pi) = u_0(\pi)$ erfüllt.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert der Steigung $\lim_{x\to\infty} v_0'(x)$ sowie das Minimum resp. Infimum der Steigung.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Ein harmonischer Oszillator (z.B. eine Masse an einer Feder) wird durch die Gleichung $m\,y''(t)+\mu\,y'(t)+k\,y(t) = F(t)$ beschrieben. $F(t)$ ist die äussere Anregung, μ die Dämpfung. Um das Problem der Resonanz zu studieren, setzen wir $m = 1$, $\mu = 0$, $k = 1$ und für die äussere Anregung $F(t) = sin(\omega_0\,t)$. Für $t = 0$ befinde sich das System im Ruhezustand.

(a) Bestimmen Sie für den beschriebenen Fall mit Hilfe der Laplace-Transformationen die Lösung in Abhängigkeit vom Parameter ω_0.

(b) Bestimmen Sie bei der gefundenen Lösung die Grösse ω_0 für den Resonanzfall.

(c) Bestimmen Sie die Stossantwort zur Zeit $t = 0$ bei einer Dämpfung $\mu = 1$. ($m = 1$, $k = 1$ wie vorher.)

Aufgabe 3 (12 Punkte)

In einem diskreten Zeitsystem soll die Impulsantwort $\{y_k\} = \{(-1)^k - 2^k\}$ $(k \geq 0)$ sein.

(a) Bestimme die Transferfunktion $G(z)$.

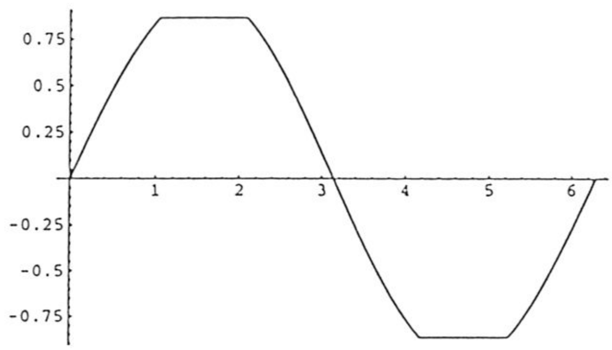
(b) Entwerfe zu $G(z)$ ein Blockdiagramm.

(c) Bestimme die zugehörige Differenzengleichung.

(d) Bestimme zu $G(z)$ die Schrittantwort.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Die in der Figur über eine Periode gezeigte Funktion $nbsin(t)$ heisst unter Kennern *neuer*



Bieler Sinus. In den Intervallen $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ und $(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ ist sie oben resp. unten horizontal abgeschnitten. Der neue Bieler Sinus lässt sich zusammensetzen aus der Funktion $\sin(t)$ sowie einer 2π-periodischen Hilfsfunktion $h(t)$, die 0 ist, ausser auf den folgenden Intervallen: Auf $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ ist sie gleich $\sin(t) - sin(\frac{\pi}{3})$ und auf dem Intervall $(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ ist sie gleich $\sin(t) + sin(\frac{\pi}{3})$.

(a) Skizzieren Sie $h(t)$.

(b) Entwickeln Sie $h(t)$ in eine Fourierreihe, indem Sie die Fourierkoeffizienten $\frac{a_0}{2}$, a_n und b_n bestimmen. (Bei Koeffizienten, die nicht ständig gleich 0 sind, genügen die ersten vier , d.h. $n = 4$. Das ergibt die Reihe $h_4(t)$.)

(c) Berechnen Sie numerisch die Abweichung $|h_4(t) - h(t)|$ an der Übergangsstelle $t = \frac{\pi}{3}$.

(d) Geben Sie in einer Gleichung die Beziehung zwischen $nbsin(t)$, $sin(t)$ und $h(t)$.

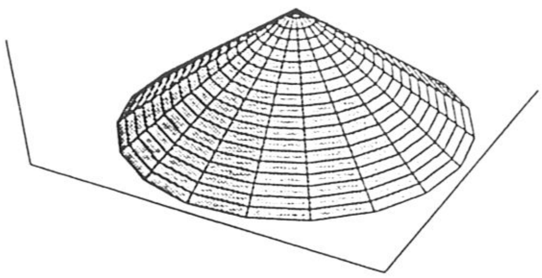
(e) Berechnen Sie nun aus dieser Gleichung die Fourierkoeffizienten von $nbsin(t)$ bis zu $n = 4$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

(a) Sei $\vec{u} = f(x,y,z) \cdot \vec{c}$. ($\vec{c}$ ist ein beliebiger, geeignet gewählter konstanter Vektor, f eine skalare Funktion.) Leiten Sie damit mit Hilfe des Divergenzsatzes folgende Gleichung her:

$$\iint_S f \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_Q (\nabla f)\, dV$$

(Der Nachweis für eine Komponente genügt.)



(b)

In einem See wird eine kegelförmige Tauchkapsel mit dem Grundkreisradius R und der Höhe H so versenkt, dass die Rotationsachse senkrecht steht. Die Tiefe des Kapselbodens ab Wasseroberfläche sei z_0. Da der Druck p in der Tiefe z unter der Wasseroberfläche dem Gewicht der Wassersäule über der Einheitsfläche entspricht, gilt für p die Formel: $p = k \cdot z$ ($k = const.$). Die auf ein Flächenelement $d\vec{S}$ wirkende Kraft berechnet sich bekanntlich nach der Formel $d\vec{F} = -p \cdot d\vec{S} = -p \cdot \vec{n}\, dS$. Damit kann die gesamte auf die Kapsel wirkende Auftriebskraft $-\iint_S p \cdot \vec{n}\, dS$ nach der im ersten Teil der Aufgabe hergeleiteten Gleichung berechnet werden. In einem geeignet gewählten Masssystem ist $R = 1$, $H = 3$. Berechnen Sie damit $\vec{F}$ als Funktion z_0. (Lassen Sie die Normierungskonstante k als Parameter stehen.) Spielt bei dieser Rechnung die Körperform eine Rolle? (Vergleichen Sie das Resultat mit dem *Gesetz von Archimedes*!)

Aufgabe 6 (12 Punkte)

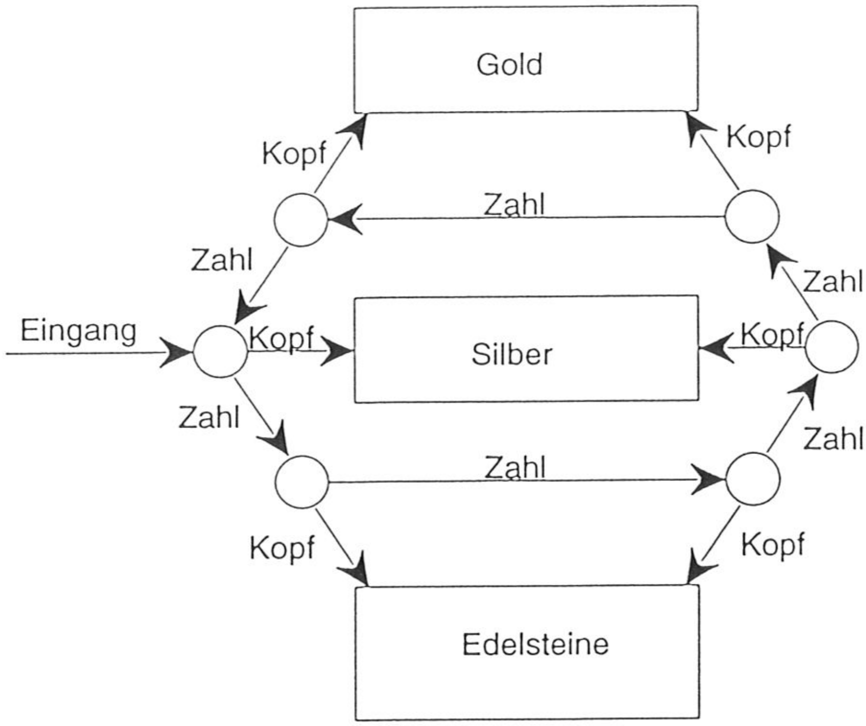
Untersuchen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} - x - 5y &= f(t) \\ \dot{y} + x + ky &= 0 \end{aligned}$$

als System mit Eingang $f(t)$ und Ausgang $y(t)$.

(a) Bestimmen Sie die Transferfunktion $G(s)$.

(b) Untersuchen Sie, in welchem Bereich für k das System stabil ist.



Aufgabe 7 (12 Punkte)

Sie betreten ein Labyrinth bei „Eingang". Sie dürfen sich nur in Pfeilrichtung bewegen. Bei jeder Verzweigung entscheiden Sie mit einem Münzwurf (ideale Münze), welchen Gang Sie betreten. Das geht so lange, bis Sie entweder bei den Edelsteinen, beim Silber oder beim Gold angelangt sind. Beachten Sie, dass Sie dazu vielleicht mehrere Durchgänge benötigen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen Sie

(a) zu den Edelsteinen?

(b) zum Silber?

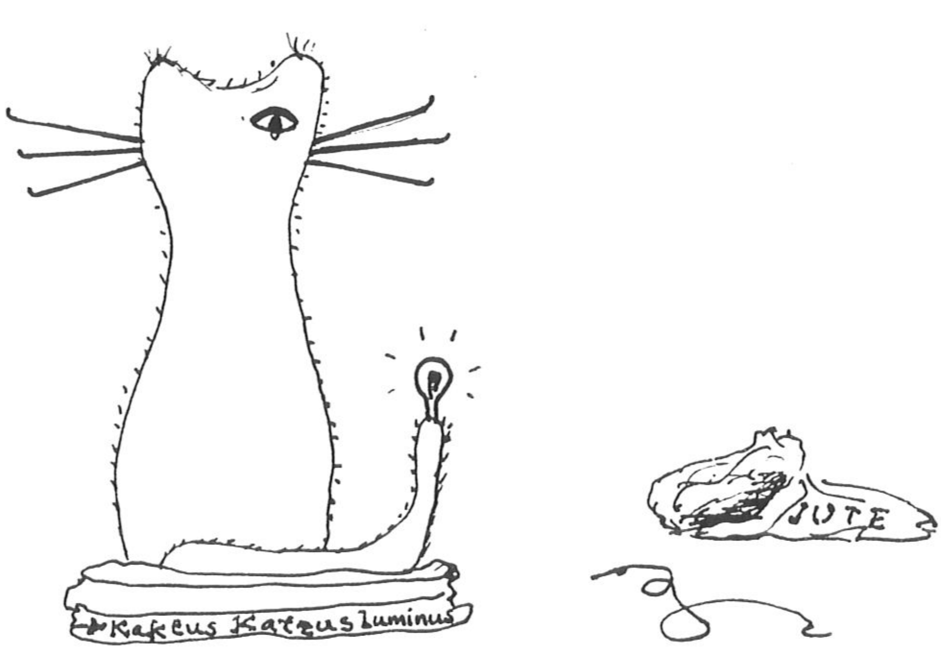
(c) zum Gold?

— ENDE —

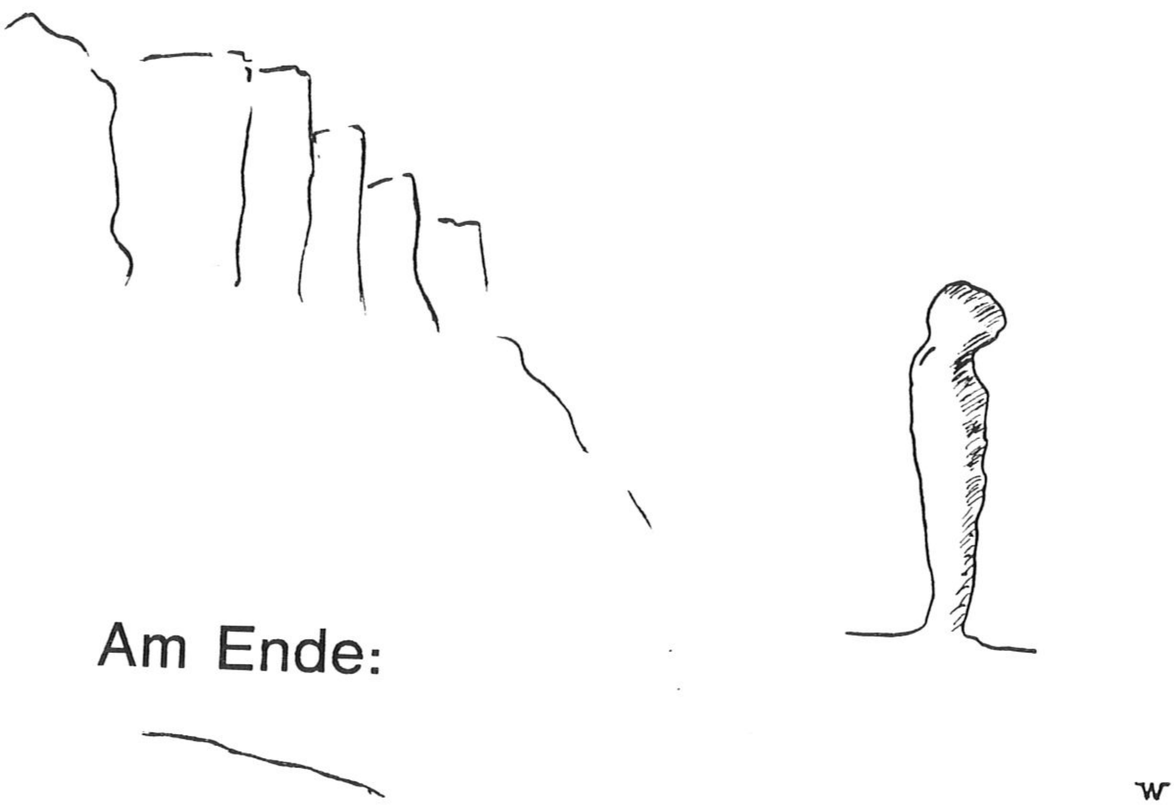
Nun, nach der letzten Seitenwende
hat auch dieses Buch ein Ende.
Daher jetzt ein kleiner Reim,
"Erinnerungs-Gedankenleim".

Was ein Ingenieur sich merken muss:

Wenn auch Seitenzahlen nie sind gross -
bleibt Kreativität doch grenzenlos...
Und:
Durch Ideenmangel wird schnell Schluss
mit Lobvorschuss.



W



Am Ende:

Noch eine archeologische Sensation! Halbewiger Student, stark erodiert, ca. 8000 Jahre alt, wurde am Rande einer langen, vorantiken Strasse entdeckt. Vermutlich ist er beim Rückblick auf die damals unlösbaren Probleme zur Säule erstarrt.
Wetter: IGH meldet Voraussage einer längeren Trockenperiode...

Wieso Sprüche klopfen, wenn wer sie auch werreissen kann?