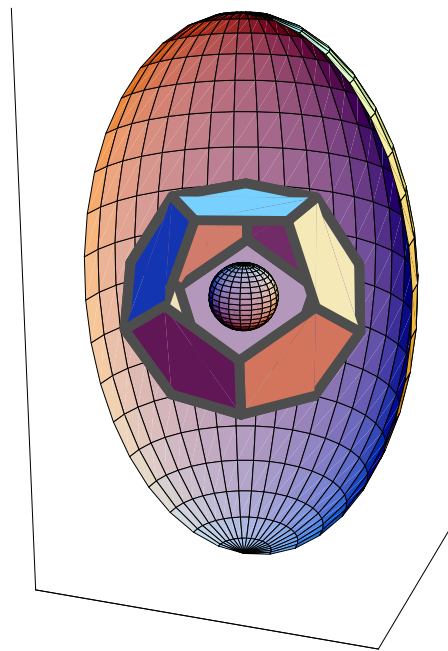


Aufgaben ◇ Modulprüfungen ◇ Vordiplome
◇ Elektro + Maschinenbau ◇
◇ Analysis ◇



von

Rolf Wirz

Alt-Ingenieurschule Biel — HTA-Biel — BFH/Dep. TI/ AHB

Ausgabe vom 1. Mai 2008, Version 1.0.3 / d
--

Mit klickbaren Links zu Lösungen

Übungen und Tests aus den Jahren 2005 – 2007 mit Vordiplomaufgaben und Modulprüfungsaufgaben aus den Jahren 1999 – 2006, letztere aus diversen Abteilungen (Fachbereichen)
Produziert mit PCTeX unter Win XP.
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

Bei der Erarbeitung von Lernstoff geht es kaum ohne Übung. Das gilt nicht nur beim Erlernen der Handhabung eines Musikinstrumentes. Unser Instrument, das wir für die Meisterung von Mathematikstoff zu beherrschen lernen müssen, ist das eingene Denken. Es geht also hier um Hirntraining, um Übung. Beim Üben, das gilt speziell auch bei einer Prüfungs-vorbereitung, ist Ausgeglichenheit ist angesagt. Wer nicht ausgeglichen ist, neigt stark auf eine Seite. Er kann daher kippen und schliesslich stürzen. Dann ist das Lernen gefährdet, oder die Prüfung ist schon vor der Prüfung vorbei. Der Aufwand hat sich nicht gelohnt. Das kannst du vermeiden, indem du dir dein Zentrum bewusst machst, um das du die Schranken deiner Ausgeglichenheit definieren sollst. . .

PhW

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre

Prof. für Math.

Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI

Pestalozzistrasse 20

Büro B112 CH-3400 Burgdorf/BE

Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230

Mail: Siehe <http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html> unter „Koordinaten von R.W.“

(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

©2007

Die Urheberrechte für das verwendete graphische Material gehören dem Autor.

Inhaltsverzeichnis

0.1	Einführung	5
1	Phase 1	7
1.1	Stoffprogramm Phase 1 $\diamond$ E+M $\diamond$	7
1.2	Selbststudium in Analysis $\diamond$ E+M 01 $\diamond$	10
1.3	Übungen in Analysis und Organisatorisches $\diamond$ E+M 01 $\diamond$	12
1.4	Link zu den Lösungen Phase 1	14
2	Phase 2	15
2.1	Stoffprogramm Phase 2 $\diamond$ E+M $\diamond$	15
2.2	Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 2 $\diamond$	17
2.3	Link zu den Lösungen Phase 2	19
3	Phase 3	21
3.1	Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 3 $\diamond$	23
3.2	Link zu den Lösungen Phase 3	24
4	Phase 4	25
4.1	Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 4 $\diamond$	27
4.2	Link zu den Lösungen Phase 4	28
5	Phase 5	29
5.1	Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 5 + 6 $\diamond$	30
5.2	Link zu den Lösungen Phase 5	32
6	Phase 6	33
6.1	Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 5 + 6 $\diamond$	35
6.2	Link zu den Lösungen Phase 6	37
7	Phase 7	39
7.1	Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 7 $\diamond$	41
7.2	Test $\diamond$ E+M1 01 Analysis $\diamond$	51
7.3	Link zu den Lösungen Phase 7	52
8	Phase 8	53
8.1	Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 8 $\diamond$	54
8.2	Link zu den Lösungen Phase 8	55

9 Phase 9	57
9.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 9 $\diamond$	58
9.2 Test $\diamond$ E+M1 01 Analysis 06 $\diamond$	60
9.3 Link zu den Lösungen Phase 9	62
10 Phase 10	63
10.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 10+11 $\diamond$	64
10.2 Link zu den Lösungen Phase 10	65
11 Phase 11	67
11.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 10+11 $\diamond$	68
11.2 Link zu den Lösungen Phase 11	69
12 Phase 12	71
12.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 12 $\diamond$	73
12.2 Link zu den Lösungen Phase 12	75
13 Phase 13	77
13.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 12+13 $\diamond$	78
13.2 Link zu den Lösungen Phase 13	79
14 Phase 14	81
14.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 14 $\diamond$	82
14.2 Test $\diamond$ E+M1 02 Analysis $\diamond$	83
14.3 Test $\diamond$ E+M1 02 Analysis $\diamond$	84
14.4 Link zu den Lösungen Phase 14	86
15 Phase 15	87
15.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 15 $\diamond$	88
15.2 Link zu den Lösungen Phase 15	89
16 Phase 16	91
16.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M I / 16 $\diamond$	92
16.2 Link zu den Lösungen Phase 16	94
17 Phase 17	95
17.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 01 $\diamond$	97
17.2 Link zu den Lösungen Phase 17	99
18 Phase 18	101
18.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 02 $\diamond$	102
18.2 Link zu den Lösungen Phase 18	104
19 Phase 19	105
19.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 03 $\diamond$	106
19.2 Link zu den Lösungen Phase 19	108

20 Phase 20	109
20.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 04 $\diamond$	110
20.2 Link zu den Lösungen Phase 20	112
21 Phase 21	113
21.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 05 $\diamond$	114
21.2 Link zu den Lösungen Phase 21	115
22 Phase 22	117
22.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 06 $\diamond$	118
22.2 Link zu den Lösungen Phase 22	120
23 Phase 23	121
23.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 07 $\diamond$	122
23.2 Link zu den Lösungen Phase 23	123
24 Phase 24	125
24.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 08 $\diamond$	126
24.2 Test $\diamond$ E+M1 02 Analysis $\diamond$	128
24.3 Link zu den Lösungen Phase 24	131
25 Phase 25	133
25.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 09 $\diamond$	134
25.2 Link zu den Lösungen Phase 25	136
26 Phase 26	137
26.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 10 $\diamond$	138
26.2 Link zu den Lösungen Phase 26	140
27 Phase 27	141
27.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 11 $\diamond$	142
27.2 Testentwurf: Differentialgleichungen	143
27.3 Link zu den Lösungen Phase 27	144
28 Phase 28	145
28.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 12 $\diamond$	146
28.2 Link zu den Lösungen Phase 28	148
29 Phase 29	149
29.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 13 $\diamond$	150
29.2 Link zu den Lösungen Phase 29	152
30 Phase 30	153
30.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 14 $\diamond$	154
30.2 Link zu den Lösungen Phase 30	156
31 Phase 31	157
31.1 Übungen in Analysis $\diamond$ E+M 2 15 $\diamond$	158
31.2 Link zu den Lösungen Phase 31	163

32 Phase 32	165
32.1 Übungen in Analysis: Prüfungsvorbereitung $\diamond$ E+M 2 16 $\diamond$	166
32.1.1 19 Aufgaben mit Lösungen (Lösungen: separate Datei)	166
32.1.2 27 Aufgaben ohne Lösungen	176
32.2 Link zu den Lösungen Phase 32	190
32.3 Hinweise zur Prüfungsvorbereitung	191
33 Modulprüfungen	193
33.1 Link zu den Lösungen	200

0.1 Einführung

Dieses Arbeitsbuch ist als Begleitung zu den Vorlesungen und Übungen in Analysis I und II (1. Studienjahr) des Bachelor-Lehrgangs für Elektro- und Maschineningenieure in den Jahren 2005 – 2007 entstanden. Ein Kapitel entsprach dabei einer Arbeitswoche. Zuerst ist jeweils eine kurze Stoffübersicht stichwortartig wiedergegeben. Die Stoffabfolge bezieht sich dabei auf die verwendeten Skripte „Analysis“, „Zoo der Funktionen“, „Einführung in Octave/ Matlab“ und „Mathematik II“. In jeder Arbeitsphase folgen auf die Stoffübersicht dann Übungen, manchmal auch ehemalige Tests und Links zu den Lösungen. Diese Lösungen sind vor allem des Umfangs des Maschinen-Outputs wegen ausgelagert. Zu einer Übungsserie kann der Umfang der zugehörigen Lösungen bis zu 200 Seiten betragen, wobei darin die Graphiken meistens einen großen Raum einnehmen.

Klickbare Links zu diesen Skripten:

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html> (Skript-Download)
<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAnaGdf.pdf> (Analysis deutsch – französisch)
<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAnaGd.pdf> (Analysis deutsch)
http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf
<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweidf.pdf> (Math. II deutsch – franz.)
<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweid.pdf> (Mathematik II deutsch)
<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweif.pdf> (Mathematik II französisch)

Die Lösungen zu den Übungen sind aus Praktikabilitätsgründen mit *Mathematica* produziert worden. In den bald 20 Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Vorteil dieses Verfahrens: Die Files mit dem reinen *Mathematica*-Source-Code in lassen sich damit sehr klein halten. Daher sind sie sehr einfach über Internet transportierbar. Es entstehen keine grossen Download-Zeiten und die Kosten des Speicherplatzes bei einem Provider übersteigen die gesetzten Grenzen nicht, denn die entstehenden File-Sammlungen haben beschränkte Grösse. Die abgearbeiteten Files mit dem Output mit Postscript-Graphiken sind allgemein sehr „schwer“, können aber jederzeit mit dem *Mathematica*-Programm aus dem Source-Code wieder erstellt werden. Dafür sind die mittels „Output beladenen Files“ erzeugten PDF-Files wieder klein, was sie transportabel macht.

Weitere Gründe für die Verwendung von *Mathematica* im Vergleich zu Konkurrenzprodukten liegen in den Lizenzbedingungen und dem Leistungsumfang, also im Kosten-Nutzen-Verhältnis im Vergleich zur momentanen Situation bei Konkurrenzprodukten, wodurch eine längere Evaluationen von selbst überflüssig geworden ist.

Für den auf den folgenden Seiten wiedergegebene Output (bei der Alternativausgabe mittels des unten angegebenen klickbaren URL's via Internet abrufbar) sind daher die Seiten unabhängig

nummeriert.

Nachstehend sind einige verschiedene Formatierungsmöglichkeiten der *Mathematica*-Files dargestellt. Infolge der in PDF-Files und im der Internet verwendbaren Farbformate, sind dabei die Farben zum Teil in den PDF-Files gegenüber der Bildschirmdarstellung rigoros reduziert. Das Format ersieht man aus dem Dateinamen. Die dabei zur Anwendung gelangte Mathematik braucht man zu Beginn nicht zu verstehen. Man kann trotzdem beurteilen, welche Darstellungsart im gegenwärtigen Rahmen gefällt und welche nicht:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_ArticleModern.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_ArticleClassic.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Classic.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Classroom.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Default.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Demo.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_DemoText.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_NaturalColor.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_PastelColor.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_PrimaryColor.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Report.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Textbook.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Tutorialbook.pdf

Hier sind die Quellencode-Files:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Default.nb
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Work.nb

Kapitel 1

Phase 1 (I/1)

1.1 Stoffprogramm Phase 1

◇ E+M ◇

Analysis 1. Semester

- ⊙ Einführung
 - Vorstellung
 - Learningmanagement
 - Koordinaten
 - Lerntechnik: Vergessenskurve, Lernplateau,
 - Lernen = erarbeiten * verstehen * behalten * anwenden. Faktor = 0
⇒ Produkt = 0.
- ⊙ Wozu Mathematik?
- ⊙ Zahlen, geometrische Gebilde, u.s.w.: keine materiellen Realitäten.
- ⊙ Modell (in der Sprache der Mathematik) - Realität ⇒ Naturwissenschaft — Mathematik
- ⊙ Beginn mit Funktion: Bei uns meist reelle Funktionen $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (Urbilder und Bilder sind reelle Zahlen. Reelle Zahlen — was ist das?)
 - Funktionen als Abbildungen: Menge von geordneten Paaren (Relation), links (Urbildmenge, Definitionsbereich) total, rechts Wertemenge oder Bildbereich eindeutig (keine gespreizten Pfeile) - Urbildmenge und Wertemenge müssen nicht geordnet sein und können beliebige mathematische Objekte enthalten.
 - Aufbau der Zahlen...

Arbeiten

- ⊗ Download Skripte auf <http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html>
 - Analysis deutsch <http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAnaGd.pdf> bis ca. Seite 90. (Ende Differentialrechnung. Achtung: Die Seitenzahlen können ändern.) Der Rest wird in einem späteren Semester gebraucht.
 - Einführung: <http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursEinf.pdf>
(Einführungsskript mit Tips zur Lerntechnik)
 - Matlab <http://rowicus.ch/Wir/Links/Linkpage3.html#EinfMatlab>
- ⊗ Download Octave <http://rowicus.ch/Wir/Links/Linkpage1.html#Freeware>
- ⊗ Studiere das Learningmanagement-System <http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html>
- ⊗ Beschaffe Literatur <http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/LiteraturAktuell.html>
 - Material:
 - * Formelnbuch oder Mathematiklexikon
 - * Lehrbuch (Umfang)
 - * Für Computer: Rechenprogramm und Literatur aus dem Internet
- ⊗ **Übungen**
 - Mache dir einen privaten Repetitionsplan für die **Grundlagen**, falls du dich unsicher fühlst (Literatur: Vorkurs Mathematik, Einstieg in die Mathematik für Fachhochschulen)
 - **Sammle deine Übungsaktivitäten in einem Porte-Feuille zum Fach!**
 - *Weiter ist ein Blatt schon bereit: Siehe im nächsten Abschnitt „Selbststudium“.*
 - **Übungen:** Siehe im übernächsten Abschnitt „Übungen“.
 - **Kurzlösungen:** PDF-File siehe unter dem klickbaren Link
<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/LEMA01.pdf>
Source Code siehe unter dem klickbaren Link
<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/LEMA01.nb>
 - **Übungsscheine:** Nach mündlichen Erklärungen des Dozenten. Download siehe
<http://rowicus.ch/Wir/Administratives/Uebungsscheine.html>
 - Studiere den „Zoo der Funktionen“ und überlege dir, wie man solche Funktionen auf einem Rechner (graphikfähiger Taschenrechner) darstellen könnte. Fabriziere einige solche Darstellungen! Link für den „Zoo der Funktionen“
<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/FktZoo.pdf>
 - Einführung in die Arbeit mit MatLab oder Octave:
 - * ⇒ Files sichten, schauen was die Befehle machen. Link zur Einführung in Matlab (Octave)
http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/FileList.html
(Navigationszentrale)
http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf
(kleines Skript)

- * An einem Schulrechner auf dem Matlab installiert ist: Die Inhalte der rtf-Files kann man mittels copy-paste ins Matlab kopieren. Finde heraus was die Files tun!
- Studiere die Funktionsgraphen auf <http://rowicus.ch/Wir/Scripts/FktZoo.pdf>
Versuche, solche Graphen mit deinem Taschenrechner oder einem Computer zu erzeugen.

⊙ **Eintrag ins Porte-Feuille:**

- Notizen
- Zusammenfassungen zu den Themen: Begriffe, Zusammenhänge, Anwendungen, Stundennachweis (Handschriften)
- Zusätzlich ev. Computerausarbeitungen
- Handlösungen
- Projekte

1.2 Selbststudium in Analysis

◇ E+M 01 ◇

Nach den Grundlagen des ECTS-Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine Stunde Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint.

Gerade am Anfang gilt es im Selbststudium Grundlagen zu repetieren oder eventuell fehlende Grundlagen zu erarbeiten. **Aufgabe:** Bearbeite dieses Blatt „Selbststudium 1“ und mache dir dafür einen Studienplan über ca. 3 – 5 Wochen. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

Ziel hier ist die Vertrautheit mit einigen wichtigen Grundbegriffen, so dass deren Verwendung nicht später zu grösserer Nacharbeit führt. Es geht also an dieser Stelle nicht primär um die Rechenfertigkeit, sondern vielmehr um Verständnis. Folgende Gebiete sind anzuschauen, wobei man die vorkommenden Begriffe und Regeln vor allem für das Begriffsverständnis an Prüfungen zusammenfassen soll (z.B. gestützt auf die Werke von Leupold, Papula (falls die Logik hier immer noch fehlt ist dafür ein anderes Werk zu konsultieren) oder das Skript Algebra von Wir1, wo man am Bildschirm mit der Suchfunktion des Explorers die Begriffe in manchen Fällen finden kann):

(1) Logik mit dem Augenmerk auf die Fragen:

- (a) Was ist eine logische Aussage? Beispiel?
- (b) Was versteht man unter der „Negation“ einer Aussage? Beispiel?
- (c) Was ist die „und-Verknüpfung“ von zwei Aussagen? Beispiel?
- (d) Was ist die „oder-Verknüpfung“ von zwei Aussagen? Beispiel?
- (e) Was sind die Regeln von de Morgan? Beispiel?
- (f) Was ist die „entweder-oder-Verknüpfung“ von zwei Aussagen? Beispiel?
- (g) Was ist eine „wenn-dann-Verknüpfung“ von zwei Aussagen? Beispiel?
- (h) Was ist eine „genau dann-wenn-Verknüpfung“ von zwei Aussagen? Beispiel?
- (i) Wieso muss man die mathematischen Sätze beweisen?

(2) Mengenlehre mit dem Augenmerk auf:

- (a) Was verstand Cantor unter einer Menge oder Klasse?
- (b) Wie ist die Beziehung zwischen Menge und Element?
- (c) Was ist die leere Menge?
- (d) Wie kann man eine Menge angeben? Beispiele?
- (e) Was ist das Komplement bezüglich einer gegebenen Grundmenge? Beispiel?
- (f) Was ist der Schnitt von zwei gegebenen Mengen? Beispiel?
- (g) Was sind disjunkte Mengen? Beispiel?
- (h) Was ist die Vereinigung von zwei gegebenen Mengen? Beispiel?
- (i) Was ist die symmetrische Differenz von zwei gegebenen Mengen? Beispiel?

- (j) Was ist eine Teilmenge einer gegebenen Menge? Beispiel?
 - (k) Was ist die Potenzmenge einer gegebenen Menge? Beispiel?
 - (l) Was sind geordnete Paare und was ist das Mengenprodukt von zwei gegebenen Mengen? Beispiel?
 - (m) Was ist die Mächtigkeit einer Menge? Beispiel?
 - (n) Was gilt zwischen den Mächtigkeiten zweier Mengen, ihrem Schnitt und ihrer Vereinigung für eine Beziehung? Beispiel?
- (3) Relationen mit dem Augenmerk auf die Fragen:
- (a) Was ist eine Relation bezüglich der Paarmenge von zwei gegebenen Mengen?
 - (b) Was für Typen von Relation werden in der Fachhochschulliteratur behandelt?
 - (c) Was ist eine Äquivalenzrelation? Und was hat eine solche Relation mit einer Partition (Aufteilung in disjunkte Teilmengen) einer Menge zu tun?
 - (d) Was ist eine Abbildung für eine Relation?
 - (e) Was ist eine Funktion für eine Relation?
- (4)
- (a) Wie sind die Zahlenbereiche (Mengen wie natürliche Zahlen, ganze Zahlen u.s.w.) geordnet und wie kann man sie charakterisieren resp. von einander unterscheiden? Beispiele?
 - (b) Wie kann man die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ durchnummerieren, ohne eine Zahl auszulassen? (Wenn ja, dann gibt es ja gleichviele Nummern wie rationale Zahlen, denn zu jeder rationalen Zahl würde eine Nummer gehören und umgekehrt...)
 - (c) Kann man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ebenfalls durchnummerieren, ohne eine Zahl auszulassen?
 - (d) Was kann man daraus für die Hypothese „unendlich“ folgern? (Wichtig für das spätere Verständnis der Infinitesimalrechnung.)

Die Antworten auf diese Fragen sind in der Literatur zu finden. Falls die Antwort auf eine Frage aus dem verwendeten Text nicht gefunden werden kann, soll man dazu Hilfe holen. Oft weiss eine Mitstudentin oder ein Mitstudent die Antwort sofort. Sonst muss man sich an den Dozenten richten.

1.3 Übungen in Analysis und Organisatorisches ◇ E+M 01 ◇

Nach den Grundlagen des ECTS-Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine Stunde Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint.

Gerade am Anfang gilt es im Selbststudium Grundlagen zu repetieren oder eventuell fehlende Grundlagen zu erarbeiten. **Aufgabe:** Konsultiere daher das Blatt „Selbststudium 1, Analysis“ (im Menue wo man dieses Blatt hier öffnen kann) und mache dir dafür einen Studienplan über ca. 3 – 4 Wochen. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

- (1) Eigene Organisation und Planung (nichts dem Zufall überlassen beim Erarbeiten eines Stoffgebietes, beim Arbeiten mit dem Stoff der Lektionen, Prüfungsvor- und Nachbereitung (Verbesserung), ...).
 - (a) Planung organisieren! (Strategie, Prinzipien, Tandem)
 - (b) Einarbeitung in die Lerntechnik (Literaturseite von Wir1!)
 - (c) A4-Seite mit den persönlich wichtigsten 7 Punkten der eigenen Lerntechnik zusammenstellen und eine **Kopie abgeben**. Beginn 3. Woche.
- (2) Rechner-Probleme lösen und falls noch nicht vorhanden beschaffen (Aufgabe: Sich damit zurecht finden, durchfragen u.s.w.):
 - (a) Account (Schule)
 - (b) Mathematik-Software-Zugang
 - (c) Scripte u.s.w. (DOWNLOAD, WIR1)
 - (d) Ein MATLAB-Kurs (wird zu einem wesentlichen Teil dann im Selbststudium erarbeitet). DOWNLOAD: Internet, Link-Seiten Wir1
 - (e) Eigener Rechner, Software, Speicher, Internet lauffähig halten
 - (f) Taschenrechner in Eigenverantwortung (an Prüfungen notwendig).

(3) Literatur und Schulunterlagen (Reglemente):

- (a) Schulreglemente beschaffen und studieren, Weisungen, Führer
- (b) Literatur (Lehrbuch, Formeln) beschaffen nach Literaturliste Wir1

(4) Porte-Feuille (dient je nach Bedarf als zusätzlicher Leistungsnachweis. Dafür können nach Ankündigung auch Punkte verteilt werden, die eventuell dann eine Rundung ermöglichen). Was gehört ins Porte-Feuille (Präsentierbare Sammlung der eigenen Arbeit, keine rohen Entwürfe)?

- (a) Eigene Formelsammlung, Zusammenfassungen
- (b) Eigene Planungen, Lerntechnik: Strategien, Prinzipien, Schemata, wichtige Dinge
- (c) Übungen und Prüfungen mit Verbesserungen
- (d) Mathematiksoftware-Arbeiten
- (e) Eventuell Journal

Mögliche Abgabe von Übungen: Falls vom Dozenten verlangt eine Woche später.

(5) Wie kann man auf einfachste Weise mathematische Einsichten gewinnen? Einfacher als anhand komplizierter Analysis-Probleme sieht man das in der elementaren Geometrie. Versuche jeweils mit einer Skizze zu einer Einsicht zu kommen!

- (a) Zeige: In einem Dreieck ist die Winkelsumme immer 180° .
- (b) Verifiziere den Satz von Pythagoras.
- (c) Verifiziere den Satz von Thales.

(6) (a) Nachstehend sieht man einen sogenannten „Kettenbruch“. Keine Angst, hier braucht es nur eine klevare Idee. Dann ist die Rechnung, die zur Einsicht führt, ziemlich kurz:

$$x = 3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \dots}}}} := 3 + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \dots = ??, \quad x \in \mathbb{Q}??$$

- (b) $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + \dots + 2222 = ?$ (Lösungsidee des jungen Gauss!)
- (c) $x + y \geq 1, \quad x - y \geq 2, \quad \mathbb{L} = ?$ (Zeichnung)
- (d) Finde graphisch eine Lösung: $\sin(x) = x + \cos(x), \quad x = ?$
- (e) $a = b = 4, \quad 15(a - b) = -16(a^2 - b^2) = -16(a + b)(a - b)$
 $\Rightarrow 15 = -16(a + b) = -16 \cdot 8 = -128 \Rightarrow 15 = -148$ ☹
 Fehler?

(7) Im eidg. Fachhochschulgesetz ist vorgeschrieben, dass auch die Allgemeinbildung ihren Platz an der Fachhochschule haben muss. Daher jetzt die Fragen:

- (a) Was ist zu sagen zum Ursprung der Mathematik?
- (b) Was bedeutet das Wort „Mathematik“?

1.4 Link zu den Lösungen Phase 1

Hinweis: Die Lösungen sind aus Praktikabilitätsgründen mit *Mathematica* produziert worden. In den bald 20 Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Vorteil dieses Verfahrens: Die Files mit dem reinen *Mathematica*-Source-Code in lassen sich damit sehr klein halten. Daher sind sie sehr einfach über Internet transportierbar. Es entstehen keine grossen Download-Zeiten und die Kosten des Speicherplatzes bei einem Provider übersteigen die gesetzten Grenzen nicht, denn die entstehenden File-Sammlungen haben beschränkte Grösse. Die abgearbeiteten Files mit dem Output mit Postscript-Graphiken sind allgemein sehr „schwer“, können aber jederzeit mit dem *Mathematica*-Programm aus dem Source-Code wieder erstellt werden. Dafür sind die mittels „Output beladenen Files“ erzeugten PDF-Files wieder klein, was sie transportabel macht.

Für den auf den folgenden Seiten wiedergegebene Output (bei der Alternativausgabe mittels des unten angegebenen klickbaren URL's via Internet abrufbar) sind daher die Seiten unabhängig nummeriert.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA01.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA01.nb

Kapitel 2

Phase 2 (I/2)

2.1 Stoffprogramm Phase 2

◇ E+M ◇

-
- ⊙ Repetition Funktion: Bei uns meist reelle Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (Urbilder und Bilder sind reelle Zahlen. Reelle Zahlen - was ist das?)
 - ⊙ Aufbau der Zahlen: $\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \dots$ (linke Menge in rechter Menge enthalten....)
 - ⊙ Zahlen ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \dots$) müssen zu größerer Zahlenmenge (Obermenge) erweitert werden, wenn eine Gleichung nicht lösbar ist ...
 - ⊙ Gekürzte rationale Zahlen sind immer periodische Dezimalbrüche und umgekehrt.
 - ⊙ Verfahren, wie periodische Dezimalbrüche in gemeine Brüche verwandelt werden... (multiplizieren mit Zehnerpotenz, subtrahieren, dividieren...)
 - ⊙ Nichtrationale Zahlen: irrational, algebraisch, falls Lösung einer algebraischen Gleichung, sonst transzendent wie e oder π .
 - ⊙ Wurzel aus 2: Nicht rational (Demonstration!) $\Rightarrow$ „Loch in der dichten Menge $\mathbb{Q}$ “. Wenn man alle Löcher stopft, erhält man die reellen Zahlen. (Diese sind durch die Menge aller Dezimalbrüche gegeben, bis auf Doppeldeutigkeiten wie $1.0000\dots = 0.99999\dots$)
 - ⊙ $\mathbb{R}$ füllt die Zahlengerade total aus: $\mathbb{R}$ ist jetzt lückenlos und dicht.
 - ⊙ In $\mathbb{R}$ ist z.B. die Gleichung $x^2 = -1$ nicht lösbar. Um die Gleichung lösen zu können, muss man $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen) erweitern. Da $\mathbb{R}$ die Zahlengerade ausfüllt, hat darauf aber nichts mehr Platz. Daher muss man in die Ebene ausweichen. Komplexe Zahlen addiert man wie ebene Vektoren. Das Problem ist die Multiplikation.
 - ⊙ $\mathbb{R}$ wird nun unser Arbeitsplatz für die reellen Funktionen sein. Man muss also $\mathbb{R}$ gut kennen.
 - ⊙ Nochmals Funktionenbegriff, links total, rechts eindeutig

- ⊙ Definitionsbereich, Wertebereich, Problematik: möglicher bekannter und tatsächlicher unbekannter Wertebereich
- ⊙ Beispiel $\{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- ⊙ Geordnete Paare, Paarmenge, Graph
- ⊙ Reelle Funktion, Standardkoordinatensystem, Aufteilung der Funktionen
- ⊙ Intervalle, offen, abgeschlossen, ...
- ⊙ Wann sind zwei Funktionen gleich?
- ⊙ Zoo der Funktionen:
 - Gauss-Klammer
 - Signum
 - Betrag
 - Folgen
 - Sägezahn
 - Konstante, lineare Funktion (Nullstelle, y-Abschnitt, Verschiebung, ...), wieso Gerade (Geometrie: ähnliche Dreiecke ...)
 - Quadratische Funktion, Nullstellen der quadr. Gleichung (quadratisch ergänzen)
- ⊙ Übungen
- ⊙ **Selbststudium** der Intervalle und Standardfunktionen (Zoo der Funktionen).

Arbeiten

- ⊙ Lösung <http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/UEMAna01.pdf> in Lekt.
- ⊙ Studium: <http://rowicus.ch/Wir/Scripts/FktZoo.pdf> (Zoo der Funktionen).
- ⊙ **Übungen:** <http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/UEMAna02.pdf> bis Übung 7
- ⊙ **Kurzlösungen:** http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMANa02.pdf, Source Code siehe http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMANa02.nb
- ⊙ Einführung in die Arbeit mit **MatLab** oder **Octave**:
 - http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/FileList.html $\Rightarrow$ Neue Versionen der Files sichten, schauen was die Befehle machen. (Achtung: Das Skript „Einführungskurs“ ist neu organisiert: PDF-Version für Print, HTML-Version für Links im Text, RTF-Files für copy-paste in Matlab.)
- ⊙ **Selbststudium** der Intervalle und Standardfunktionen (Zoo der Funktionen).

2.2 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 2 ◇

(1) (a) Zeigen: $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

(b) Berechne exakt: $(\frac{(2)^{\sqrt{2}}}{(4)^{\sqrt{2^3}}})^{\sqrt{2}} \cdot 2^{\sqrt{2}}$

(c) $\sin(x) = x + \cos(x)$, $x = ?$

(d) Berechne exakt die erste Lösung von:

$$20(5 \cos(3x + 2) + 7 \sin(3x + 2) - 1) \sin(3x - 4) = 0$$

(e) $(2^{\ln(2x-1)})^3 3^{\ln(2x-1)} = 1$

(2) Stelle Plots her:

(a) $f(x) = 3x - 4$

(b) $f(x) = \sin(\cos(x))$

(c) $f(x) = |x| - [\sin(x)]$

(d) $f(x) = [4x] - \operatorname{sgn}(x)$

(e) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

(f) $f(x) = \cos(x^2 + x)$

(g) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

(h) $f(x) = e^{x^2}$

(i) $f(x) = e^{-x^2} - 1$

(j) $f(x) = 3 \sin(\cos(2x^2 + 1) + x)$

(k) $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$

(l) $f(x) = \ln(\frac{x^2 + 2}{x^4 + 2}) - x^2$

(m) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 \cdot \sin(x - \frac{1}{x}))$

(n) $f(x) = x^4 - 2x + 1$

(o) $f(x) = [10 \sin(x)]$

(p) $f(x) = x + [\frac{1}{x} + x^2]$, $D_f = [1, 10]$

(q) $f(x) = x^x$, $D_f = [1, \infty)$

(3) Plot:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x = n \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

(4) Zeichne in Polarkoordinaten:

(a) $r(\varphi) = 2 \cdot \cos(2\varphi)$

- (b) $r(\varphi) = 2 \cdot \cos(2\varphi + 1)$
- (c) $r(\varphi) = 4 + 2 \cdot \sin(4\varphi) + \cos(16\varphi)$
- (d) $r(\varphi) = 1 + \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^2}{4}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$

(5) Sei $f(x) = x^2 - x + 1, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$

$\leadsto$ Löse: $f(x) \geq g(x)$

(6) Herleitung der Lösungsformel von $ax^2 + bx + c = 0$? (Koordinatensystem verschieben!)

(7) Studiere die Beschränktheit und Monotonie der folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = e^{\cos(x)}$
- (b) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)$
- (c)

$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x) - 2 & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ +\sin(x) & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -\sin(x) + 2 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

(d) $f(x) = e^{-x^2}$

(8) Beurteile, um welche Funktionstypen es sich handelt! (Folge, konstant, linear, quadratisch, Potenzfunktion, beschränkt, mit Polen, mit Asymptoten, periodisch, D_f , $W_f \dots$)

- (a) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- (b) $f(x) = e^{\sin(x)}$
- (c) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
- (d) $f(x) = \tan(\sin(x))$
- (e) $f(x) = 4x^2 - 3x + 2, \quad D_f = [-1, +1]$
- (f) $f(x) = [x^7]$
- (g) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^7)$
- (h) $f(x) = x^7 \cdot \operatorname{sgn}(x^7)$

(9) Skizziere in Polarkoordinaten:

- (a) $r(\varphi) = \cos(2\varphi) + 2$
- (b) $r(\varphi) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$
- (c) $r(\varphi) = \cos\left(4\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)$
- (d) $r(\varphi) = \cos\left(\varphi + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos(3\varphi) + k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \text{ etc.}$

2.3 Link zu den Lösungen Phase 2

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA02.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA02.nb

Kapitel 3

Phase 3 (I/3)

⊗ Zoo der Funktionen

- Potenzfunktionen, pos. und neg. Exponenten (Parabeln, Hyperbeln, Äste, Pol)
- Beschränkte Funktionen
- Asymptote
- Periodische Funktionen
- Punktweise definierte Funktionen
- Diskrete Funktionen
- Polar Plot (Darstellung in Polarkoordinaten)
- Zahlenfolgen, zugehörige Begriffe

⊗ **Selbststudium** Stoff:

- Verkettung von Funktionen
- Eigenschaften: Monoton, streng monoton, wachsend, fallend, Zusammenhang mit Inverser Funktion (Gerade, ungerade)
- Spezielle Funktionen
 - * Ganz rational, Polynome
 - * Horner
 - * Hauptsatz der Algebra: Über die Anzahl der Nullstellen, Linearfaktoren
 - * Gebrochen rational, Anzahl Pole
- Umkehrabbildung (z.B. bei $f(x) = x^2$, x positiv), trigonometrische Funktionen und Arcusfunktionen (was ist „secans“, „cosecans“?)

⊗ **Selbststudium:** Siehe nebenan resp. unter Übungen

Arbeiten

Selbststudium Stoff:

- ⊗ Verkettung von Funktionen
- ⊗ Eigenschaften: Monoton, streng monoton, wachsend, fallend, Zusammenhang mit Inverser Funktion (Gerade, ungerade)

⊙ Spezielle Funktionen

- Ganz rational, Polynome
- Horner
- Hauptsatz der Algebra: Über die Anzahl der Nullstellen, Linearfaktoren
- Gebrochen rational, Anzahl Pole

⊙ Umkehrabbildung (z.B. bei $f(x) = x^2$, x positiv), trigonometrische Funktionen und Arcusfunktionen (was ist secans, cosecans?)

⊙

⊙ **Übungen:**

- ⊙ – http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/UEMAna02.pdf Übung 7 und weiter
- http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/UEMAna03.pdf

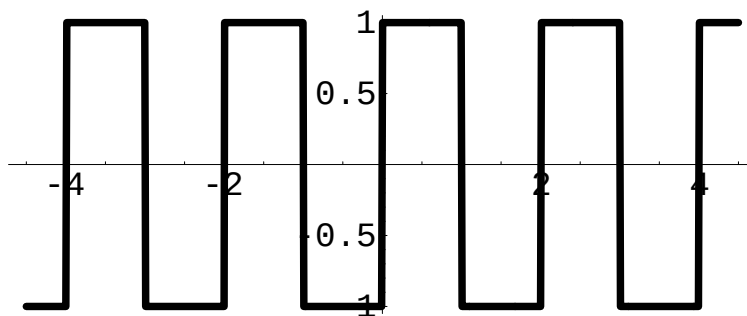
⊙ **Kurzlösungen:**

- ⊙ – http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMANa02.pdf
- Source Code siehe http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMANa02.nb
- http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMANa03.pdf
- Source Code siehe http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMANa03.nb

3.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 3 ◇

- (1) Mache eine Zusammenfassung der verschiedenen Funktionstypen, die Du kennst.
- (2) Zeichne die folgende Funktion mit Hilfe eines Taschenrechners oder mit dem Computer:



Das ist ein Computer-Output.

↪ Man hat das Problem, die Funktion zu komponieren!

- (3) Sei $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \arccos(x)$, $h(x) = e^x$

- (a) $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = ?$
- (b) $h(g(x)) = (h \circ g)(x) = ?$
- (c) $h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x) = ?$
- (d) $(h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x) = ?$

- (4) Skizziere:

$$u(t) = \begin{cases} \cos(t) & t \leq 0 \\ \arccos(t) & t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ e^t & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- (5) Ist f gerade/ ungerade? Wo ist f monoton? Wo gibt es Polstellen?

- (a) $f(x) = \sin(\cos(x))$
- (b) $f(x) = \cos(e^x)$
- (c) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-3x+2}$

3.2 Link zu den Lösungen Phase 3

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA03.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA03.nb

Kapitel 4

Phase 4 (I/4)

⊗ Zoo der Funktionen

- Stückweise definierte Funktionen
- Verkettung von Funktionen
- Nochmals ausführlicher Verkettung

⊗ Eigenschaften

- Monoton, streng monoton, wachsend, fallend, Zusammenhang mit inverser Funktion
- Umkehrabbildung
- Beispiele
- Gerade, ungerade

⊗ Funktionen

- Ganz rational, Polynome
- Horner
- Hauptsatz der Algebra: Über die Anzahl der Nullstellen, Linearfaktoren
- Gebrochen rational, Anzahl Pole

⊗ Umkehrfunktion

- Beispiele

⊗ **Selbststudium:** Transzendente Funktionen:

- Trigonometrische (auch Secans, Cosecans!)
- Arcus-Funktionen (inverse zu trig. Fkt.)
- Polarkoordinaten,
- Berechnung von e
- Exponentialfunktion Sinus und Cosinus hyperbolicus
- Logarithmusfunktion
- Areafunktionen

Arbeiten

⊗ **Selbststudium:** Transzendente Funktionen:

- Trigonometrische (auch Secans, Cosecans!)
- Arcus-Funktionen (inverse zu trig. Fkt.)
- Polarkoordinaten,
- Berechnung von e
- Exponentialfunktion Sinus und Cosinus hyperbolicus
- Logarithmusfunktion
- Areafunktionen

⊗ **Übungen:**

- http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/UEMAna04.pdf

⊗ **Kurzlösungen:**

- http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna04.pdf
- Source Code siehe http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna04.nb

⊗ **Selbststudium** speziell: Was ist „secans“ und „cosecans“?

4.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 4 ◇

(1) Skizze des Graphen?

(a) $f_1(x) = \sinh(x)$, $f_2(x) = \cosh(x)$, $f_3(x) = \tanh(x)$, $f_4(x) = \coth(x)$

(b) $\varphi_1(x) = 0.5^x$, $\varphi_2(x) = 1^x$, $\varphi_3(x) = 2^x$, $\varphi_4(x) = e^x$

(c) $\eta_1(x) = 0.5^{-x}$, $\eta_2(x) = 1^{-x}$, $\eta_3(x) = 2^{-x}$, $\eta_4(x) = e^{-x}$

(d) $\psi_1(x) = \log_{0.5}(x)$, $\psi_2(x) = \log_2(x)$, $\psi_3(x) = \log_e(x) = \ln(x)$

(e) $\phi(x) = x^x$

(f) $\xi(x) = x + \sin(x)$

(2) Skizze des Graphen?

(a) $h_1(x) = \sinh(\sin(x))$

(b) $h_2(x) = \sin(\sinh(x))$

(c) $h_3(x) = \sinh(\cos(x))$

(d) $h_4(x) = \sinh(\arcsin(x))$

(3)

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

Berechne eine numerische Näherung von x . Berechne x auch exakt.

4.2 Link zu den Lösungen Phase 4

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA04.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA04.nb

Kapitel 5

Phase 5 (I/5)

⊗ Transzendente Funktionen:

- Trigonometrische (Secans, Cosecans!)
- Goniometrie
- Arcus
- Polarkoordinaten, Beispiele
- Übungen
- Berechnung von e
- Exponentialfunktion
- Logarithmusfunktion
- Hyperbolische Funktionen: Sinus und Cosinus hyperbolicus, u.s.w.....
- Areafunktionen
- Darstellung mit Ln

⊗ Übungen

⊗ Nochmals Zahlen $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \dots < \dots$ (ein wenig Beweise)

⊗ Folgen als Funktionen auf $\mathbb{N}$

⊗ Nullfolgen, $\frac{1}{n}$ und Hörsatz

⊗ Graphen, Umkehrgraphen, Problem des Verhaltens für große n

Arbeiten

⊗ Übungen (1. Teil):

- http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/UEMAna05.pdf

⊗ Kurzlösungen (1. Teil):

- http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna05.pdf
- Source Code siehe http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna05.nb

⊗ Spätere Prüfungsvorbereitung: Ehemalige Prüfungen studieren (<http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html>)

5.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 5 + 6 ◇

- (1) Versuche, die Grenzwerte zu bestimmen für $n \rightarrow \infty$ (Rechner erlaubt - doch wie geht es ohne?):

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

(b) $a_n = 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $a_n = \frac{2n^2}{1 + 3n^2}$

(d) $a_n = \frac{4n^3 - 3n + 1}{n^4 - 2n^2}$

(e) $b_n = \sin(n) \cdot \frac{1}{n}$

(f) $b_n = e^{-\frac{1}{n}}$

- (2) $f(x) = e^{(x^2 - \cos(2x))} \rightsquigarrow f$ gerade/ ungerade?

- (3) $f(x) = y = e^{-x^2}$

(a) $x \geq 0 \rightsquigarrow f^{-1}(x) = ?$ Skizze!

(b) $f^{-1}(0.5) \approx ?$

- (4) $\log(x^2) + \log\left(\frac{1}{x}\right) - \log(x) = ?$

- (5) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(x) \cdot (?) + \cos(x) \cdot (?)$

(a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(x) \cdot (?) + \cos(x) \cdot (?)$

(b) $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \dots ? \dots$

- (6) $r(\varphi) = 1 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \rightsquigarrow$ Polar... Skizze!

- (7) $2 \cdot 3^x = 5^x \rightsquigarrow x = ?$

- (8) $0.367\overline{367} \dots = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N} \rightsquigarrow p, q = ?$

- (9) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{\sin\left(3\pi + \frac{4}{5}n^2\right)}{n^2} \right\rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$

- (10) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2 - 2n + 5}{n^3 + n^2 + 1} \right\rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$

$$(11) \quad \langle a_n \rangle = \left\langle \frac{\ln(n)}{n^2} \right\rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$$

Hinweis: Skizze! $\rightsquigarrow \ln(n), n$

$$(12) \quad \langle a_n \rangle = \left\langle \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left(5 + \frac{2+n}{n}\right) \right\rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$$

$$(13) \quad \langle a_n \rangle = \left\langle e^{\sin(\pi + \frac{1}{n})} \right\rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$$

$$(14) \quad \langle a_n \rangle = \left\langle \frac{\cos(2\pi + \frac{1}{5}n^3)}{n^2} \right\rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$$

$$(15) \quad \langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2 - 2n + 4}{4n^3 + n^2 - 1} \right\rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$$

$$(16) \quad \langle a_n \rangle = \left\langle \frac{\ln(n)}{n^{1.5}} \right\rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$$

Hinweis: Skizze! $\rightsquigarrow \ln(n), n$

$$(17) \quad \langle a_n \rangle = \left\langle \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}\right) \cdot \left(5 + \frac{6+7n}{8n}\right) \right\rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$$

$$(18) \quad \langle a_n \rangle = \left\langle 5 e^{\tan(\pi + \frac{2}{n^3})} \right\rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$$

$$(19) \quad \langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n+1}{\sqrt{n}+1} \right\rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$$

$$(20) \quad \langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(3n+1)}{\left(\frac{n(2n-1)}{n+2}\right)} \right\rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$$

5.2 Link zu den Lösungen Phase 5

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA05.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA05.nb

Kapitel 6

Phase 6 (I/6)

- ⊗ Graphen, Umkehrgraphen, Problem des Verhaltens für große n
- ⊗ konvexe Schlingen, Darstellbarkeit
- ⊗ Konvergenz, Grenzwert, Divergenz
- ⊗ Hinweis auf Weierstraß und Cauchy
- ⊗ Häufungspunkte, Teilfolgen
- ⊗ Jede Folge hat mindestens einen Häufungspunkt
- ⊗ Majorante, Minorante
- ⊗ Arithmetische und geometrische Folge, Bedeutung
- ⊗ Konvergenzbedingungen der geometrischen Folge
- ⊗ Summenfolgen: Arithmetische und geometrische Folgen
- ⊗ Beispiele, Bemerkung zu Polynomfolgen
- ⊗ Folgen von Beträgen
- ⊗ Monoton und beschränkt bedeutet konvergent
- ⊗ Arithmetische Operationen mit konvergenten Folgen
- ⊗ Übungen
- ⊗ Regeln über Grenzwerte von Folgen:
 - Summe oder Differenz
 - Produkt
 - Quotient
 - Potenz
 - Folge im Exponent
 - trigonometrische Funktionen auf Folgen

- Varianten der Berechnung von e
- ⊗ Übungsbeispiele

Arbeiten

- ⊗ **Übungen**
 - Aufgaben siehe folgende Seiten!
- ⊗ **Kurzlösungen:**
 - http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA06.pdf
 - Source Code siehe http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA06.nb
- ⊗ Spätere Prüfungsvorbereitung: Ehemalige Prüfungen studieren
(<http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html>)

Beispiel eines Tests:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TB105_01.pdf

Lösungen

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TB1_01_Loes.pdf

6.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 5 + 6 ◇

(1) Skizzieren?

(a) $f(x) = x^2 + \sin(x)$

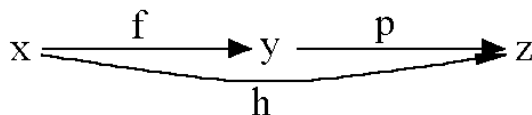
(b) $f(x) = [x^2] + 1$

(c) $f(x) = \sin([x^2 + 1]) - 1$

(2) $x = 4 + \frac{4}{4 + \frac{4}{4 + \frac{4}{\ddots}}} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}$

$x = 5 + \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{\ddots}}} \stackrel{?}{=} \frac{r}{s}, \quad = ?$

(3)



$f(x) = \arccos(x) = y$

$h(x) = p(f(x)) = p(y) = y^2 - 2y + 2 = z$

$h(x) = (p \circ f)(x)$

(a) $h(x) \rightsquigarrow$ Diagramm?
 $h(x) \rightsquigarrow$

(b) $D_h = ?, \quad W_h = ?$

(c) $h(0) = ?, \quad h(1) = ?$

(4) $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}, \quad g(x) = x^2 - x$

(a) Nullstellen von $h(x) = f(x) \cdot g(x)$?

(b) $u(x) = \frac{1}{f(x) - g(x)} \rightsquigarrow$ i. Diagramm?
ii. Pole?

(5) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + x$

$f(x), g(x) \rightsquigarrow$ Probl. 4

(a) Diagramm?

(b) Verhalten für grosse $|x|$?

(6) $f(x) = e^{-x^2}, \quad g(x) = x$

(a) Diagramm?

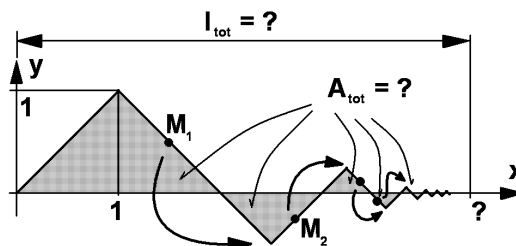
(b) $f(x) = g(x) \rightsquigarrow x \approx ?$

(c) $m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow m = ?, \quad M = ?$

(d) $f(0) = ?, \quad f(\ln(e)) = ?, \quad f(1) = ?$

(7) $3^x = 2^{2x} \cdot e^3 \cdot 3^{-2x} \rightsquigarrow x = ?$

(8) $A_{tot} = ?$, $l_{tot} = ?$



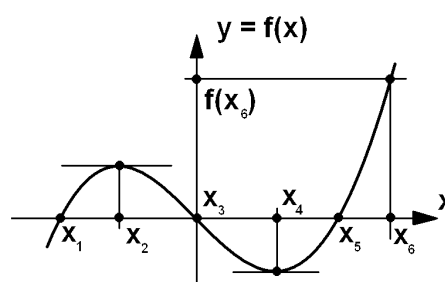
(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos(2n) - \sin(n^2) + 8n^2 - 4n + 5}{2n^2 + 4n - 5 \sin(n)} = ?$

(10) $f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_3)(x - x_5)$

$x_1 = -2$, $x_3 = 0$, $x_5 = 2$

$x_6 = 4$, $f(x_6) = 48$

$x_2 = ?$, $x = 4 = ?$



(11) $\langle a_n \rangle = \langle (3 + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^4} + \frac{3}{2^6} \dots) \cdot (\frac{5}{2} + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{2^5} + \dots) \rangle \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$

(12) $\langle a_n \rangle = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k}) \rightsquigarrow a_n \rightarrow ?$

(13) Studiere die Funktion $Nest(f, x, n) := \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))\dots)))}_n$

(a) Skizziere $Nest(\cos, x, n)$, $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$

(b) Skizziere $Nest(\sin, x, n)$, $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} Nest(\sin, x, n) = ?$ (Vermutung?)

6.2 Link zu den Lösungen Phase 6

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA06.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA06.nb

Kapitel 7

Phase 7 (I/7)

- ⊗ Links- und rechtsseitiger Grenzwert
- ⊗ Problem stetiger Funktionen (Kurven) in der Makrophysik
 - keine Sprünge
 - keine Lücken
 - keine Pole
- ⊗ Abbildung von Folgen
- ⊗ Grenzwert bei Funktionen: Definition mit Folgen
- ⊗ Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen wie bei Folgen
- ⊗ Definition Stetigkeit
- ⊗ keine Sprünge, Definitionslücken, Pole...
- ⊗ Links- und rechtsseitige Stetigkeit
- ⊗ Beispiele
- ⊗ natürliche Fortsetzung von Funktionen in Definitionslücken
- ⊗ Stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen sind beschränkt
- ⊗ Zwischenwerteigenschaft
- ⊗ Arithmetische Eigenschaften stetiger Funktionen
- ⊗ Polynome stetig
- ⊗ Rationale Funktionen stetig bis auf Pole
- ⊗ Stetigkeit bei trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktion, Umkehrfunktion (Logarithmus)

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Aufgaben siehe folgende Seiten!
- ⊗ **Kurzlösungen :**
 - http://rowicus.ch/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA07.pdf und
 - http://rowicus.ch/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA07_Output.nb
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA07.nb
- ⊗ **Prüfungsvorbereitung:** Ehemalige Prüfungen studieren
(<http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html>)
- ⊗ Interessante Funktionen zeichnen (Nochmals spezielle Funktionen (Aufgaben)):
 - <http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/UEMA06.pdf>
 - <http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/LEMA06.pdf>
(Mögliche Lösungen)

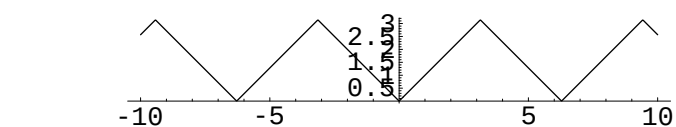
7.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 7 ◇

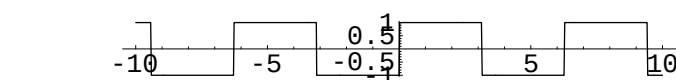
Zeichne mit einem Computer (Rechner) die nachfolgenden Funktionen *
 Dessiner à l'ordinateur (calculatrice) les fonctions suivantes

2D: Konstruktion von Sägezahnfunktionen * *Construire à l'ordinateur des courbes en dents de scie*

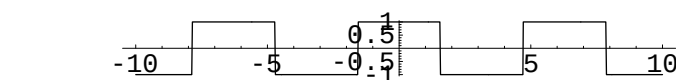
$ArcSin[Cos[x]]$



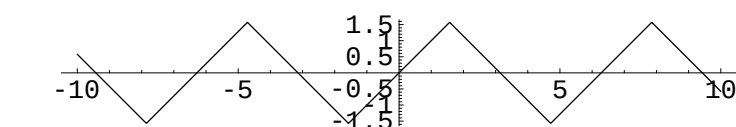
$\frac{Sin[x]}{\sqrt{1 - Cos[x]^2}}$



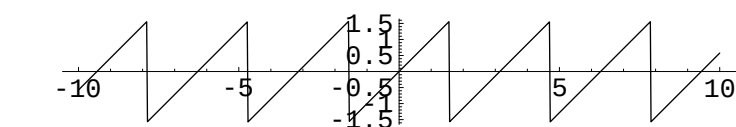
$\frac{Cos[x]}{\sqrt{1 - Sin[x]^2}}$



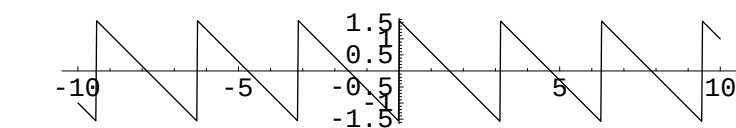
$ArcSin[Sin[x]]$



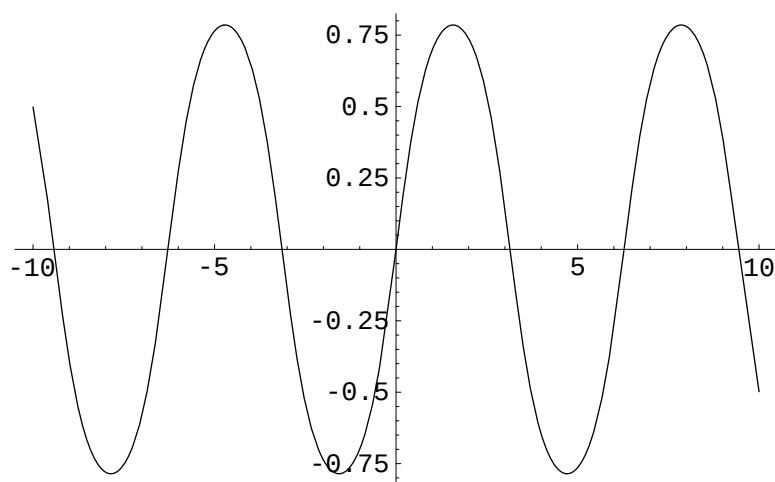
$ArcTan[Tan[x]]$



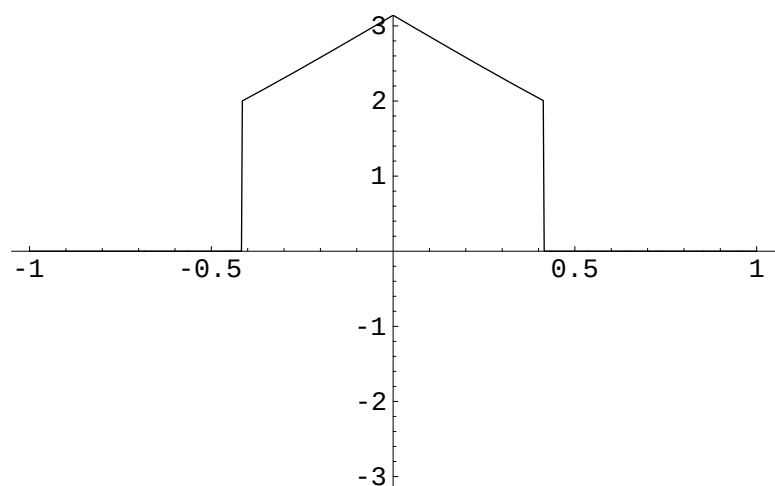
$ArcTan[Cot[x]]$



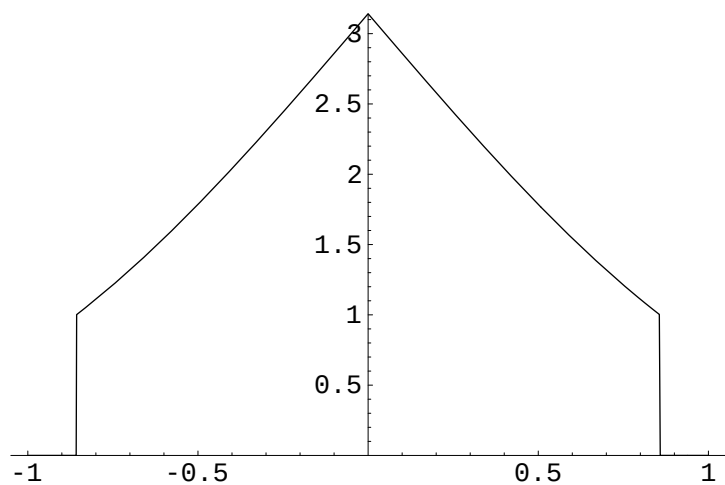
$$\text{ArcTan}[\text{Sin}[x]]$$



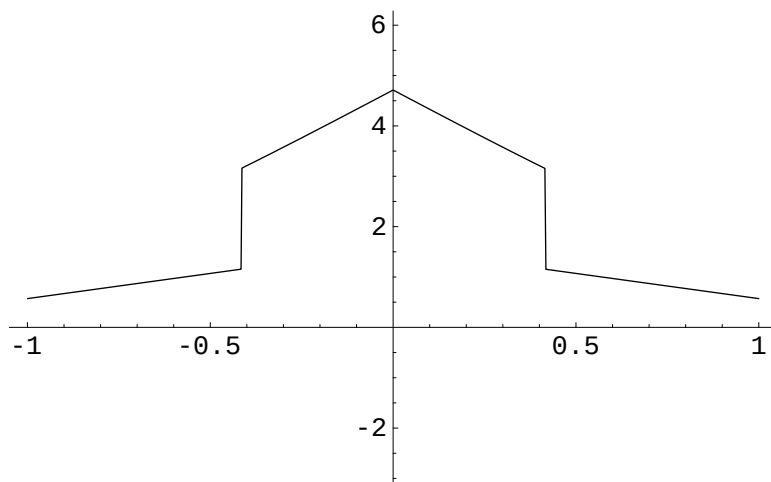
$$2 \text{ArcSin}[e^{-x^2}] \text{Sign}[\text{Floor}[\text{ArcSin}[e^{-x^2}]]]$$



$$2 \text{ArcSin}[e^{-x^2}] \text{Sign}[\text{Floor}[2 \text{ArcSin}[e^{-x^2}]]]$$



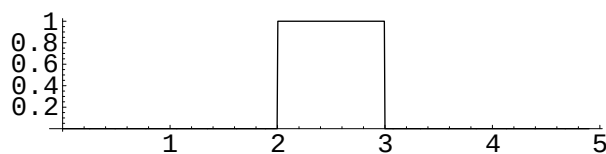
$$\text{ArcSin}[\text{Cos}[x]] + 2 \text{ArcSin}[e^{-x^2}] \text{Sign}[\text{Floor}[\text{ArcSin}[e^{-x^2}]]]$$



Zeichnen von kurz veränderten Funktionen * *Dessiner des fonctions qui changent sur un intervalle*

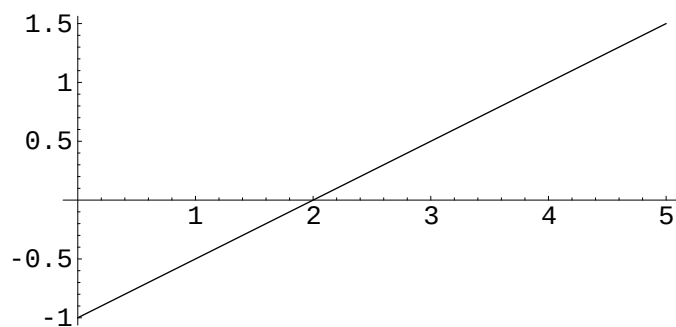
Anleitung zum Entwurf der Rechtecksfunktion (eine Möglichkeit) * *Instruction pour projeter une fonction rectangulaire*

Zeichne * *Dessiner* $\text{Sign}(-(x-2)(x-3))/2+0.5$

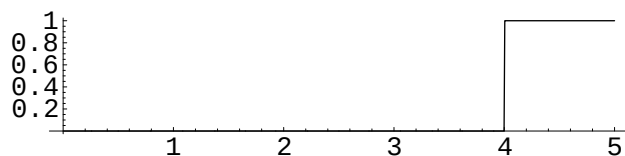


Anleitung zum Entwurf der Keilfunktion (ein möglicher Aufbau) * *Instruction pour projeter une fonction en forme de clavette*

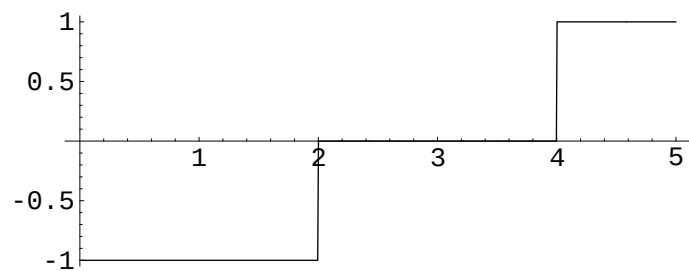
Zeichne * *Dessiner* $1/2 x - 1$



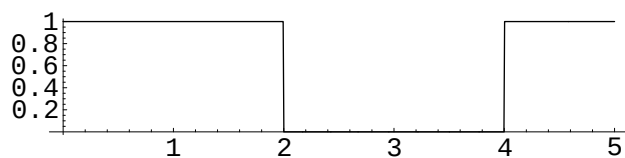
Zeichne * *Dessiner* $\text{Sign}(1/2 x - 2)/2 + 0.5$



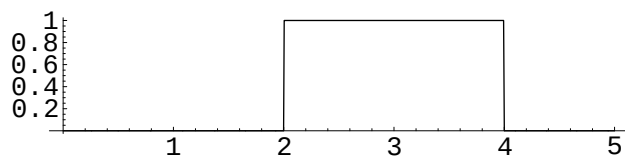
Zeichne * *Dessiner* $\text{Sign}([1/2 x - 1])$ (Gauss-Klammer)



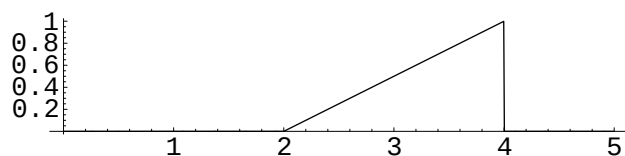
Zeichne * *Dessiner* $\text{Sign}([1/2 x - 1])^2$ (Gauss-Klammer)



Zeichne * *Dessiner* $1 - \text{Sign}([1/2 x - 1])^2$



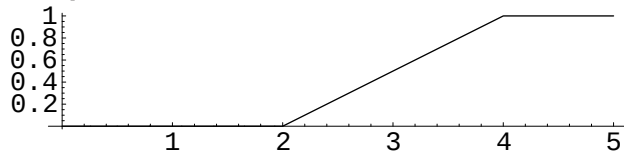
Zeichne * *Dessiner* $(1 - \text{Sign}([1/2 x - 1])^2) * (x - 2)/2$



Zusammensetzen: Zeichne * Composer: Dessiner

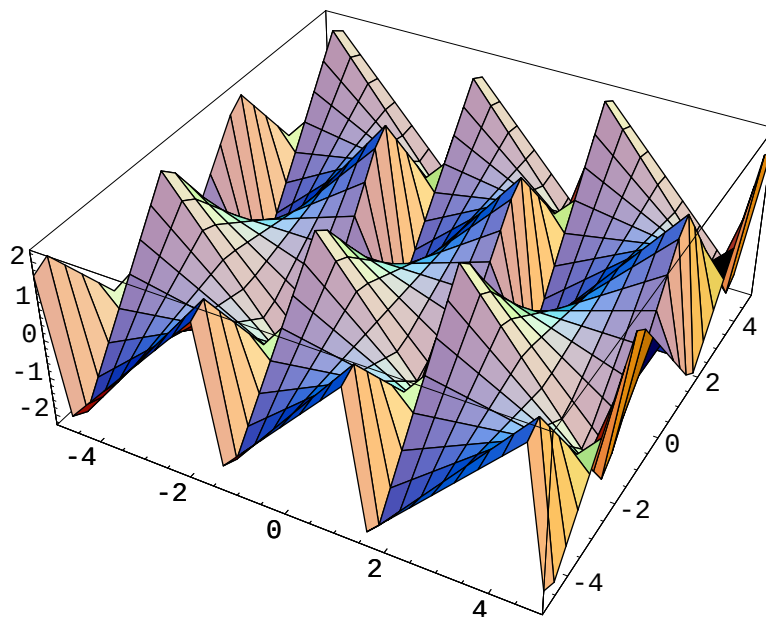
$$(1 - \text{Sign}([1/2 x - 1])^2) * (x-2)/2 + \text{Sign}(1/2 x - 2)/2 + 0.5$$

`Plot[(1 - Sign[Floor[1/2 x - 1]]^2) (x - 2)/2 + Sign[1/2 x - 2]/2 + 0.5, {x, 0, 5}, AspectRatio -> Automatic];`

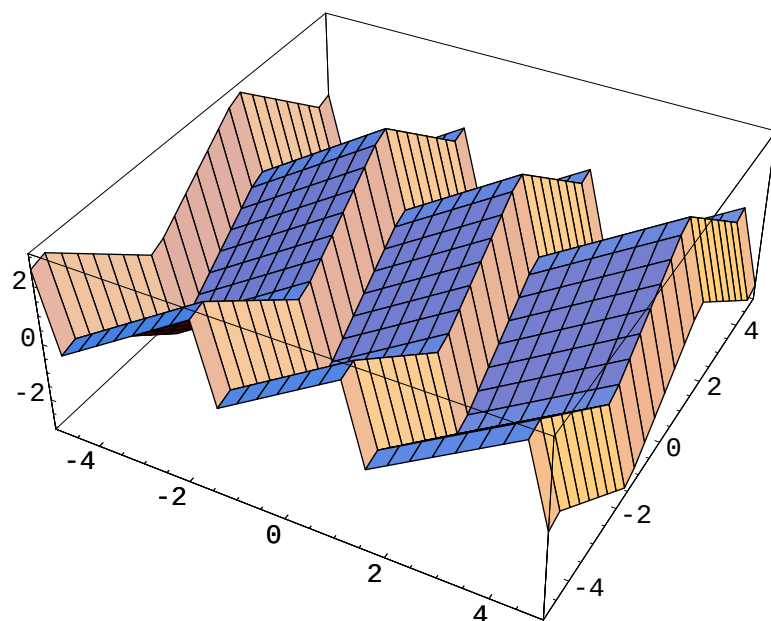


3D: Sägezahnfunktionen als Konstruktionselemente * Courbes en dents de scie comme éléments de construction

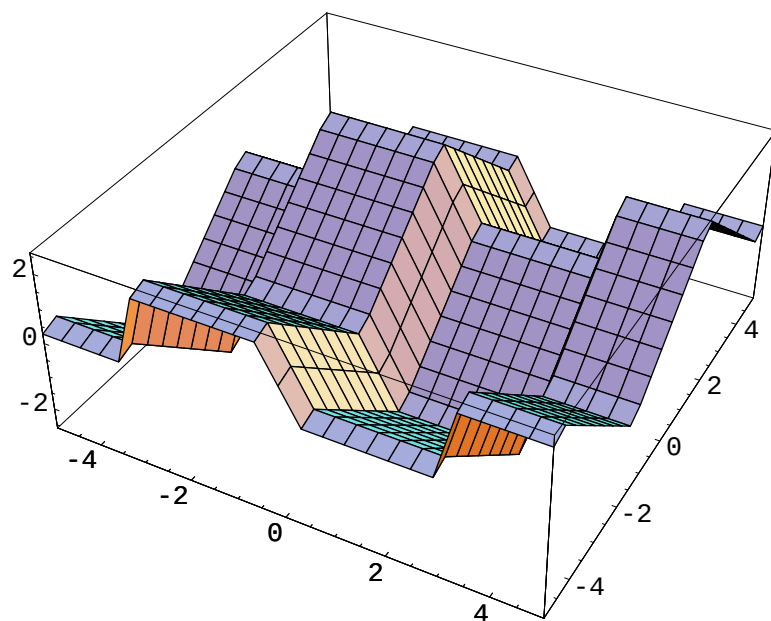
`ArcSin[Sin[y]] ArcTan[Tan[x]]`



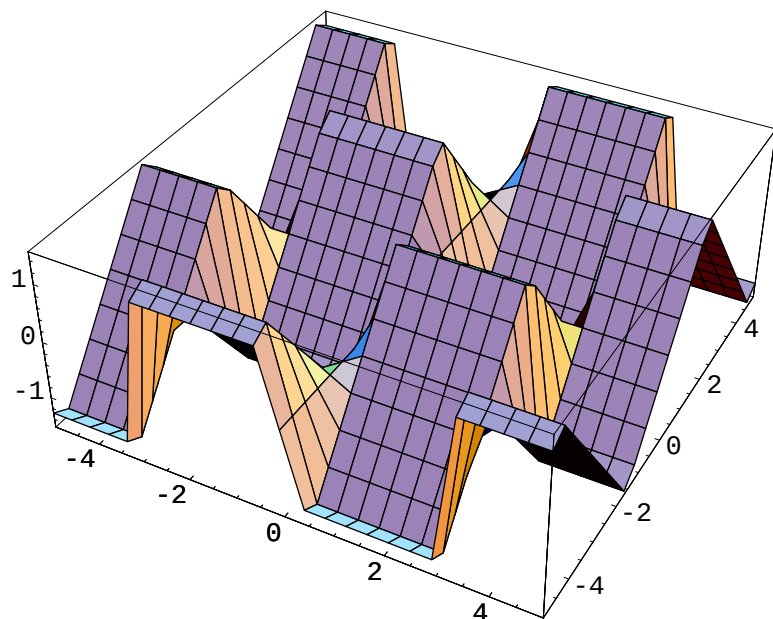
$$\text{ArcSin}[\text{Sin}[y]] + \text{ArcTan}[\text{Tan}[x]]$$



$$\text{ArcSin}[\text{Sin}[y]] - \frac{\text{Sin}[x]}{\sqrt{1.0001 - \text{Cos}[x]^2}}$$

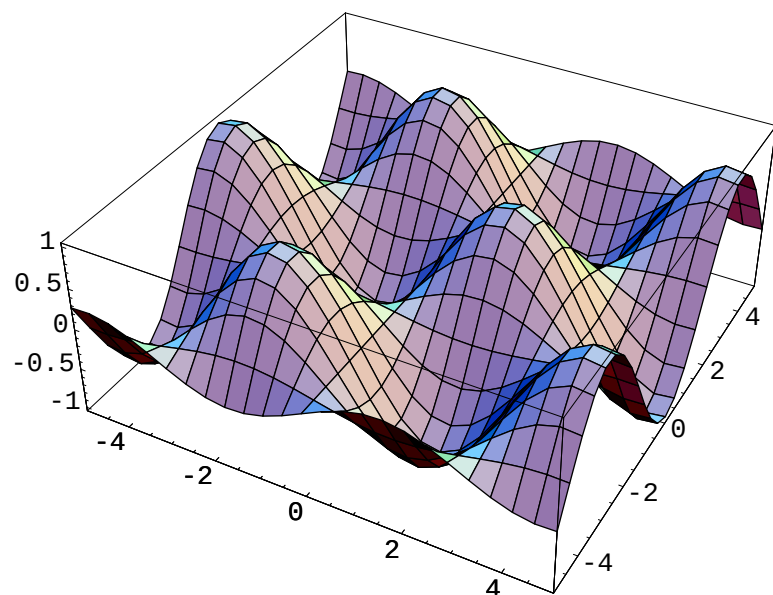


$$\frac{\text{ArcSin}[\text{Sin}[y]] \text{Sin}[x]}{\sqrt{1.0001 - \text{Cos}[x]^2}}$$

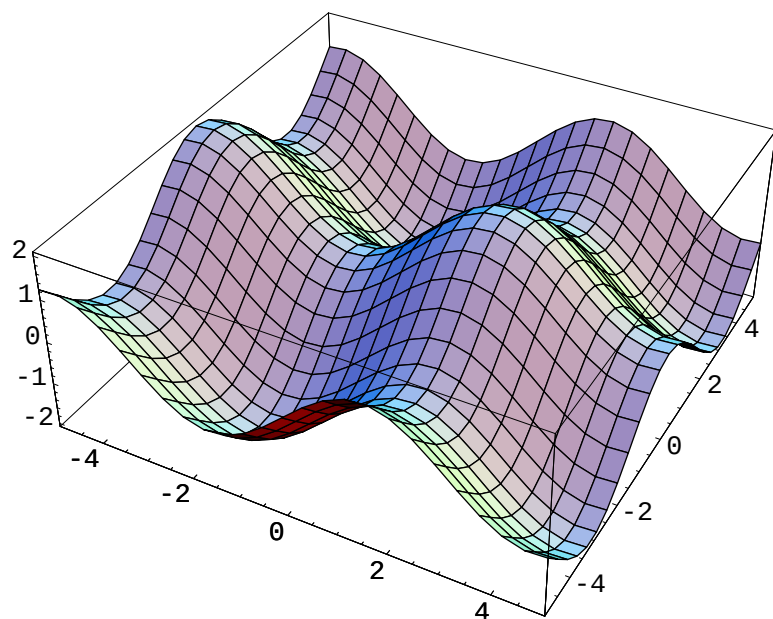


3D: Sinus und Cosinus als Konstruktionselemente * *Sinus et cosinus comme éléments de construction*

$$\text{Cos}[y] \text{Sin}[x]$$

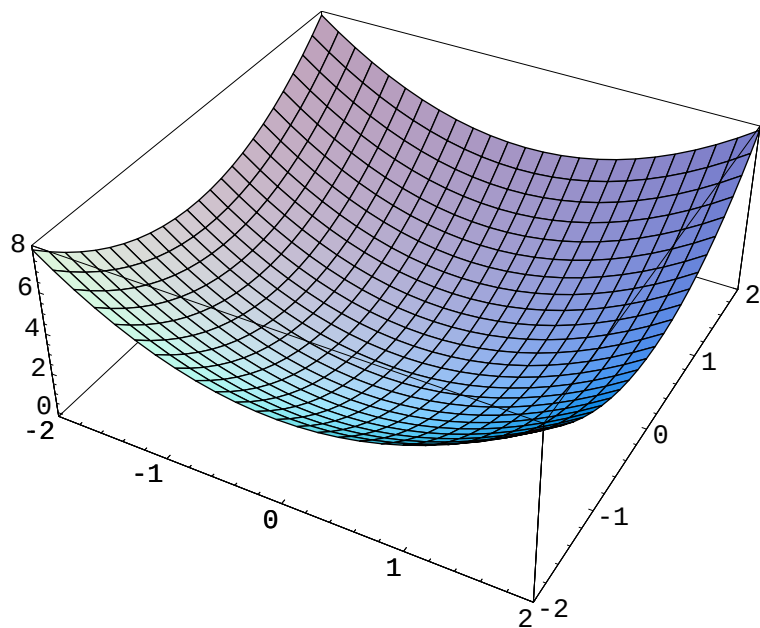


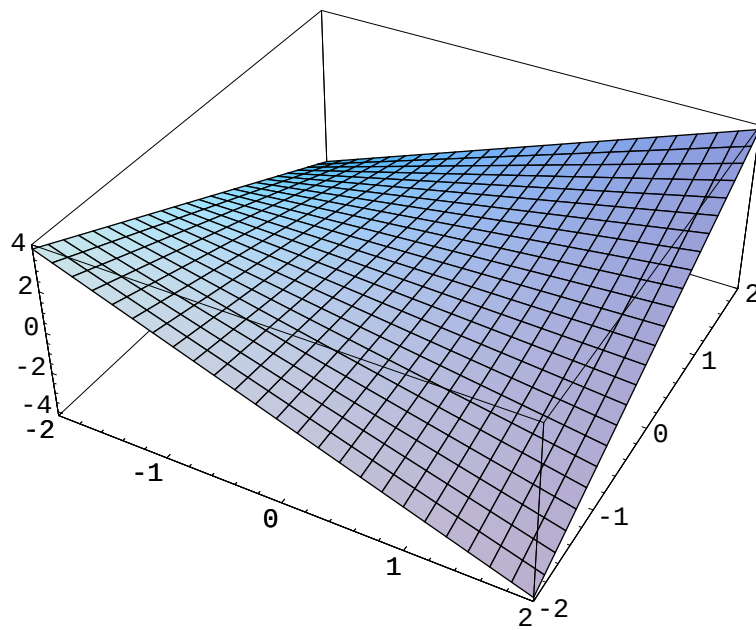
$$\cos[y] + \sin[x]$$



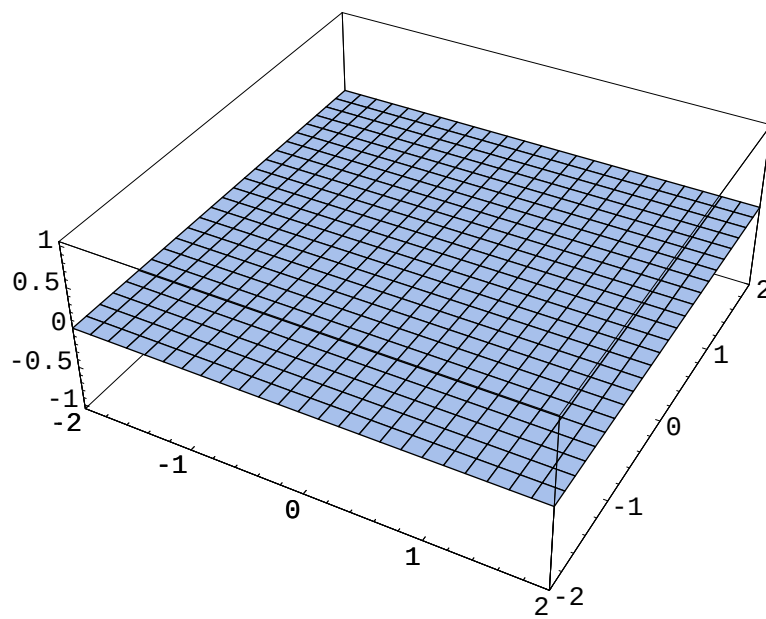
3D: Polynome als Konstruktionselemente * *Polynômes comme éléments de construction*

$$x^2 + y^2$$

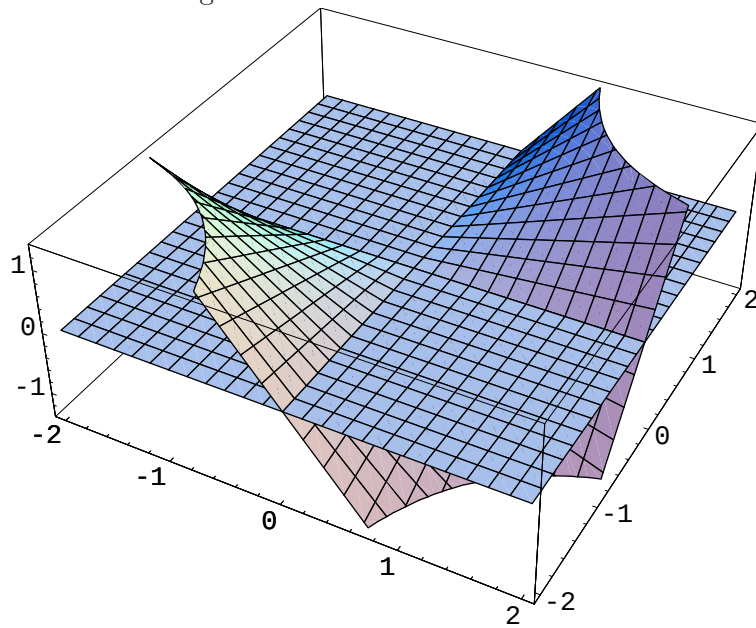


xy 

0



Letzte Plots zeigen: * *Montrer les derniers dessins*



7.2 Test

◇ E+M1 01 Analysis ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleichviele Punkte. (Rechner erlaubt!)

- (1) Die folgenden Funktionen werden auf dem Intervall $I = [0, 5]$ betrachtet (rad!).

$$f_0(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}, \quad f_1(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}$$

$$f_2(x) = \arccos\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}\right), \quad f_3(x) = \arccos\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - \cos^2(x)} + 1}\right)$$

- (a) Bestimme den Definitionsbereich D_{f_0} von f_0 im Intervall I und skizziere f_0 .
 (b) Bestimme den Definitionsbereich D_{f_1} von f_1 im Intervall I und skizziere f_1 .
 (c) Bestimme den Definitionsbereich D_{f_2} von f_2 im Intervall I und skizziere f_2 .
 (d) Bestimme den Definitionsbereich D_{f_3} von f_3 im Intervall I und skizziere f_3 .
- (2) Eine Repetitionsaufgabe: Vereinfache von Hand (ein einziger Bruch)!

$$\frac{(x+1) \left(x + \frac{x^3-1}{(x-1)(x+1)} - 1 \right)}{x} - 2x$$

- (3) Berechne den Grenzwert (Resultat mit Herleitung):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2(n) + 3}{\sin(n) + 3n}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot (n-1) \cdot \ln(n)$ (*Hinweis: $\ln$ wächst sehr viel schwächer als n*)

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n) + n^3 - 2n^2 + n - 1 - \frac{1}{n}}{n \sin(n) - 3n^3 + n - 5}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2(n) \cdot \tan(\frac{1}{n})}{\sin(n) + 3} + \frac{2n^2 - 3}{3n^2 + 2}$

- (4) Skizziere die Graphen und notieren sie wenn die Funktion monoton, periodisch und / oder gerade resp. ungerade ist:

(a) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + 1)$

(b) $f(x) = \sin(\operatorname{sgn}(x))$

(c) $f(x) = \cos(\sin(x))$

(d) $f(x) = \ln(10^x)$

(e) $f(x) = \cosh(x) - \sinh(x)$

(f) $f(x) = x \sin(x) + |x| \cos(x)$

7.3 Link zu den Lösungen Phase 7

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna07.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna07.nb

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna07_Output.nb

Lösungen zum Test:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/TEM1Ana05_01.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/TEM1Ana05_01.nb

Kapitel 8

Phase 8 (I/8)

⊗ Differentialrechnung:

- Tangente als Schmiegegerade, Gewinnung durch Grenzprozess: Sehne wird zu Tangente.
- Newton: f' , Problem der Geschwindigkeit, Beschleunigung
- Leibniz: $\frac{df}{dx}$, Prioritätsstreit, Bernoulli
- Weitere Notationen (Physik u.s.w.)
- Sehnensteigung als Differenzenquotient ($\tan(\alpha)$)
- Tangentensteigung (Ableitung) als Grenzwert (Differentialquotient)
- Ableitungsfunktion

⊗ Ableitung von $f(x) = c$, $f(x) = ax + b$, $f(x) = x^2$

⊗ Ableitung von x^n

⊗ Homogenität $(cf(x))' = cf'(x)$

⊗ Additivität $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

⊗ n -te Ableitung von x^n

⊗ Ableitung von Polynomen

⊗ Beispiele

Arbeiten

⊗ **Prüfungsvorbereitung:** Siehe oben

⊗ **Übungen**

- Siehe folgende Seite

⊗ **Kurzlösungen**

- http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA08.pdf
- Source Code siehe http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA08.nb

8.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 8 ◇

(1) $f(x) = \frac{\sin(x^2 - 2)}{x^2 - 2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = \sqrt{2}$

f ist stetig für $x = x_0$

$\leadsto$ Wie ist es für $x = x_1 = ?$

(2) $f(x) = \frac{\tan(x)}{x^2 - 1}$

Wo ist f nicht stetig?

(3) $f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 0 \\ 7 & x \geq 6 \end{cases}$ Zeichnung?

Vervollständige den Graphen derart, dass f stetig wird!

(4) $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = ?$

(5) $f(x) = \frac{e^x - 1}{\ln(x + 1)}$

(a) Wo ist f nicht stetig?

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$

(c) Skizziere: $f(x)$, $e^x - 1$, $\ln(x + 1)$

(6) $f(x) = \frac{3}{x - 1}$, $x_1 = 1.1$, $x_2 = 10$, $\varepsilon = 0.1$

$f(x) \in U_\varepsilon(f(x_1)) \Rightarrow x \in U_\delta(x_1) \leadsto \delta = ?$

$f(x) \in U_\varepsilon(f(x_2)) \Rightarrow x \in U_\delta(x_2) \leadsto \delta = ?$

(7) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 1}$

Wo ist f stetig?

(8) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{(\tan(x))^2}{x}$

Wo ist f stetig?

(9) $f(x) = (x - 1) \cdot (x + 1)$, $I = D_f = [-4, 4]$

Minimum und Maximum von f ?

(10) $f(x) = e^{\sin(x)}$, $x \in [0, 8\pi)$

Minimum und Maximum von f ?

8.2 Link zu den Lösungen Phase 8

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna08.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna08.nb

Kapitel 9

Phase 9 (I/9)

- ⊗ Test
- ⊗ Exkurs:
 $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < [0, 1] = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^n| \dots < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))| < \dots$
- ⊗ Kurze Repetition
- ⊗ n-te Ableitung von x^n
- ⊗ Ableitung von $\sin(x)$

Arbeiten

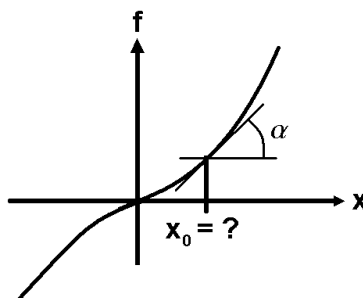
- ⊗ **Übungen:** Repetition + Aufarbeitung nach eigenem Plan
- ⊗ **Übungen**
 - Aufgaben siehe nächste Seiten
- ⊗ **Kurzlösungen**
 - http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA09.pdf
 - Source Code siehe http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA09.nb

9.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 9 ◇

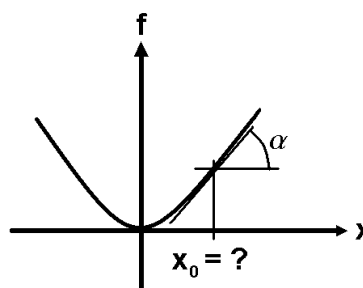
(1) $\alpha = 80^\circ$ $f(x) = x^3$

$x_0 = ?$



(2) $f(x) = x^4$

$\alpha(x_0) = \alpha(1)$



(3) $f(x) = 3x^7 + 9x^4 + 2$

$f'(x) = ?$

(4) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = ax^2 + bx + c$
 $f_1(1) = f_2(1)$,
 $f_2(3) = 0$, $f_2(x) \geq 0$

Skizze? Winkel zwischen den Tangenten
 an die beiden Kurven im Schnittpunkt?

(5) $f(x) = x^2$, $f(x_0) = b$, $f'(x_0) = a$
 $g(x) = a(x - x_0) + b \leadsto$ Tangente
 $g(x_1) = 0 \Rightarrow x_1$

$P_1 = P_1(x_1/0)$, $P_2 = P_2(x_0/0)$
 $P_3 = P_3(x_0/f(x_0))$, $P_4 = P_4(0/g(0))$
 $P_5 = P_5(0/0)$

$\leadsto A(P_1P_2P_3) = ?$, $A(P_1P_4P_5) = ?$

(6) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

$\leadsto f'(x) = ?$

(7) $f(x) = (\sin(x))^3$

$\leadsto f'(x) = ?$

(8) $f(x) = 3x - \frac{x}{\cos(x)}$

$\leadsto f'(x) = ?$

(9) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

$\leadsto f'(x) = ?$

(10) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2 + 2}$

$\leadsto f'(x) = ?$

(11) $f(x) = \sin(2x) (= 2 \sin(x) \cdot \cos(x))$

$\leadsto f'(x) = ?$

$$(12) \quad f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$$

$$(13) \quad f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x + \cos(x)} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$$

$$(14) \quad f(x) = \cos(\sin(\cos(x^4))) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$$

9.2 Test

◇ E+M1 01 Analysis 06 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleichviele Punkte. Rückseiten frei lassen!

- (1) D_f = Definitionsbereich (Punkte, welche nicht dazu gehören erkennbar markieren!):
(Je 3 P.)

- (a) $f_1(x) = \sin(x) \sqrt{1 - \cos^2(x)}$.
Bestimme D_f von $f = f_1$ im Intervall $I = [0, 2\pi]$ und skizziere f .
- (b) $f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$.
Bestimme D_f von $f = f_2$ im Intervall $I = [-2, 2]$ und skizziere f .
- (c) $f_3(x) = \lfloor 2.5 \sin(\pi x) - 1 \rfloor$. $\lfloor \cdot \rfloor$ = Gauss-Klammer.
Bestimme D_f von $f = f_3$ im Intervall $I = [-1, 3]$ und skizziere f .
- (d) $f_4(x) = \cos(x - \lfloor x - 0.5 \rfloor)$. $\lfloor \cdot \rfloor$ = Gauss-Klammer.
Bestimme D_f von $f = f_4$ im Intervall $I = [0, 2.5]$ und skizziere f .
- (e) $f_5(x) = \arcsin\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{\sin^2(x)}}\right)$.
Bestimme D_f von $f = f_5$ im Intervall $I = [0, 5]$ und skizziere f .
- (f) $f_6(x) = \arctan\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - \cos^2(x)} + 1}\right)$.
Bestimme D_f von $f = f_6$ im Intervall $I = [0, 2\pi]$ und skizziere f .
- (g) $f_7(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$.
Bestimme D_f von $f = f_7$ im Intervall $I = [-3, 3]$ und skizziere f .
- (h) $f_8(x) = \sin(\sin(x))$.
Bestimme D_f von $f = f_8$ im Intervall $I = [-5, 5]$ und skizziere f .
- (i) $f_9(x) = \cosh(x) + \sinh(x)$.
Bestimme D_f von $f = f_9$ im Intervall $I = [-3, 3]$ und skizziere f .
- (j) $f_{10}(x) = \cosh(|x|) + \sinh(|x|)$.
Bestimme D_f von $f = f_{10}$ im Intervall $I = [-2, 2]$ und skizziere f .
- (k) $f_{11}(x) = \cos(x) + x|x|\sin(x)$.
Bestimme D_f von $f = f_{11}$ im Intervall $I = [-5, 5]$ und skizziere f .

- (2) (Je 1 P. pro richtige Nennung. Fehler geben Minuspunkte.)

- (a) Nenne die Punkte, in denen die obigen Funktionen nicht stetig sind (Nummer der Funktion angeben!).
- (b) Nenne die Punkte, in denen die obigen Funktionen nicht monoton sind (Nummer der Funktion angeben!).
- (c) Nenne die Stellen, in denen die obigen Funktionen senkrechte Asymptoten haben (Polstellen) — (Nummer der Funktion angeben!).
- (d) Nenne diejenigen obiger Funktionen welche gerade sind (Nummer der Funktion angeben!).

- (3) (a) Eine Repetitionsaufgabe: Vereinfache von Hand (ein einziger Bruch)!

$$f(x) = \frac{(1-x) \left(x + \frac{x^3+1}{(x-1)(x+1)} + 1 \right)}{x} - 2x$$

- (b) Berechne die Stellen, in denen $|f(x)| = 3$ gilt.

(c) Berechne x numerisch: $x = 7 + \frac{6}{6 + \frac{6}{6 + \frac{6}{\ddots}}}$ (Je 3 P.)

- (4) Berechne den Grenzwert (Resultat mit Herleitung): (Je 3 P.)

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + e^n}{e^n \pi + \frac{1}{n}}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right) \ln(n^2)$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^2 + \sin(n)n + n - 2 - \frac{3}{n}}{2n^3 + \sin(n)n + 2n + 1}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 - 2}{3n^2 - 2} + \frac{\tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \sin^2(n) + 1}{3n + \sin(n)} \right)$

- (5) Gegeben sind die Funktionen $h_1(x) = (x-2)^2 - 2$ und $h_2(x) = 2(x-2)(x-1) - 2$.

- (a) Berechne die Schnittpunkte der beiden Graphen. (Je 3 P.)
- (b) Berechne denjenigen Punkt (falls möglich), an welchem die Sehne zwischen den Schnittpunkten die x -Achse schneidet.

9.3 Link zu den Lösungen Phase 9

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna09.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna09.nb

Lösungen zum Test:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/TEM1Ana6_7_01.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/TEM1Ana6_7_01.nb

Kapitel 10

Phase 10 (I/10)

- ⊗ Produktenregel
- ⊗ Quotientenregel
- ⊗ Anwendungen: Ableitung von $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x^n}$ u.s.w.
- ⊗ Kettenregel
- ⊗ Anwendungen: Beispiele
- ⊗ Anwendungen: Beispiele, Ableitung von x^n
- ⊗ Beispiele

Arbeiten

- ⊗ Leite folgende Funktionen ab: $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ u.s.w.
- ⊗ **Übungen** Siehe folgende Seite. (Hinweis zur Berechnung der Extremalstellen: Untersuche, wo die Tangente horizontal verläuft!)
- ⊗ **Kurzlösungen**
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA10.pdf
Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA10.nb

10.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 10+11 ◇

(1) Bernoulli:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = ?$

(b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \pi \frac{\sin(x)}{\sqrt{x - \pi}} = ?$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)^2}{x} = ?$

(2) $f(x) = (x^x)^x \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(3) $f(x) = x(x^x) \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(4) $f(x) = 1/2x - \cos(x) \rightsquigarrow \text{Min.} = ?, \text{Max.} = ?$

(5) $f(x) = x \cdot \sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = ?, \text{Min.} / \text{Max.} ?$

(6) $f(x) = e^{-x^2} \rightsquigarrow f'(x) = 0, x = ?, f''(x) = 0, x = ?$

Graph von f ?

(7) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 5 \rightsquigarrow f'(x) = 0, x = ?, f''(x) = 0, x = ?$

Graph von f ?

(8) $f(x) = x^4 - x^2 - 1 \rightsquigarrow f'(x) = 0, x = ?, f''(x) = 0, x = ?$

Graph von f ?(9) Differenziere die nachfolgende Gleichung links und rechts nach x :

$$\sin(x + \beta) = \sin(x) \cdot \cos(\beta) + \cos(x) \cdot \sin(\beta)$$

Was kann man folgern?

(10) Bestimme die Extrema:

(a) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

(b) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 1$

(c) $f(x) = \frac{1}{50}x^2(x - 5)(x - 9)$

10.2 Link zu den Lösungen Phase 10

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA10.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA10.nb

Kapitel 11

Phase 11 (I/11)

- ⊙ Ableitung der Inversen Funktion
- ⊙ Ableitung des Logarithmus, Einordnung
- ⊙ Ableitung der Inversen
 - Ableitung von e^x
 - Ableitung von $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$
 - Ableitung von $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ u.s.w.
 - Beispiele
- ⊙ Mittelwertsatz
- ⊙ Regel von Bernoulli (de L'Hospital)
- ⊙ Beispiele, z.B. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0^0 = 1$ (Übungen)

Arbeiten

- ⊙ Leite folgende Funktionen ab: $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ u.s.w.
- ⊙ **Übungen:** Siehe nächste Seite. (Hinweis zur Berechnung der Extremalstellen: Untersuche, wo die Tangente horizontal verläuft!)
- ⊙ **Kurzlösungen**
<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/LEMA11.pdf>
<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/LEMA11.nb>

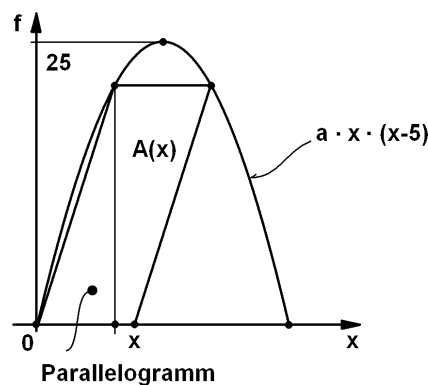
11.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 10+11 ◇

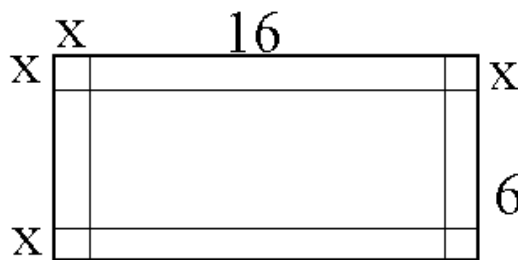
(1)

(a) $a = ?$

(b) $A(x) \rightarrow \text{Max.} \leadsto x = ?$



- (2) Durch wegschneiden der quadratischen Ecken der Breite x und danach falten entsteht aus dem Papierbogen (16×6) eine Schachtel ohne Deckel. Wie gross muss man x wählen, damit der Inhalt maximal wird?



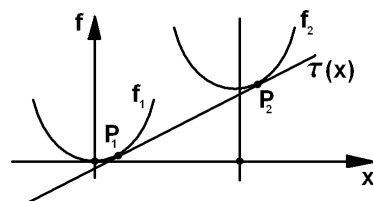
- (3) Schwieriges Problem:

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = (x-2)^2 + 4$$

$P_1 P_2$: Gemeinsame Tangente

$$P_1 = P_1(x_1, y_1), \quad P_2 = P_2(x_2, y_2)$$

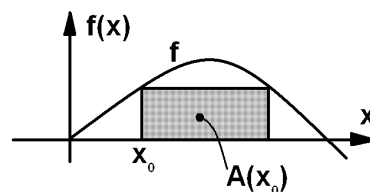
$$x_1, x_2, y_1, y_2 = ?$$



- (4) $f(x) = \sin(x)$

$A(x_0)$ soll maximal sein

$$x_0 = ?$$



- (5) $f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x^4$

Maximaler Abstand der beiden Kurven von f_1 und f_2 in y -Richtung zwischen $x = 0$ und $x = 1$?

11.2 Link zu den Lösungen Phase 11

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA11.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA11.nb

Kapitel 12

Phase 12 (I/12)

- ⊗ Extremwerte: Minimum, Maximum contra Wendepunkte (speziell Terrassenpunkte)
- ⊗ Lokale, globale und Randextrema
- ⊗ Notwendige und hinreichende Bedingungen:
 - Zusammenhänge zwischen nullter, erster und zweiter Ableitung bei Extremwerten
- ⊗ Begriffe konvex und konkav von oben contra von unten und Wendepunkte
- ⊗ Beispiele (Übungen) zu Extremwertberechnungen: Länge einer Leiter, die in einen Schlauchturm hinein gebracht werden soll. Diskussion eines Funktionsgraphen
- ⊗ Extremalprobleme und Optimierungsprobleme (Beispiel: Was passiert bei der Veränderung der Körpergröße mit dem Volumen bezüglich der Oberfläche resp. des Querschnitts der tragenden Teile)
- ⊗ Angewandte Übungen: Beispiele aus dem Gebiet der Diskussion von Funktionsgraphen
- ⊗ Nullstellenberechnung (bei transzendenten Funktionen)
 - Newton-Verfahren: Schnelle Konvergenz, aber auch Tücken
 - Graphische Methode
 - Bisektionsmethode

Arbeiten

- ⊗ **Übungen zur Testvorbereitung: Diesmal eine Serie ehemaliger Tests** (Ohne die numerischen Aufgaben, d.h. Newton-Algorithmus, Nullstellenberechnung, Fixpunktmethode)
 - <http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/T3I1aEinf0304.pdf>
 - <http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/T3I1a0304.pdf>
 - <http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/T3I1a0405.pdf>
 - http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/T2I1Av0405_1.pdf
 - <http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/2I1Av0304.pdf>

⊙ **Kurzlösungen**

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/LEMA12.pdf>

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/LEMA12.nb>

- **Testvorbereitung:** Nächste Seite, Übungen!

12.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 12 ◇

Diskutiere die Graphen der folgenden rationalen Funktionen:

(1) $f(x) = x^2 + 10x$

(2) $f(x) = x^3 - 2x$

(3) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x$

(4) $f(x) = 2x^5 - 3x^2$

(5) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + x$

(6) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x - 4$

(7) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$

(8) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x - 2$

(9) $f(x) = x^3 - 9x - 8$

(10) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

(11) $f(x) = \frac{2(x-1)}{x-1}$

(12) $f(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{x-1}$

(13) $f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$

(14) $f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^2}$

(15) $f(x) = 1 + \frac{(x-2)^2}{(x-1)^3}$

(16) $f(x) = \frac{4x-3}{(x-2)^3}$

(17) $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^3}$

(18) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - 4x - 3}$

(19) $f(x) = \frac{9x-27}{x^2}$

$$(20) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 2}$$

$$(21) \quad f(x) = \frac{x}{x + 1}$$

$$(22) \quad f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3}$$

$$(23) \quad f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x + 8}$$

$$(24) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 12}$$

$$(25) \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

12.2 Link zu den Lösungen Phase 12

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA12.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA12.nb

Kapitel 13

Phase 13 (I/13)

- ⊗ Weiter Nullstellenberechnung (bei transzendenten Funktionen)
 - Regula falsi
 - Fixpunktmethode
 - Beispiele
- ⊗ Übungen (Testvorbereitung)

Arbeiten

- ⊗ **Übungen**
 - Aufgaben siehe nächste Seite!
- ⊗ **Kurzlösungen**
 - http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA13.pdf
 - Source Code siehe http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA13.pdf

Die **Lösungen** werden vorerst auf dieser Seite nicht alle aufgeschaltet — denn die Aufgaben könnten in sehr ähnlicher Form im nächsten Test wieder vorkommen...

13.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 12+13 ◇

- (1) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 6}$. Der Graph ist symmetrisch zur y -Achse. Unter der Funktionskurve ist durch $(x_0; 0)$, $(x_0; f(x_0))$, $(-x_0; f(-x_0))$ und $(-x_0; 0)$ ein Rechteck bestimmt. Berechne x_0 , sodass der Rechtecksflächeninhalt maximal wird.
- (2) Es soll ein Zylinder hergestellt werden mit 1 Liter Inhalt und minimaler Oberfläche (minimaler Materialverbrauch). Berechne den Radius und die Höhe des Zylinders.
- (3) In eine Kugel mit dem Radius 1 wird ein Kegel eingeschrieben.
- (a) Berechne den Radius und die Höhe des Kegels, sodass das Kegelvolumen maximal wird.
 - (b) Berechne den Radius und die Höhe des Kegels, sodass die Kegeloberfläche maximal wird.
- (4) Um eine Kugel mit dem Radius 1 wird ein Kegel umschrieben.
- (a) Berechne den Radius und die Höhe des Kegels, sodass das Kegelvolumen minimal wird.
 - (b) Berechne den Radius und die Höhe des Kegels, sodass die Kegeloberfläche minimal wird.
- (5) $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$. f hat bei $x = -3$ ein Extremum. Bei $x = 3$ ist ein Pol vorhanden und $y = x + 12$ ist eine Asymptote. $f = ?$ Skizziere den Graphen.
- (6) $f(x) = ax^2$ und $y = \frac{1}{x}$ schneiden sich im 1. Quadranten rechtwinklig. Wie gross ist a ? Skizziere den Graphen.
- (7) Der Graph von $y = \frac{ax^2}{(x^2 + b)^2}$ geht durch $P_0(\sqrt{3}; 3)$. In P_0 ist eine waagrechte Tangente vorhanden. Berechne so weit wie möglich die fehlenden Parameter und skizziere den Graphen.

13.2 Link zu den Lösungen Phase 13

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA13.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA13.nb

Kapitel 14

Phase 14 (I/14)

- ⊗ Test (Anschliessend an die Übungen sind 2 Tests abgedruckt.)
- ⊗ Spezialprogramm!

Arbeiten

- ⊗ Nachbereitung des Tests: Konsultiere deinen auf den folgenden Seiten abgedruckten Test und bearbeite nochmals die fehlerhaft oder gar nicht gelösten Aufgaben.

14.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 14 ◇

Nachbereitung von Testaufgaben im Hinblick auf die Modulprüfung. Wichtig: Vor allem Aufgaben 2 und 3:

- (1) Berechne die nachfolgenden Ableitungen von Hand. (Die Herleitung wird bewertet, sofern das Resultat nicht unmittelbar sichtbar ist.) Vereinfache die folgenden Resultate so weit wie möglich. Es ist eine möglichst kurze Schreibweise anzustreben:

- (a) $f(x) = 100x^{100} + 10x^{10} + 5x^2 - 3x + 1$, $f'(x) = ?$
- (b) $f(x) = 100x^{100} + 10x^{10} + 5x^2 - 3x + 1$, $f'(1) = ?$
(Gemeint ist immer „erst ableiten, nachher einsetzen“.)
- (c) $f(x) = ax^a + 10x^{10} + 5x^2 - 3x + 1$, $a, x > 0$, $f'(a) = ?$
- (d) $f(x) = \cos(x) \cot(x)$, $f'(x) = ?$
- (e) $f(x) = \cos(x) \cot(x)$, $f'(\frac{\pi}{4}) = ?$
- (f) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$, $f'(x) = ?$
- (g) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$, $f'(\pi) = ?$
- (h) $f(x) = e^{2x^2-4x+5}$, $\arctan(f'(1)) = ?$ (Steigungswinkel!)

- (2) Diskutiere die nachfolgenden Funktionsgraphen.
(Falls vorhanden: Extrema, Wendepunkte, Asymptoten, Pole, grobe Abschätzung von Nullstellen, Definitionslücken, Skizze.)

- (a) $f(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)^2}$
- (b) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x-3)^2} + 1$
- (c) $f(x) = e^{x-x^2} \cdot x$
- (d) $f(x) = \sin(e^x)$, $D_f = [0, 2]$

- (3) Gegeben ist eine Kugel mit dem Radius $R = 2$.

- (a) Der Kugel wird ein Kreiskegel (Rotationskörper) eingeschrieben. Berechne die Kegelhöhe, für welche das Kegelvolumen maximal ist.
- (b) Der Kugel wird ein Kreiskegel (Rotationskörper) umschrieben. Berechne den Kegelradius, für welche das Kegelvolumen minimal ist.
- (c) Von $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ weiss man, dass der Graph bei $x = 4$ ein Extremum hat. Bei $x = 8$ ist ein Pol vorhanden. Zudem kennt man die Asymptote $y = 0.5x - 3$.
 - i. Berechne die unbekannten Parameter a, b, c, d .
 - ii. Berechne $f(0)$.

WIR1

14.2 Test

◇ E+M1 02 Analysis ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.

- (1) Berechne die nachfolgenden Ableitungen von Hand. (Die Herleitung wird bewertet, sofern das Resultat nicht unmittelbar sichtbar ist.) Vereinfache die folgenden Resultate so weit wie möglich. Es ist eine möglichst kurze Schreibweise anzustreben:

- (a) $f(x) = 100x^{100} + 10x^{10} + 5x^2 - 3x + 1$, $f'(x) = ?$
- (b) $f(x) = 100x^{100} + 10x^{10} + 5x^2 - 3x + 1$, $f'(1) = ?$
(Gemeint ist immer „erst ableiten, nachher einsetzen“.)
- (c) $f(x) = ax^a + 10x^{10} + 5x^2 - 3x + 1$, $a, x > 0$, $f'(a) = ?$
- (d) $f(x) = \cos(x) \cot(x)$, $f'(x) = ?$
- (e) $f(x) = \cos(x) \cot(x)$, $f'(\frac{\pi}{4}) = ?$
- (f) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$, $f'(x) = ?$
- (g) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$, $f'(\pi) = ?$
- (h) $f(x) = e^{2x^2-4x+5}$, $\arctan(f'(1)) = ?$ (Steigungswinkel!)

- (2) Diskutiere die nachfolgenden Funktionsgraphen.
(Falls vorhanden: Extrema, Wendepunkte, Asymptoten, Pole, grobe Abschätzung von Nullstellen, Definitionslücken, Skizze.)

- (a) $f(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)^2}$
- (b) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x-3)^2} + 1$
- (c) $f(x) = e^{x-x^2} \cdot x$
- (d) $f(x) = \sin(e^x)$, $D_f = [0, 2]$

- (3) Gegeben ist eine Kugel mit dem Radius $R = 2$.

- (a) Der Kugel wird ein Kreiskegel (Rotationskörper) eingeschrieben. Berechne die Kegelhöhe, für welche das Kegelvolumen maximal ist.
- (b) Der Kugel wird ein Kreiskegel (Rotationskörper) umschrieben. Berechne den Kegelradius, für welche das Kegelvolumen minimal ist.
- (c) Von $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ weiss man, dass der Graph bei $x = 4$ ein Extremum hat. Bei $x = 8$ ist ein Pol vorhanden. Zudem kennt man die Asymptote $y = 0.5x - 3$.
 - i. Berechne die unbekannten Parameter a, b, c, d .
 - ii. Berechne $f(0)$.

14.3 Test

◇ E+M1 02 Analysis ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.

- (1) Berechne die nachfolgenden Ableitungen von Hand. (Die Herleitung wird bewertet, sofern das Resultat nicht unmittelbar sichtbar ist.) Vereinfache die folgenden Resultate so weit wie möglich. Es ist eine möglichst kurze Schreibweise anzustreben:

- (a) $f(x) = (t+1)x^{101} + tx^{22} + (t-1)x^5 + t(x-1)$, $f'(x) = ?$ (t ist Parameter.)
- (b) $f(x) = (t+1)x^{101} + tx^{22} + (t-1)x^5 + t(x-1)$, $t = 1$, $f'(1) = ?$ (numerisch)
(Gemeint ist immer „erst ableiten, nachher einsetzen“.)
- (c) $f(x) = (a-1)x^{-a} + ax^a$, $a, x > 0$, $f'(a) = ?$ (vereinfachen!)
- (d) $f(x) = \sin(x) \ln(x)$, $f'(x) = ?$
- (e) $f(x) = \sin(x) \ln(x)$, $f'(\frac{\pi}{4}) = ?$ (numerisch)
- (f) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^3} + e^{\sin(x)}$, $f'(x) = ?$
- (g) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^3} + e^{\sin(x)}$, $f'(\pi) = ?$ (numerisch)
- (h) $f(x) = e^{3x^3-2x+1}$, $\arctan(f'(1)) = ?$ (numerisch, Steigungswinkel!)

- (2) Berechne für die nachfolgenden Funktionsgraphen die erste und die zweite Ableitung und daraus die x -Stellen der allfälligen Extrema und Wendepunkte:

- (a) $f(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)}$
- (b) $f(x) = \frac{\sin(x)(x-3)}{x(x-4)^2} + 1$ (nur 1. positives Extremum)
- (c) $f(x) = e^{-(x+3)^2}$
- (d) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$, $D_f = [0, 4\pi^2]$

- (3) Berechne für die nachfolgenden Funktionsgraphen jeweils $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, falls der Grenzwert existiert.

- (a) $f(x) = \frac{2(x-3)(x-2)}{(2x-4)^2}$
- (b) $f(x) = \frac{\sin(x)(x-3)}{x(x-4)^2} + 1$
- (c) $f(x) = e^{-x^2+2x} \cdot x + \frac{\cos(x)+1}{x}$
- (d) $f(x) = \sin(e^{-x} + \frac{1}{x})$

- (4) (a) Wir betrachten die Figur, welche durch die x -Achse (Gerade g_x), die Funktionskurve von $y = f(x) = \sin(x)$ sowie die Senkrechte zur x -Achse durch $x = \frac{\pi}{2}$ (Gerade g_y) gebildet wird.
- i. In die durch g_x , g_y und f begrenzte Fläche wird ein achsenparalleles Rechteck gelegt und über diesem Rechteck ein Quader der Höhe „Länge plus Breite“ errichtet. Mache dir von dieser Situation eine Skizze.
Berechne die Länge und die Breite dieses Quaders, wenn sein Volumeninhalt maximal sein muss.
 - ii. Um die durch g_x , g_y und f begrenzte Fläche wird ein achsenparalleles Dreieck gelegt, welches mit der Hypothenuse die Sinuslinie berührt. Mache dir von dieser Situation eine Skizze.
Berechne die Länge dieses Dreiecks (Länge der Seite auf der x -Achse), wenn sein Flächeninhalt minimal sein muss.
- (b) Zwischen den Graphen von $f(x) = -x^{2^n} + 2$, $n \in \mathbb{N}$, und die x -Achse wird ein achsenparalleles Rechteck gelegt. Berechne die Länge und die Breite dieses Rechtecks in Abhängigkeit von n , wenn der Umfang des Rechtecks maximal sein muss.

14.4 Link zu den Lösungen Phase 14

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA14.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA14.nb

Lösungen zum ersten auf den vorhergehenden Seiten abgedruckten Test:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/TEM1Ana05_02.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/TEM1Ana05_02.nb

Lösungen zum zweiten auf den vorhergehenden Seiten abgedruckten Test:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/TEM1Ana06_7_02.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/TEM1Ana06_7_02.nb

Kapitel 15

Phase 15 (I/15)

⊙ Approximationen von Funktionen, Potenzreihen, Taylorreihen

- Das Konzept der Approximation
- Das Restglied
- Beispiele, Demonstration der Genauigkeit

Arbeiten

⊙ **Übungen:** Löse soweit wie möglich

- Übungen siehe nächste Seite!
- http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA15.pdf (Lösungen)
- Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA15.nb

15.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 15 ◇

-
- (1) Die Funktion $f(x) = \ln(x) - \frac{x}{10}$ hat zwei Nullstellen (ca. 1.11833 und ca. 35.7715). Approximiere die Nullstellen dieser Funktion ausgehend von $x_1 = 1$ und dann auch von $x_2 = 36$. Notiere die Anzahl Iterationsschritte welche es braucht, um eine Genauigkeit von 5 Stellen hinter dem Komma zu erhalten, falls dies möglich ist.
- (a) Zeichne den Graphen und lese die Nullstellen ab. Mögliche Genauigkeit?
 - (b) Bisektionsverfahren. (Wenn möglich mit einem eigenen Programm.)
 - (c) Regula falsi.
 - (d) Newton-Verfahren.
 - (e) Erweitertes Fixpunktverfahren.
- (2) Dieselbe Aufgabe wie oben mit $E^x - x^2$. (Nullstelle ca. -0.703467.)

15.2 Link zu den Lösungen Phase 15

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA15.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA15.nb

Kapitel 16

Phase 16 (I/16)

- ⊗ Approximationen von Funktionen, Potenzreihen, Taylorreihen
 - Vergleich mit Majoranten (geometrische Reihe)
 - Diverse Reihen: Geometrische, harmonische, alternierende Reihe
 - Beispiele
 - Konvergenzintervall, Konvergenzradius
 - Rechnen mit Taylorreihen: Addition, Subtraktion, Differentiation etc.
 - Beispiele

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die nachfolgenden Übungen abschliessend, falls schon begonnen!
 - http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA16.pdf (Lösungen)
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA16.nb

16.1 Übungen in Analysis

◇ E+M I / 16 ◇

(1) Entwickle die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe bis $n = 15$:

- (a) $f_1(x) = e^x$ und $x_0 = 0$.
- (b) $f_2(x) = e^{x^2}$ und $x_0 = 0$.
(Hinweis: Nimm die Reihe von $f_1(x) = e^x$ und ersetze x durch x^2 .)
- (c) $f_3(x) = e^{-x^2}$ und $x_0 = 0$.
(Hinweis: Nimm die Reihe von $f_1(x) = e^x$ und ersetze x durch $-(x^2)$.)
- (d) $f_4(x) = x \cdot e^{x^2}$ und $x_0 = 0$.
(Hinweis: Nimm die Reihe von $f_2(x) = e^{x^2}$ und verrechne sie geeignet mit x .)
- (e) $f_5(x) = \sin(x) + \cos(x)$ und $x_0 = 0$.
(Hinweis: Entwickle erst $f_s(x) = \sin(x)$ und $f_c(x) = \cos(x)$. Diese beiden Reihen kann man gliedweise addieren.)
- (f) $f_6(x) = \ln(x)$ und $x_0 = 1$.
- (g) $f_7(x) = \cosh(x)$ und $x_0 = 0$.
(Hinweis: Verwende die Reihen von $f_1(x) = e^x$ und von $f_m(x) = e^{-x}$.)
- (h) $f_8(x) = \sinh(x)$ und $x_0 = 0$.
(Hinweis: Verwende die Reihen von $f_7(x) = \cosh(x)$ und differenziere gliedweise.)

(2) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihen folgender Funktionen:

- (a) $f_1(x) = e^x$ und $x_0 = 0$.
- (b) $f_2(x) = e^{x^2}$ und $x_0 = 0$.
- (c) $f_3(x) = e^{-x^2}$ und $x_0 = 0$.
- (d) $f_4(x) = x \cdot e^{-x^2}$
- (e) $f_5(x) = \sin(x) + \cos(x)$ und $x_0 = 0$.
- (f) $f_6(x) = \ln(x)$ und $x_0 = 1$.
- (g) $f_7(x) = \cosh(x)$ und $x_0 = 0$.
- (h) $f_8(x) = \sinh(x)$ und $x_0 = 0$.

- (3) (a) Wie weit muss man $h_1(x) = \sin(x)$ um $x_0 = 0$ entwickeln, bis der Fehler in $x_1 = 2$ weniger als 0.001 beträgt?
- (b) Approximiere $h_2(x) = 7x e^{0.5(x-2)}$ durch $p_2(x)$ quadratisch und berechne den Fehler $|p_2(x) - h_2(x)|$ für $x = 2, 3, 4, 8, 16$, $x_0 = 0$.

- (4) Berechne mit Hilfe der Theorie der geometrischen Reihen die Grenzwerte der folgenden Ausdrücke:

(a) $S_{\infty} = 3 \left(1 + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \dots \right) .$

(b) $S_{\infty} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \dots$

(c) $S_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$

- (5) Informiere dich in der Literatur über den Begriff „Sierpinski–Teppich“. Gegeben sei nun ein quadratischer „Sierpinski–Teppich“ mit der Seitenlänge $s = 1$. Berechne seinen verbleibenden Flächeninhalt, wenn alle vorgesehenen Löcher herausgeschnitten sind.

16.2 Link zu den Lösungen Phase 16

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA16.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMA16.nb

Weiter: Analysis 2. Semester

Kapitel 17

Phase 17 (II/1)

Analysis 2. Semester

⊙ Integralrechnung:

- Bestimmtes Integral
- Ober-, Unter- und Zwischensummen, Riemannsche Summen, Konvergenz (Beispiel monoton und stetig..., stückweise stetig, endliche Oszillation, negative Funktionen...)
- Quadratur der Parabel
- Übungen, Beispiele
- Intervallteilungen, Verfeinerungen
- Riemannsches Integral: Definition
- Integration durch Summierung (Grenzwert)
- Regeln und Mittelwertsatz
- Stammfunktion
- Hauptsatz der Infinitesimalrechnung: Rückführung der Integration auf die Berechnung der Stammfunktion
- Linearität
- Beispiele
- Beispiel Teilung des Rechtecks bei Potenzfunktionen
- Beispiele uneigentliche Integrale, Flächen mit endlichen Inhalten und unendlich langen monotonen Begrenzungen
- Beispiele, bei denen keine bekannte Stammfunktion berechnet werden kann: Integration der Potenzreihe (z.B. $f(x) = e^{(x^2)}$)

Arbeiten

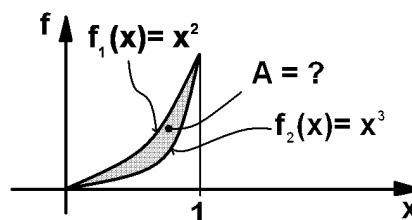
⊙ **Übungen:** Löse die nachfolgenden Übungen fertig!

- **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_01.pdf
- Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_01.nb

17.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 01 ◇

- (1) Berechne den Flächeninhalt zwischen der Kurve $f(x) = x^2$ und der x -Achse über dem Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe eines Grenzwertes von Obersummen oder Untersummen und mit Hilfe eines Computers.
Vergleiche das Resultat mit dem bekannten Resultat (mittels der Stammfunktion, vgl. Vorlesung)
- (2) Berechne den Flächeninhalt zwischen der Kurve $f(x) = e^{-x^2}$ und der x -Achse über dem Intervall $[-2, 2]$:
- (a) Mit Hilfe von Obersummen oder Untersummen und mit Hilfe eines Computers.
 - (b) Mit Hilfe einer Potenzreihe und mit Hilfe eines Computers.
- (3) Berechne die Stammfunktionen:
- (a) $f(x) = x^{100} - x^{99}$
 - (b) $f(x) = e^{-x} - \cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x) - \frac{1}{x^2}$
 - (c) $f(x) = \cosh(x) - \sinh(x)$
 - (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
 - (e) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ (*Hinweis: Zerlege den Bruch zuerst in zwei einfachere Brüche!*)
- (4) Berechne den in der Skizze angegebenen Flächeninhalt:



Fortsetzung Rückseite %

(5) (a) $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$

$$F(x) = ?, \quad \int_1^2 f(x) dx ?$$

(b) $f(x) = \cosh(x)$

$$F(x) = ?, \quad \int_{-1}^1 f(x) dx ?$$

(c) $f(x) = -8x^3 + 4x^2 - 3x + 1 - \frac{2}{x}$

$$F(x) = ?, \quad \int_2^1 f(x) dx ?$$

(d) $f(x) = \sin^2(4x - 7) + \cos^2(4x - 7)$

$$F(x) = ?, \quad \int_1^2 f(x) dx ?$$

(e) $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$$F(x) = ?, \quad \int_0^1 f(x) dx ?$$

(f) $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$

$$F(x) = ?, \quad \int_1^2 f(x) dx ?$$

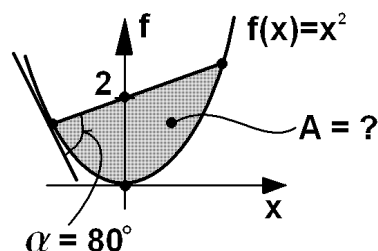
(g) $f(x) = e^{4x-3} - 2 \frac{\ln(4x+3)}{x + \frac{3}{4}}$

$$F(x) = ?, \quad \int_1^4 f(x) dx ?$$

(h) $f(x) = \frac{1}{2x-3} - 10x^{20} + x^{40}$

$$F(x) = ?, \quad \int_1^2 f(x) dx ?$$

(6) Berechne den Inhalt der in der Figur gezeigten Fläche.



(7) (a) $\int_3^t x^5 dx = F(t)$ $F(t) = 10 \Rightarrow t = ?$

(b) $\int_4^6 \frac{1}{2x+1} dx = ?$

(c) $\int_0^\pi x^2 \cdot \sin(x) dx = ?$

(d) $\int_2^4 \frac{1}{4x^2-1} dx = ?$

(e) $\int_{-4}^4 x^5 \cos(x) dx = ?$

(f) $\int x^2 \cos(4x^3 + 5) dx = ?$

(g) $\int_0^\pi \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx = ?$

17.2 Link zu den Lösungen Phase 17

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_01.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_01.nb

Kapitel 18

Phase 18 (II/2)

- ⊗ Ungleichungen mit Integralen, Schwarz'sche Ungleichung
- ⊗ Prinzip von Cavalieri, Beispiel
- ⊗ Integrationstechnik: Partielle Integration
 - Beispiele
- ⊗ Substitutionsregel als Umkehrung der Kettenregel der Differentialrechnung
 - Beispiele
- ⊗ Integration von $\frac{f'}{f}$
 - Beispiele

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_02.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_02.nb

18.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 02 ◇

(1) Berechne die folgende Integrale von Hand (partielle Integration):

(a) $\int x^2 \cos(x) dx$

(b) $\int \sin(2x) \cos\left(\frac{1}{2}x\right) dx$

(c) $\int_1^2 \ln(2x) dx$

(d) $\int_0^1 x^3 e^x dx$

(e) $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx$

(2) Berechne die folgende Integrale von Hand (Substitution):

(a) $\int x \sqrt{x^2 - 4} dx$

(b) $\int \cos^5(x) \sin(x) dx$

(c) $\int_0^1 x \sqrt{1 + x^2} dx$

(d) $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

(e) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} dx$

(3) Verifiziere die Formel $\frac{\sin^4(ab)}{4a^2} \leq \frac{b^2}{4} - \frac{\sin^2(2ab)}{16a^2}$ durch Anwendung der Schwarz'schen Ungleichung für die Ausdrücke $\left(\int_0^b \cos(ax) \sin(ax) dx\right)^2$, $\int_0^b \cos^2(ax) dx$ und $\int_0^b \sin^2(ax) dx$

(4) Berechne die folgende Integrale von Hand ($\frac{f'(x)}{f(x)}$):

(a) $\int \frac{x^2}{x^3 - 7} dx$

(b) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 7} dx$

(c) $\int \frac{2 \cos 2x + 4x + e^{-x}}{\sin 2x + 2x^2 - e^{-x} + 4} dx$

(d) $\int \cot(x) dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

(5) Berechne die folgende Integrale von Hand (Partialbruchzerlegung):

(a) $\int \frac{1}{x(x-1)} dx$

(b) $\int \frac{x^4 - 16x - 3}{(x^2 + 1)(x-1)^2(x+2)} dx$

(c) $\int \frac{x^4 - 16x - 3}{(x^2 + 1)(x-1)^2} dx$

(d) $\int -\frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x^2 + 3x + 3)} dx$

(e) $\int \frac{90x^3 - 76x^2 - 25x + 19}{(2x-1)(3x+1)(5x-3)} dx$

18.2 Link zu den Lösungen Phase 18

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_02.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_02.nb

Kapitel 19

Phase 19 (II/3)

- ⊗ Integration von gebrochen rationalen Funktionen
 - Partialbruchzerlegung
 - Beispiele, Übung
- ⊗ Integration in Polarkoordinaten
- ⊗ Länge einer Kurve (2D, 3D, u.s.w.)
- ⊗ Linienintegrale
 - Funktionen
 - Vektorfunktionen
- ⊗ Volumen eines Rotationskörpers
- ⊗ Oberfläche eines Rotationskörpers
- ⊗ Beispiele, Übungen
- ⊗ Stoff um das Thema „Momente“, siehe Wikipedia

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_03.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_03.nb

19.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 03 ◇

(1) Berechne die Längen der Kurven und skizziere die Kurven:

(a) $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$

(b) $f(x) = e^x$, $x \in [0, 100]$

(c) $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, 2\pi]$

(2) Berechne die Flächeninhalte unter den folgenden Kurven in Polaarkordianten und skizziere die Kurven:

(a) $r(\varphi) = e^\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

(b) $r(\varphi) = \ln(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

(c) $r(\varphi) = \frac{1}{1 + \varphi^2}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(3) Berechne die Längen der Kurven in Polaarkordianten:

(a) $r(\varphi) = e^\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

(b) $r(\varphi) = \ln(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

(c) $r(\varphi) = \frac{1}{1 + \varphi^2}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(4) Die folgenden Kurven werden um die x -Achse rotiert. Berechne den Volumeninhalt der entstehenden Rotationskörper:

(a) $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$

(b) $f(x) = e^x$, $x \in [0, 100]$

(c) $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, 1\pi]$

(5) Die folgenden Kurven werden um die x -Achse rotiert. Berechne den Oberflächeninhalt der entstehenden Rotationskörper:

(a) $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$

(b) $f(x) = e^x$, $x \in [0, 100]$

(c) $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, 1\pi]$

- (6) (a) Gegeben ist die Kurve $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$, $t \in I = [-1, 1]$ sowie die Funktion $f(x, y) = x^2 - x y - y^2$. Berechne das Linienintegral $\int_I f(x, y) ds$
- (b) Gegeben ist die Kurve $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in I = [0, 2\pi]$ sowie die Funktion $f(x, y, z) = \cos(x^2) + y \cdot z$. Berechne das Linienintegral $\int_I f(x, y) ds$
- (c) Gegeben ist die Kurve $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in I = [0, 4]$ sowie die Vektorfunktion (Vektorfeld) $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ z - x \end{pmatrix}$. Berechne das Linienintegral $\int_I f(x, y) d\vec{s}$
- (d) Gegeben ist die Kurve $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in I = [0, 2\pi]$ sowie die Vektorfunktion (Vektorfeld) $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(x^2) \\ y \cdot z \\ x \end{pmatrix}$. Berechne das Linienintegral $\oint_I f(x, y) d\vec{s}$

19.2 Link zu den Lösungen Phase 19

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_03.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_03.nb

Kapitel 20

Phase 20 (II/4)

- ⊗ Wikipedia: Mathematikthemen (Momente zu diversen Graden)
- ⊗ Bedeutung des Trägheitsmoment bei der Kreisbewegung wie die Masse bei der gewöhnlichen Bewegung
- ⊗ Berechnung des Trägheitsmoments
- ⊗ Trägheitsmomente und Flächenmomente (Selbststudium)
- ⊗ Numerische Methoden: Rechtecksmethode, Trapezmethode, Simpson, Polynommethode, Verwendung der Potenzreihe
- ⊗ Funktionen mit mehreren Variablen
 - Beispiele
 - Definitionsbereiche, Gebiete, Rand u.s.w.
 - Stetigkeit
 - Plots: 3D, Höhenlinienkarten

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_04.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_04.nb

20.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 04 ◇

- (1) Berechne numerisch das Integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2} dx$ bei derselben Anzahl n Teilintervallen mit folgenden Methoden:
- (a) Rechtecksmethode
 - (b) Trapezmethode
 - (c) Simpson
 - (d) Vergleiche das Resultat mit dem Resultat der Potenzreihenmethode bei demselben n .
 - (e) Vergleiche das Resultat mit dem Resultat der Polynommethode bei demselben n , wobei das Polynom z.B. über dem Intervall $[-6, 6]$ berechnet wird.
- (2) Stelle 3D-Plots sowie Höhenlinienkarten der folgenden Funktionen her (Darstellungen jeweils geeignet wählen und variieren):
- (a) $f(x, y) = \sin(x \cdot y)$
 - (b) $f(x, y) = \sin(x + y)$
 - (c) $f(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$
 - (d) $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$
 - (e) $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$
 - (f) $f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$
 - (g) $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 - y^2}$
 - (h) $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 - y^2 + 2}$
 - (i) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$
 - (j) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
 - (k) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$
 - (l) $f(x, y) = \arcsin(\sin(y)) \cdot \arctan(\tan(x))$
 - (m) $f(x, y) = \arcsin(\sin(y)) + \arctan(\tan(x))$
 - (n) $f(x, y) = \arcsin(\sin(y)) - \frac{\sin(x)}{\sqrt{1.0001 - \cos^2(x)}}$
 - (o) $f(x, y) = -\frac{\arcsin(\sin(y)) \sin(x)}{\sqrt{1.0001 - \cos^2(x)}}$
 - (p) $f(x, y) = x^2 + y^2$
 - (q) $f(x, y) = x \cdot y$

$$(r) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - x \cdot y$$

$$(s) \quad f(x, y) = \frac{x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(t) \quad f(x, y) = \frac{50}{3(x-1)^2 + 5(y+1)^2 + 10} + \frac{70}{2(x+1)^2 + 10(y-2)^2 + 10}$$

$$(u) \quad f(x, y) = \frac{70 \left(\cos \left(\frac{k\pi}{20} \right) + 1 \right)}{2(x+1)^2 + 10(y-2)^2 + 10} + \frac{50 \left(\sin \left(\frac{k\pi}{20} \right) + 1 \right)}{3(x-1)^2 + 5(y+1)^2 + 10}, \quad k \text{ geeignet gewählt.}$$

$$(v) \quad f(x, y) = e^{-x^2} \left(1 - \frac{y^2}{5} \right) \cos \left(\frac{x}{5} \right)$$

$$(w) \quad f(x, y) = e^{-x^2} \left(2 - \frac{1}{2}(y-3)^2 \right) \cos \left(\frac{x}{5} \right)$$

$$(x) \quad f(x, y) = 1 - e^{-x^2} \cos \left(\frac{x}{5} \right)$$

$$(y) \quad f(x, y) = -\sin \left(\frac{1}{x^2 + 1} - xy^2 \right)$$

Variiere die obigen Beispiele! (*Lösungen unter CM30.nb*)

- (3)** Stelle 3D-Plots sowie Höhenlinienkarten der folgenden Funktionen her (Darstellungen jeweils geeignet wählen und variieren):

$$(a) \quad f(x, y) = [x] + [y]$$

$$(b) \quad f(x, y) = [x] - [y]$$

$$(c) \quad f(x, y) = [x] \cdot [y]$$

$$(d) \quad f(x, y) = [x] + [y]^2$$

$$(e) \quad f(x, y) = [5 \sin(x) \cdot \sin(y)]$$

Variiere die obigen Beispiele! (*Lösungen unter CM30.nb*)

20.2 Link zu den Lösungen Phase 20

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_04.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_04.nb

Kapitel 21

Phase 21 (II/5)

- ⊗ Nochmals Stetigkeit: Regeln für die Zusammensetzung stetiger Funktionen
- ⊗ Eigenschaften stetiger Funktionen und Kriterien für die Stetigkeit
- ⊗ Partielle Ableitung, höhere partielle Ableitung, Symbolik
- ⊗ Gradient, Dimension des Urbildraumes
- ⊗ Richtungsableitung
- ⊗ Berechnung der Richtungsableitung aus dem Gradienten und dem Richtungseinheitsvektor
- ⊗ Bedeutung des Gradienten: Richtung der stärksten Höhenzunahme, senkrecht auf dem Tangentialvektor zur Höhenlinie

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_05.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_05.nb

21.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 05 ◇

- (1) Untersuche die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D_f \mapsto W_f \subseteq \mathbb{R}$ auf Stetigkeit. Fertige dir dazu die Graphen an. Betrachte jeweils auch eine analoge Situation $h : \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}$. (Aus den Graphen kann man leicht die Unstetigkeitsstellen ermitteln: Sprungstellen, Sprunglinien, Bereiche wo die Funktion nicht definiert ist...)

(a) $h_1(x) = \arcsin(\sin(x))$, $f_1(x, y) = \arcsin(\sin(x + y))$

(b) $h_2(x) = \arcsin((\sin(x))^2)$, $f_2(x, y) = \arcsin((\sin(xy))^2)$

(c) $h_3(x) = \arctan(\tan(x))$, $f_3(x, y) = \arctan(\tan(xy))$

(d) $h_4(x) = \sqrt{\cos(x)}$, $f_4(x, y) = \sqrt{\cos(x - y)}$

(e) $h_5(x) = \sin(e^{x-x^2})$, $f_5(x, y) = \sin(e^{x-y^2})$

(f) $h_6(x) = \frac{1}{1 - \cos^2(x)}$, $f_6(x, y) = \frac{1}{1 - \cos(x) \cos(y)}$

- (2) Ermittle jeweils den Gradienten!

(a) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

(b) $f(x, y) = e^{\cos(1-x^2-y^2)}$

- i. Skizziere hier auch das Gradientenfeld (d.h. skizziere in möglichst vielen Punkten der Ebene den Gradienten).
- ii. Skizziere hier auch die Funktionsfläche.
- iii. Skizziere ebenfalls die Höhenlinienkarte der Funktion.
- iv. Versuche, das Gradientenfeld und die Funktionsfläche in einem Graphen zu zeigen.

- (3) Berechne von der Funktion $f(x, y) = e^{\cos(1-x^2-y^2)}$ folgende Dinge:

- (a) Den Gradienten und die Richtungsableitung im Punkte $P_0(1, 1)$.
- (b) Die Richtungsableitung $r(t)$ in den Punkten $P(t, t)$.
- (c) Skizziere $r(t)$ als Funktion von t .

- (4) Berechne von der Funktion $f(x, y) = e^{\cos(1-x^2-y^2)}$ folgende Dinge:

- (a) Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte $P_0(1, 1)$.
- (b) Skizziere diese Tangentialebene an die Funktionsfläche.

- (5) Gegeben ist die Gleichung aus der geometrischen Optik

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Für die Messwerte $f = 7 \text{ cm} \pm 0.2 \text{ cm}$, $g = 21.5 \text{ cm} \pm 0.4 \text{ cm}$ soll $b \pm \Delta b$ ermittelt werden.

WIR1

21.2 Link zu den Lösungen Phase 21

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_05.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_05.nb

Kapitel 22

Phase 22 (II/6)

- ⊗ Tangentialebene, Beispiel
- ⊗ Regeln für Differentiale, Kettenregel
- ⊗ Verpflanzung von Operatoren
- ⊗ Extrema
- ⊗ Extrema mit Nebenbedingungen, Lagrange
- ⊗ Beispiele

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_06.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_04.nb

22.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 06 ◇

(1) Schreibe $|\text{grad}(f(x, y))|^2$ in Polarkoordinaten!

(2) Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 1 - x^2 - 2(y + 1)^2.$$

- (a) Berechne die Lage allfälliger Extrema.
- (b) Berechne die Richtungsableitung im Punkte $P = (0, 2)$ in die Richtung eines Vektors, der aus $\vec{e}_1$ durch Drehung in positiver Richtung um 30° entstanden ist.
- (c) Berechne den Steigungswinkel der Tangente im Punkte P_0 .
- (d) Berechne den maximalen Steigungswinkel der Tangente in P_0 .
- (e) Berechne eine Gleichung der Tangentialebene Φ in diesem Punkte und daraus die Schnittpunkt von Φ mit der x -Achse.
- (f) Durch $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(t-1)(t+2)-2 \\ t \end{pmatrix}$ ist in der Grundebene eine Kurve definiert. Über dieser Kurve ist auf der Funktionsfläche die Spur $|\gamma|$ eines Weges γ definiert. Skizziere die Funktionsfläche und $|\gamma|$ sowie eine Höhenlinienkarte.
- (g) Berechne den maximalen Punkt auf $|\gamma|$.
- (h) Berechne die totale Ableitung von $f(x(t), y(t))$ nach t .

(3) Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \frac{10}{3(x-1)^2 + 5(y+1)^2 + 10} + \frac{14}{2(x+1)^2 + 5(y-2)^2 + 10}.$$

- (a) Skizziere den Graphen und ebenfalls die Höhenlinienkarte der Funktion.
- (b) Berechne die Lage allfälliger Extrema.
- (c) Berechne die Richtungsableitung im Punkte $P_0 = (0, 2)$ in die Richtung eines Vektors, der aus $\vec{e}_1$ durch Drehung in positiver Richtung um 30° entstanden ist.
- (d)
 - i. Berechne in P_0 die Tangentialebene und den Durchstosspunkt der z -Achse durch diese Ebene.
 - ii. Berechne den grössten Neigungswinkel dieser Ebene.
 - iii. Berechne die Lage desjenigen Punktes, über dem die Funktion $f(x, y)$ den grössten Wert auf dem Weg annimmt, der über der Kurve $g(x, y) = y - x^2 = 0$ definiert ist.

% Rückseite

- (4) (a) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n -ten Glied:
 $f_1(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 8$. Dabei soll die Potenzreihenentwicklungen von e^x verwendet werden. (Das Vorgehen muss gut sichtbar gezeigt werden.)
- (b) Berechne approximativ mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung bis zum n -ten Glied:
 $\int_{-2}^2 f_1(x) dx = ?$
 i. für $n = 8$,
 ii. für $n = 100$.
 iii. Vergleiche die Ergebnisse mit dem Taschenrechnerresultat bei numerischer Integration.
- (c) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n -ten Glied:
 $f_2(x) = \cos(x^2) + e^{x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 8$. Dabei sollen die Potenzreihenentwicklungen von e^x sowie von $\cos(x)$ verwendet werden. (Das Vorgehen muss sichtbar sein.)
- (d) Berechne von Hand die Potenzreihenentwicklungen bis zum n -ten Glied:
 $f_3(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $n = 6$.
- (e) Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe von $f_3(x)$, $x_0 = 1$
- (f) Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe von $f_4(x) = \ln(x) - \sin(x)$, $x_0 = 1$.
 (Es darf hier auch ein Plausibilitätsargument verwendet werden.)
- (g) Berechne den Grenzwert von Hand: $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{16} + \frac{1}{81} \pm \dots$
- (h) Berechne $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} - \ln(n) \right)$.

22.2 Link zu den Lösungen Phase 22

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_06.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_06.nb

Kapitel 23

Phase 23 (II/7)

- ⊗ Beispiele und Anwendungen (Lagrange u.s.w.)
- ⊗ Approximation von Nullstellen bei mehreren Variablen
- ⊗ Integration von Funktionen mit mehreren Veränderlichen und von Integralen: Doppelintegrale
- ⊗ Doppelintegrale und Volumenberechnungen über beliebigen Gebieten.
- ⊗ Prüfungsvorbereitung: Prüfungsthemen
- ⊗ Ausgleichsgerade (Regressionsgerade)

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_07.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_07.nb

23.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 07 ◇

(1) Berechne $\int_0^1 \int_1^2 \int_{-1}^0 x \cdot y \sin(z) + y^2 - x \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_{-1}^0 (x \cdot y \sin(z) + y^2 - x) \, dx \right) dy \right) dz$

(2) Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = -x + x(y + 1)^2.$$

(a) Berechne die Stammfunktion bezüglich der Variablen x und anschliessend y (Reihenfolge wegen den Integrationskonstanten beachten!).

(b) Berechne das Integral $\int_0^1 \int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy$.

(3) Gegeben ist das Gleichungssystem
$$\begin{cases} \sin(xy) + \sin(x) - 0.3 = 0 \\ \sin(xy) + \sin(y) - 0.3 = 0 \end{cases}$$

(a) Löse das Gleichungssystem numerisch. (Suche die nächste beim Ursprung gelegene Lösung im 1. Quadranten.)

(b) Stelle die beiden links im System gegebenen Funktionen graphisch dar.

(4) Gegeben sind die Messwerte $P_1(0, 1.0)$, $P_2(1, 1.5)$, $P_3(2, 2.2)$, $P_4(3, 2.8)$, $P_5(4, 3.2)$.

(a) Suche die beste Ausgleichsgerade nach der Methode der kleinsten Quadrate.

(b) Stelle das Ergebnis graphisch dar.

23.2 Link zu den Lösungen Phase 23

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_07.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_07.nb

Kapitel 24

Phase 24 (II/8)

- ⊗ Test
- ⊗ Ableitung von Integralen nach einer anderen Variablen bei konstanten und variablen Grenzen
- ⊗ Beispiele
- ⊗ Mehrfachintegrale; Riemannsche Summen und Probleme (Gebietszerlegung, Beschaffenheit der Ränder Rand)
- ⊗ Stetige Funktionen über abgeschlossenen Gebieten mit vernünftigem Rand sind integrierbar
- ⊗ Gebietsintegrale, Volumenintegrale, Volumenberechnung
- ⊗ Regeln für die Integrierbarkeit
- ⊗ Stundenausfall wegen Auffahrt

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_08.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_08.nb
- ⊗ **Test:** Korrigiere die Prüfung (Testaufgaben auf der nächsten Seite) fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/TEM1Ana06_7_03.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/TEM1Ana06_7_03.nb

24.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 08 ◇

Nachbearbeitung des Tests:

(1) Zeige die Berechnungen der Lösungen **von Hand**. Erkläre kurz die Schritte:

$$(a) \quad f(x) = 4x^4 + 5x^5 - 6x^6 + x^0 - \frac{2}{x^2}$$

$$\text{i.} \quad \int f(x) \, dx = ?$$

$$\text{ii.} \quad \int_1^2 f(x) \, dx = ?$$

$$\text{iii.} \quad \int_{x=-1}^{x=1} f(x) \, dx = ?$$

$$\text{iv.} \quad \frac{d}{dt} \left(\int_{x=0}^{x=t} f'(x) + 1 \, dx \right) = ?$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{1}{(\sin(\frac{x}{3}) - 3)^2}$$

$$\text{i.} \quad \int f(x) \, dx = ?$$

$$\text{ii.} \quad \int_{t=1}^{t=u} \frac{d}{dt} \int_2^t f(x) \, dx = ?$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{1}{x(x+2)(x-2)}$$

$$\text{i.} \quad \int_3^5 f(x) \, dx = ?$$

$$\text{ii.} \quad \int_3^\infty f(x) \, dx = ?$$

$$(d) \quad f(x) = 7\ln(x) - \frac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}}$$

$$\text{i.} \quad \int_1^e f(x) \, dx = ?$$

$$(e) \quad f(x) = x \cdot (\ln(x))^2 + x$$

$$\text{i.} \quad \int f(x) \, dx = ?$$

$$\text{ii.} \quad \int_{x=t}^{x=2t} f(x) \, dx = ?$$

- (2) (a) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n -ten Glied:
 $f(x) = \sin(2x)$, $x_0 = 2\pi$, $n = 8$. Dabei kann die Potenzreihenentwicklungen von $\sin(x)$ verwendet werden. Die Potenzen von $2\pi - x$ sollen nicht ausmultipliziert werden. (Das Vorgehen muss gut sichtbar gezeigt werden.)
- (b) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n -ten Glied:
 $f_1(x) = \cos(x^2) + e^{-x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 8$. Dabei kann die Potenzreihenentwicklungen von e^x und von $\cos(x)$ verwendet werden. (Das Vorgehen muss gut sichtbar gezeigt werden.)
- (c) Berechne approximativ mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung bis zum n -ten Glied:
 $\int_{-2}^2 f_1(x) dx = ?$ ($n = 8$). Vergleiche das Resultat mit dem numerisch besseren Resultat des Integrals aus dem Rechner und mit dem Resultat für $n = 100$.
- (d) Ermittle den Konvergenzradius der Potenzreihen von $f_1(x)$.
- (3) $f(x, y) = \sin(xy) + \sin(x)$, $D_f = \{(x, y) \mid x \in [0, \pi], y \in [-\pi, \pi]\}$
- (a) Skizziere die Funktion (3D) und skizziere die Höhenlinienkarte.
- (b) Ermittle die Punkte, in denen f ein Maximum oder ein Minimum annimmt.
- (c) Berechne die Richtungsableitung im Punkte $(1, 1)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- (d) Berechne aus dem vorhin gewonnenen Resultat die Tangentensteigung im Punkte $(1, 1)$. Zeichne die Tangente in die Skizze ein.
- (e) Über der Kurve $g(x, y) = y^2 - x = 0$ wird auf der Funktionsfläche ein Weg definiert. Berechne im angegebenen Definitionsbereich Punkte, in denen die Funktion maximale und minimale Werte annimmt.

24.2 Test

◇ E+M1 02 Analysis ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.

(1)

(22 Punkte)

Zeige die Berechnungen der Lösungen **von Hand**. Erkläre kurz die Schritte:

(a) $f(x) = 4x^4 + 5x^5 - 6x^6 + x^0 - \frac{2}{x^2}$

i. $\int f(x) dx = ?$

ii. $\int_1^2 f(x) dx = ?$

iii. $\int_{x=-1}^{x=1} f(x) dx = ?$

iv. $\frac{d}{dt} \left(\int_{x=0}^{x=t} f'(x) + 1 dx \right) = ?$

(b) $f(x) = \frac{1}{(\sin(\frac{x}{3}) - 3)^2}$

i. $\int f(x) dx = ?$

ii. $\int_{t=1}^{t=u} \frac{d}{dt} \int_2^t f(x) dx = ?$

(c) $f(x) = \frac{1}{x(x+2)(x-2)}$

i. $\int_3^5 f(x) dx = ?$

ii. $\int_3^\infty f(x) dx = ?$

(d) $f(x) = 7\ln(x) - \frac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}}$

i. $\int_1^e f(x) dx = ?$

(e) $f(x) = x \cdot (\ln(x))^2 + x$

i. $\int f(x) dx = ?$

ii. $\int_{x=t}^{x=2t} f(x) dx = ?$

(2)

(12 Punkte)

- (a) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n -ten Glied:
 $f(x) = \sin(2x)$, $x_0 = 2\pi$, $n = 8$. Dabei kann die Potenzreihenentwicklungen von $\sin(x)$ verwendet werden. Die Potenzen von $2\pi - x$ sollen nicht ausmultipliziert werden. (Das Vorgehen muss gut sichtbar gezeigt werden.)
- (b) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n -ten Glied:
 $f_1(x) = \cos(x^2) + e^{-x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 8$. Dabei kann die Potenzreihenentwicklungen von e^x und von $\cos(x)$ verwendet werden. (Das Vorgehen muss gut sichtbar gezeigt werden.)
- (c) Berechne approximativ mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung bis zum n -ten Glied:
 $\int_{-2}^2 f_1(x) dx = ?$ ($n = 8$). Vergleiche das Resultat mit dem numerisch besseren Resultat des Integrals aus dem Rechner und mit dem Resultat für $n = 100$.
- (d) Ermittle den Konvergenzradius der Potenzreihen von $f_1(x)$.

(3)

(15 Punkte)

$$f(x, y) = \sin(xy) + \sin(x), \quad D_f = \{(x, y) \mid x \in [0, \pi], y \in [-\pi, \pi]\}$$

- (a) Skizziere die Funktion (3D) und skizziere die Höhenlinienkarte.
- (b) Ermittle die Punkte, in denen f ein Maximum oder ein Minimum annimmt.
- (c) Berechne die Richtungsableitung im Punkte $(1, 1)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- (d) Berechne aus dem vorhin gewonnenen Resultat die Tangentensteigung im Punkte $(1, 1)$. Zeichne die Tangente in die Skizze ein.
- (e) Über der Kurve $g(x, y) = y^2 - x = 0$ wird auf der Funktionsfläche ein Weg definiert. Berechne im angegebenen Definitionsbereich Punkte, in denen die Funktion maximale und minimale Werte annimmt.

(4)

(6 Punkte)

Gegeben ist die Gleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} + \frac{10^4}{g+b}$, die durch Anfügen eines Korrekturterms aus der bekannten Abbildungsgleichung der geometrischen Optik entstanden ist. Es gemessen wurde $g = 14.28 \text{ cm} \pm 0.10 \text{ cm}$ und $b = 25.62 \text{ cm} \pm 0.25 \text{ cm}$.

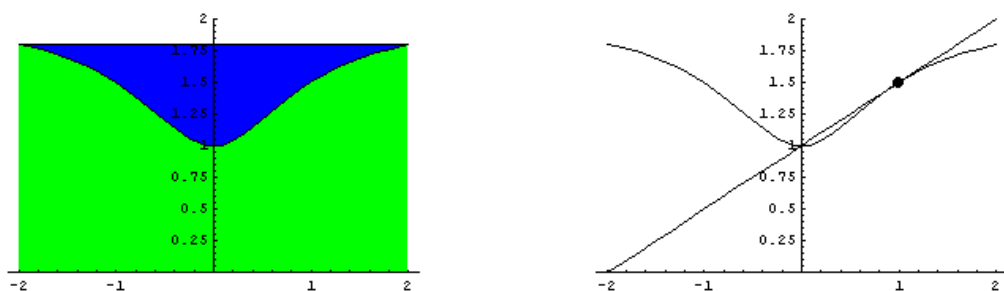
Berechne $f \pm \Delta f$ in cm und überlege anschließend, ob der Ausdruck 10^4 im Korrekturterm vielleicht verwechselt worden ist und 10^{-4} sein müsste.

(5)

(12 Punkte)

Die nachstehende links Figur zeigt eine Rinne, welche mittels einer Funktion $f(x) = \frac{a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{x^2 + b_0} - 2$ wiederzugeben ist. Rechts sieht man die Kurve mit einer Tangente im Punkte $(x = 1, y = f(1))$. Die Tangente hat die Funktionsgleichung $g(x) = \frac{x-1}{d} + \frac{3}{2}$, d aus der Skizze. Dazu ist $z = h(x) = 2$ Asymptote.

Skizzen:



(f ist symmetrisch zur y -Achse (gerade Funktion). Zudem ist $f(0) = 1$ und $f(1) = 1.5$.)

- Vereinfache die Funktionsgleichung durch Ausnutzung der Symmetrie und $f(0) = 1$, $f(1) = 1.5$, so dass $f(x)$ keine weiteren Parameter mehr enthält.
- Berechne den Inhalt der in der Skizze gezeigten Querschnittsfläche zwischen der Kurve und der horizontalen Gerade zwischen den Punkten $P(-2/f(-2))$ und $P(2/f(2))$.
- Berechne den Volumeninhalt der entsteht, wenn die eben berechnete Querschnittsfläche zwischen der Kurve und der horizontalen Gerade um die x -Achse rotiert wird.

24.3 Link zu den Lösungen Phase 24

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_08.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_08.nb

Lösungen zum Test:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/TEM1Ana06_7_03.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/TEM1Ana06_7_03.nb

Kapitel 25

Phase 25 (II/9)

- ⊗ Testbesprechung!
- ⊗ Integrationsregeln bei mehreren Variablen
- ⊗ Integration mit mehreren Variablen: Vertauschung der Integrationsreihenfolge
- ⊗ Beispiele
- ⊗ Massenträgheitsmoment, Massenschwerpunkte
- ⊗ Anleitung zum Selbststudium (siehe Übungen)
- ⊗ Beispiele: Diverse Integrale, Volumenberechnung, Integrationstricks
- ⊗ Doppelintegrale in Polarkoordinaten
- ⊗ Beispiele

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_09.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_09.nb
- ⊗ **Nachbearbeitung des Tests:** Korrigiere die letzte Prüfung fertig!

25.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 09 ◇

Nachbearbeitung des Tests:

- (1) $f(x, y) = \sin(xy) + \sin(x)$, $D_f = \{(x, y) \mid x \in [0, \pi], y \in [-\pi, \pi]\}$
- (a) Skizziere die Funktion (3D) und skizziere die Höhenlinienkarte.
 - (b) Ermittle die Punkte, in denen f ein Maximum oder ein Minimum annimmt.
 - (c) Berechne die Richtungsableitung im Punkte $(1, 1)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 - (d) Berechne aus dem vorhin gewonnenen Resultat die Tangentensteigung im Punkte $(1, 1)$. Zeichne die Tangente in die Skizze ein.
 - (e) Über der Kurve $g(x, y) = y^2 - x = 0$ wird auf der Funktionsfläche ein Weg definiert. Berechne im angegebenen Definitionsbereich Punkte, in denen die Funktion maximale und minimale Werte annimmt.
- (2) Gegeben ist die Gleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} + \frac{10^4}{g+b}$, die durch Anfügen eines Korrekturterms aus der bekannten Abbildungsgleichung der geometrischen Optik entstanden ist. Es gemessen wurde $g = 14.28 \text{ cm} \pm 0.10 \text{ cm}$ und $b = 25.62 \text{ cm} \pm 0.25 \text{ cm}$.

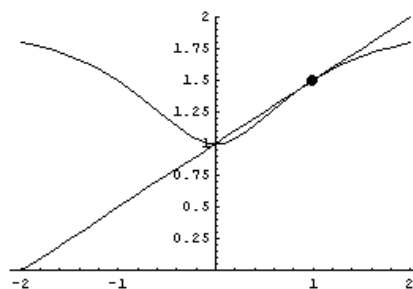
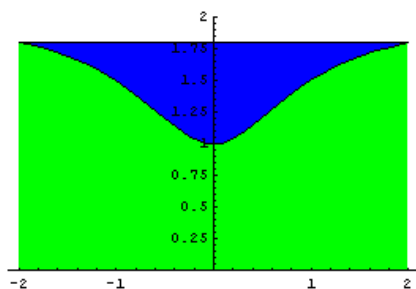
Berechne $f \pm \Delta f$ in cm und überlege anschliesend, ob der Ausdruck 10^4 im Korrekturterm vielleicht verwechselt worden ist und 10^{-4} sein müsste.

- (3) Die nachstehende links Figur zeigt eine Rinne, welche mittels einer Funktion $f(x) = \frac{a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{x^2 + b_0} - 2$ wiederzugeben ist. Rechts sieht man die Kurve mit einer Tangente im Punkte $(x = 1, y = f(1))$. Die Tangente hat die Funktionsgleichung $g(x) = \frac{x-1}{d} + \frac{3}{2}$, d aus der Skizze. Dazu ist $z = h(x) = 2$ Asymptote.

(f ist symmetrisch zur y -Achse (gerade Funktion). Zudem ist $f(0) = 1$ und $f(1) = 1.5$.)

Skizzen:

%



- (a) Vereinfache die Funktionsgleichung durch Ausnutzung der Symmetrie und $f(0) = 1$, $f(1) = 1.5$, so dass $f(x)$ keine weiteren Parameter mehr enthält.
- (b) Berechne den Inhalt der in der Skizze gezeigten Querschnittsfläche zwischen der Kurve und der horizontalen Gerade zwischen den Punkten $P(-2/f(-2))$ und $P(2/f(2))$.
- (c) Berechne den Volumeninhalt der entsteht, wenn die eben berechnete Querschnittsfläche zwischen der Kurve und der horizontalen Gerade um die x -Achse rotiert wird.

25.2 Link zu den Lösungen Phase 25

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_09.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_09.nb

Kapitel 26

Phase 26 (II/10)

- ⊗ Oberflächenintegrale (Inhalte krummer Flächen)
 - Kartesisch
 - Für beliebige KS
 - Beispiele
- ⊗ Integrale über Funktionen auf Oberflächen (z.B. Fluss)
- ⊗ Mehrfachintegrale
 - Kartesisch
 - In Kugelkoordinaten
 - In Zylinderkoordinaten
 - Für beliebige KS
 - Die Funktionaldeterminante
 - Beispiele
- ⊗ Selbststudium: Krümmung von Kurven (Skript Analysis, Skript Math. II)

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_10.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_10.nb

26.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 10 ◇

Für die folgenden Aufgaben ist notfalls ein Computer zu verwenden (Skizze!):

(1) Berechne den Inhalt der Fläche der folgenden Funktion:

(a) $f(x, y) = \sin(x + y)$, $D_f = \{(x, y) \mid x \in [0, \pi], y \in [-\pi, \pi]\}$

(b) $f(x, y) = \sin(x + y)$, $D_f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}\}$

(c) $f(x, y) = \sin(xy) + \sin(x)$, $D_f = \{(x, y) \mid x \in [0, \pi], y \in [-\pi, \pi]\}$

(2) Berechne das Oberflächenintegral $\int_G h(x, y) dG$ über die Oberfläche der Funktion f :

$$h(x, y) = x + xy + y^2, \quad f(x) = 1 - x^2 - y^2, \quad G = ([0, 1] \times [0, 1]) \cap \{x, y \mid x \geq y\}$$

(3) Berechne den Inhalt der Fläche der folgenden Funktion, welche in Polarkoordinaten gegeben sind:

(a) $f(\alpha, r) = \sin(\alpha) e^r$, $D_f = \{(\alpha, r) \mid \alpha \in [0, \frac{\pi}{4}], r \in [0.5, 1]\}$

(b) $f(\alpha, r) = \sin(\alpha) e^r$, $D_f = \{(\alpha, r) \mid \alpha \in [r, 2r], r \in [0.5, 1]\}$

(c) $f(\alpha, r) = \sin(\alpha) e^r$, $D_f = \{(\alpha, r) \mid r \in [\alpha, 2\alpha], \alpha \in [0, 1]\}$

(4) Berechne den Inhalt der folgenden Körper:

(a) $0 \leq z \leq f(x, y) = \cos(x + y)$, $x^2 + y^2 \leq (\frac{\pi}{2})^2$

(b) $0 \leq z \leq f(x, y) = y$, $x^2 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$

(5) Berechne die Oberfläche der folgenden Flächen, welche durch Vektorfunktionen gegeben sind:

(a) $\begin{pmatrix} r + \cos(\alpha) \\ r^2 + \sin(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) - r + \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $r \in [0, 2]$

(b) $\begin{pmatrix} 4 \cos(\alpha)(\cos(\beta) + 1) \\ 4 \sin(\alpha)(\cos(\beta) + 1) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\beta \in [0, 2\pi]$

(c) $\begin{pmatrix} \cos(\beta) \sin(\alpha) + \frac{1}{4} \sin(2\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\alpha \in [0, \pi]$, $\beta \in [0, 2\pi]$

(6) Gegeben ist die Funktion $f(u, v) = e^{\sin(u) - \cos(v)}$ auf dem Gebiet $G = \{(u, v) \mid u, v \in [0, 2\pi]\}$. Berechne $\int_G f(u, v) dG$.

(7) Krümmung

Bestimme die Krümmung der folgenden Kurven und skizziere die Situation mit dem Krümmungskreis:

(a) $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

(b) $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$

(c) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

(d) $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$

(e) $\begin{pmatrix} 0.5 t \cos(t) \\ t \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$, $t_0 = 6$

26.2 Link zu den Lösungen Phase 26

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_10.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_10.nb

Kapitel 27

Phase 27 (II/11)

⊗ Differentialgleichungen

- Problematik und Beispiele, Klassifikation, Ordnung
- Gewöhnliche D'Gl., partielle D'Gl.
- Problemtypen (AWP, RWP)
- AWP: Gewöhnliche D'Gl. höherer Ordnung und Systeme von D'Gl. 1. Ordnung
- Integralkurven, Linienelemente, Richtungsfeld, Isoklinen
- Problemkreise Existenz, Eindeutigkeit, Lösungsmethode, Auffinden von analytischen kontra numerischen Lösungen, Stabilität von Lösungen, Klassifikation und Methoden
- Existenzsatz von Peano, Eindeutigkeitssatz, Lipschitzbedingung, Eindeutigkeitssatz für Gebiete, $y'=f(x,y)$ mit diff'barem f , u.s.w.
- Reguläre und singuläre Lösungen
- Iterationsverfahren von Picard für ein AWP
- Separationsverfahren
- Beinahe separable D'Gl.
- Substitution
- Exakte D'Gl.

Arbeiten

⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!

- **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_11.pdf
- Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_11.nb

27.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 11 ◇

Für die folgenden Aufgaben ist notfalls ein Computer zu verwenden (Skizze!):

- (1) Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = x \cdot y^3$:
- (a) Skizziere das Richtungsfeld der Differentialgleichung.
 - (b) Löse die Differentialgleichung durch Separation.
 - (c) Skizziere einige Lösungskurven.
 - (d) Berechne die Integralkurve durch den Punkt $(1, 1)$
 - (e) Skizziere die Isoklinen.
 - (f) Fasse alle gemachten Skizzen in einer Skizze zusammen.
- (2) Wo existiert die Lösung von $y'(x) = (1 + 3(y(x) - x)^2)^{\frac{1}{3}}$ eindeutig?
- (a) Versuche numerisch eine Schar von Lösungskurven mit einer Maschine zu plotten und beurteile anhand der Skizze die Eindeutigkeit der Lösungen.
 - (b) Untersuche die Lipschitzbedingung in der Nähe von $y = x$.
- (3) Löse die nachfolgenden Differentialgleichungen mittels Separation und skizziere die Lösungen:
- (a) $y'(x) = xy(x)$, $y(1) = 1$
 - (b) $y'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(y(x))}$, $y(0) = 1$
 - (c) $y'(x) = \frac{x^4}{y(x)}$, $y(1) = 2$
- (4) Löse die nachfolgenden Differentialgleichungen und skizziere die Lösungen:
- (a) $y'(x) = 4x + 7y(x) + 3$, $y(-1) = 7$
 - (b) $y'(x) = \frac{y(x) + 1}{x} + 3$, $y(1) = 7$
 - (c) $y'(x) = -\frac{\cos(y(x)x + x)(y(x) + 1) + 1}{x \cos(y(x)x + x)}$, $y(\frac{1}{2}) = 1$

27.2 Testentwurf: Differentialgleichungen

Hinweis: Eine Aufgabe kann nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsgang ersichtlich ist. Die DGL sind von Hand zu lösen. Der Lösungsgang muss auf dem Blatt festgehalten sein. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.

- (1) Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = x y^3$.
- (a) Welche Ordnung hat diese DGL?
 - (b) Um welchen Typ DGL handelt es sich hier? (Linear, mit konstanten oder nicht konstanten Koeffizienten u.s.w....)
 - (c) Skizziere einige Isoklinen.
 - (d) Skizziere grob mit Hilfe der Isoklinen das Richtungsfeld.
 - (e) Berechne die allgemeine Lösung.
- (2) Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(x) y(x) = \cos(x)$.
- (a) Für welche $(x ; y(x))$ ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz verletzt?
 - (b) Löse die Differentialgleichung für die Anfangsbedingung $y(0) = 4$.
- (3) Gegeben ist die Differentialgleichung $y + 4x + x y' = 0$.
- (a) Berechne die allgemeine Lösung der DGL.
 - (b) Untersuche, ob es in der Lösungsmenge eine Gerade geben kann. Falls ja, so schreibe die Funktionsgleichung der Geraden auf.
- (4) Gegeben ist die Differentialgleichung $y'' - y' + y = e^{(-x)}$.
- (a) Berechne die allgemeine Lösung.
 - (b) Eine Lösung geht durch $(0 ; 0)$. Wie gross ist dann $y(1)$?

27.3 Link zu den Lösungen Phase 27

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_11.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_11.nb

Kapitel 28

Phase 28 (II/12)

⊗ Differentialgleichungen

- Exakte D'Gl.: Allgemeiner Fall, Beispiel
- Exakte D'Gl.: Spezialfälle, integrierender Faktor (eulerscher Multiplikator)
- Numerische Lösungsidee: Eulermethode, Runge–Kutta
- Theorie der linearen Differentialgleichungen: Homogene und inhomogene Gleichung
- Aufbau des Lösungsraumes analog zur Theorie der linearen Gleichungssysteme

Arbeiten

⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!

- **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_12.pdf
- Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_12.nb

28.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 12 ◇

Für die folgenden Aufgaben ist notfalls ein Computer zu verwenden (Skizze!):

(1) Exakte Differentialgleichungen:

- (a) Gegeben ist $(2xy^3 + 9x^2y + 3x^2)dx + (3x^3 + 3y^2x^2 - 2y + 1)dy = 0$ (Differentialgleichung).
- Löse die Differentialgleichung (falls notwendig mit einer Maschine, eventuell in der Form $y'(x) = -\frac{2xy^3 + 9x^2y + 3x^2}{3x^3 + 3y^2x^2 - 2y + 1}$).
 - Skizziere eine Serie von Lösungskurven.
- (b) Entscheide, ob es sich bei $y'(x) = -\frac{2xy^3 + 9x^2y + 3x^2}{3x^3 + 3y^2x^2 - 2y + 1}$ um eine exakte Differentialgleichung handelt.
- (c) Skizziere die Lösungskurve des AWP $y'(x) = -\frac{2xy^3 + 9x^2y + 3x^2}{3x^3 + 3y^2x^2 - 2y + 1}$, AW $y(2) = -0.25$. Verwende notfalls die Maschine.
- (d) Gegeben ist $(2xy^3 + 9x^2y + 3x^2 + x)dx + (3x^3 + 3y^2x^2 - 2y + 1)dy = 0$ (Differentialgleichung).
- Löse die Differentialgleichung.
 - Skizziere eine Serie von Lösungskurven.

(2) Lineare Differentialgleichungen:

- (a)
 - Löse die Differentialgleichung $y''(x) - xy'(x) + 2y''(x) = 0$.
 - Skizziere eine Serie von Lösungskurven des AWP's $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, Intervall $[-5, 5]$.
- (b)
 - Löse die Differentialgleichung $y''(x) + xy'(x) + 2y''(x) = 0$.
 - Skizziere eine Serie von Lösungskurven des AWP's $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, Intervall $[-5, 5]$.
- (c)
 - Löse die Differentialgleichung $y''(x) + xy'(x) + 2y''(x) = x$.
 - Skizziere eine Serie von Lösungskurven des AWP's $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, Intervall $[-5, 5]$.
- (d)
 - Löse die Differentialgleichung $y''(x) + xy'(x) + 2y''(x) = x^2$.
 - Skizziere eine Serie von Lösungskurven des AWP's $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, Intervall $[-5, 5]$.
- (e)
 - Versuche, die Differentialgleichung $y''(x) + y'(x) + x^2y''(x) = 0$ zu lösen.
 - Skizziere eine Serie von Lösungskurven des AWP's $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, Intervall $[-5, 5]$.
- (f)
 - Versuche, die Differentialgleichung $y''(x) + xy'(x) + x^2y''(x) = 0$ zu lösen.
 - Skizziere eine Serie von Lösungskurven des AWP's $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, Intervall $[-5, 5]$.

- (g) i. Versuche, die Differentialgleichung $y''(x) + x^2 y'(x) + x^2 y''(x) = 0$ zu lösen (mit einer Maschine, falls es geht).
 ii. Skizziere eine Serie von Lösungskurven des AWP's $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, Intervall $[-5, 5]$.
- (h) i. Versuche, die Differentialgleichung $y''(x) + x y'(x) + \cos(x) y''(x) = 0$ zu lösen (mit einer Maschine, falls es geht).
 ii. Skizziere eine Serie von Lösungskurven des AWP's $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, Intervall $[-5, 5]$.
- (3) Löse die nachfolgenden Differentialgleichungen (AWP) und skizziere falls möglich die Lösung:
- (a) $y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0$
 (b) $y'(x) + y(x) = 0$, $y(0) = 1$
 (c) $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
 (d) $y''(x) - y'(x) + y(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
 (e) $y''(x) + y'(x) - y(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
 (f) $y''(x) + y'(x) - y(x) = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
 (g) $y''(x) + y'(x) - y(x) = x^5$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
 (h) $y''(x) + y'(x) - y(x) = \cos(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
 (i) $y''(x) - y'(x) - y(x) = \cos(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
 (j) $y''(x) - y'(x) - y(x) = x + \cos(\frac{x}{5} + 1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
 (k) $y''(x) - y'(x) - 2 y(x) = x + \cos(\frac{x}{5} + 1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
 (l) $y'''(x) + y''(x) - y'(x) - 2 y(x) = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$

28.2 Link zu den Lösungen Phase 28

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_12.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_12.nb

Kapitel 29

Phase 29 (II/13)

⊙ Differentialgleichungen

- Rep. Theorie der linearen Differentialgleichungen: Homogene und inhomogene Gleichung
- Linearen Differentialgleichungen mit konstanten reellen Koeffizienten, homogener Fall:
 - * Charakteristisches Polynom
 - * Basislösungen: 3 Fälle.
 - * 1) Alle Nullstellen des char. Pol. verschieden und reell: Exponentialfunktionen
 - * 2) Komplexe Nullstellen: Konjugiert komplexe Lösungen, führen auf sin und cos
 - * 3) Zusammenfallende Nullstellen: $x^k * e^x$
- Inhomogener Fall: Einfachste partikuläre Lösung suchen. (Hier wären die Laplace-Transformationen hilfreich)
- Anwendungen: Einbezug von Anfangswert- und Randbedingungen.
- Ausblick: Randwertproblem, Eigenwertproblem: Diskrete Eigenwerte, Beispiel $y'' + y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$
- Weitere Beispiele

⊙ Bemerkung zu Runge–Kutta (geeignet für Programmierung)

Arbeiten

⊙ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!

- **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_13.pdf
- Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_13.nb

29.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 13 ◇

Für die folgenden Aufgaben ist notfalls ein Computer zu verwenden (Skizze!):

(1) Exakte Differentialgleichungen:

- (a) i. Schreibe $F(x, y) = x^2 y^3 - 2y + x$ als totales Differential dF und deute $dF = 0$ als exakte Differentialgleichung.
- ii. Löse die Gleichung $F(x, y) = c$ für den Scharparameter c nach y auf und skizziere eine Funktionenschar $y := y_c(x) := y(x, c)$ für eine Auswahl von Werten für den Parameter c .
- iii. Löse die exakte Differentialgleichung $dF = 0$ und erstelle eine Skizze der Lösungen für verschiedene Parameter c . Vergleiche die Skizze mit der oben erhaltenen Skizze.
- (b) Erstelle mit Hilfe von $F(x, y) = x^2 y^3 - 2y + x$ eine exakte Differentialgleichung $f(x, y) dx + g(x, y) dy := dF = F'_x(x, y) dx + F'_y(x, y) dy = 0$. Kontrolliere damit die Beziehung $f'_y(x, y) \equiv g'_x(x, y)$.
- (c) Betrachte nun die Differentialgleichung $f(x, y) dx + g(x, y) dy = (x^3 y^3 + 2xy^3 - xy^2) dx + (3x^2 y^2 - 2y) dy$
 - i. Teste die Beziehung $f'_y(x, y) \equiv g'_x(x, y)$. Suche im Falle, dass es sich noch nicht um eine exakte Differentialgleichung (mit einem erkennbaren totalen Differential) handelt, einen eulerschen Multiplikator (integrierender Faktor).
 - ii. Suche eine implizite Lösung der Differentialgleichung.
 - iii. Falls du keine einfach darstellbare analytische Lösung finden kannst, so versuche, mit Hilfe eines „implicit Plots“ direkt aus der impliziten Lösung Kurven numerisch zu berechnen. (Verschiedene Copmuteralgebra-Programme oder Numerikprogramme stellen dafür Werkzeuge zur Verfügung).
 - iv. Vergleiche die gefundenen Kurven mit der Kurve der numerisch erhaltenen Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = -\frac{f(x, y(x))}{g(x, y(x))}$, $y(2) = 1$.

(2) Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

- (a) Löse die Differentialgleichung

$$y'(x) + k y(x) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad k \in \{-5, -4, \dots, 3, 4, 5\}.$$

Skizziere die Lösungen für $x \in [-2, 2]$.

(b) Löse die Differentialgleichung

$$y''(x) + k_1 y'(x) + k_2 y(x) = f(x), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad k_1, k_2 \in \{-3, \dots, 3\}.$$

Skizziere die Lösungen für $x \in [0, 5]$ (oder falls vorteilhaft für ein kleineres Intervall).

- i. $f(x) \equiv 0$.
- ii. $f(x) \equiv 1$.
- iii. $f(x) = 1 + x + x^2$.
- iv. $f(x) = \cos(2x - 1)$.
- v. $f(x) = e^{-x}$.
- vi. $f(x) = 1 + x + \cos(2x - 1) + e^{-\frac{x}{5}}$.

29.2 Link zu den Lösungen Phase 29

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_13.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_13.nb

Kapitel 30

Phase 30 (II/14)

- ⊗ Repetition und Ausbau: Speziell Linienintegrale (Selbststudium)
 - Übungen
 - Anwendungen
 - Dynamische Phänomene, Schwingungsgleichungen u.s.w.
- ⊗ Alte Prüfungsaufgaben
- ⊗ Selbststudium: Methode der kleinsten Quadrate (Skript Analysis)

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_14.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_14.nb

30.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 14 ◇

Für die folgenden Aufgaben ist notfalls ein Computer zu verwenden (Skizze!):

(1) Anfangswertprobleme:

- (a) i. Evaluierung einer Lösung, welche näher untersucht werden soll:

Löse die Differentialgleichung

$$y''(x) + k_1 y'(x) + k_2 y(x) = \cos(k_3 x - 1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \\ k_1, k_2 \in \{-1, \dots, 1\}, \quad k_3 \in \{-3, \dots, 3\}.$$

Skizziere die Lösungen für $x \in [0, 15]$

- ii. Untersuche die folgende Lösung näher:

$$y''(x) + y'(x) + 2y(x) = \cos(-3x - 1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

A. Skizziere die exakte Lösungen für $x \in [0, 25]$.

B. Skizziere die numerische Lösungen für $x \in [0, 25]$ (Runge-Kutta).

C. Überlagere die beiden Skizzen und beurteile das erhaltene Resultat.

==> Rückseite! %

(2) Randwertprobleme, Eigenwertprobleme:

- (a) Löse das Randwertproblem (Eigenwertproblem)

$$y''(x) = -\lambda y(x), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

- (b) Teste, ob auch andere Eigenfunktionen Lösungen sind:
- $y(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x)$

i. Was ist für $\lambda \in \mathbb{R}$?ii. Was ist für $\lambda \in \mathbb{Z}$?

- (c) Löse das Eigenwertproblem für den Eigenwert
- $\lambda = 1$
- , falls dies möglich ist.

- (d) Löse das Randwertproblem

$$y''(x) + y'(x) + 2y(x) = \sin(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

- (e) Löse das Randwertproblem

$$y''(x) + y'(x) + 2y(x) = \sin(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 1$$

- (f) Löse das Randwertproblem

$$y''(x) + y'(x) + 2y(x) = \sin(x), \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0$$

- (g) Löse das Randwertproblem

$$y''(x) + y'(x) + 2y(x) = \sin(x), \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1$$

- (h) Löse das Randwertproblem

$$y''(x) + y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1$$

- (i) Löse das Randwertproblem

$$y''(x) + y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$$

- (j) Löse das Randwertproblem

$$y''(x) = -y(x), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$$

30.2 Link zu den Lösungen Phase 30

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_14.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_14.nb

Kapitel 31

Phase 31 (II/15)

- ⊗ Repetition und Ausbau: Speziell Linienintegrale
- ⊗ Übungen
- ⊗ Alte Prüfungsaufgaben
- ⊗ Selbststudium:
 - Stabilität von Differentialgleichungen (Skript Math. II)
 - Splines (Skript Analysis)

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_15.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_15.nb

31.1 Übungen in Analysis

◇ E+M 2 15 ◇

Für die folgenden Aufgaben ist notfalls ein Computer zu verwenden (Skizze!):

(1) Kurzprojekt Schwingungen:

Konsultiere den Abschnitt 6.3.1., Schwingungen und Oszillatoren im Skript „Mathematik II“ unter dem Link

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweid.pdf> resp.

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweidf.pdf> resp.

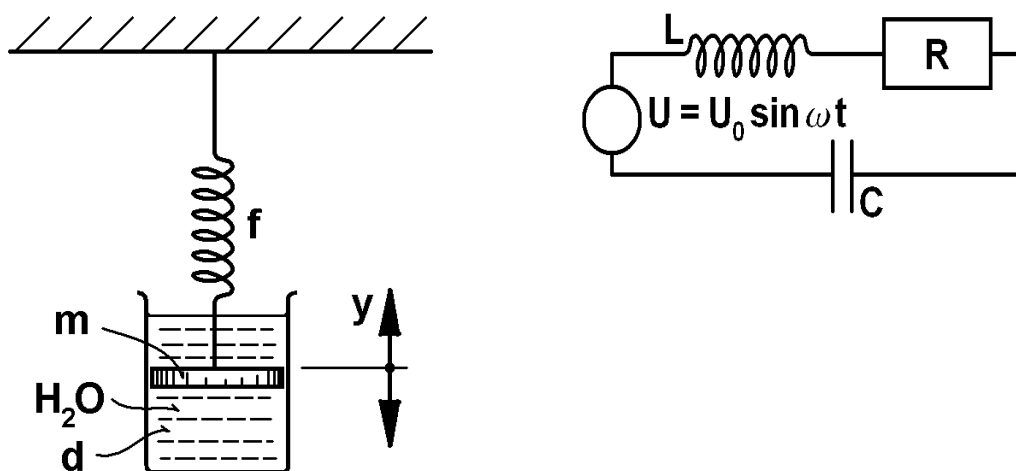
<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweif.pdf>

Orientiere dich über das Thema „Schwingung und Differentialgleichungen“. Was dort noch über Laplace-Transformationen steht, kann auf der momentanen Kenntnisstufe weggelassen werden.

Zitat:

(Aus dem 1. Beispiel) Annahme:

Dämpfungskraft $\sim$ Geschwindigk. $\dot{y}$, Proportionalitätskonstante d (Dämpfungskonstante)



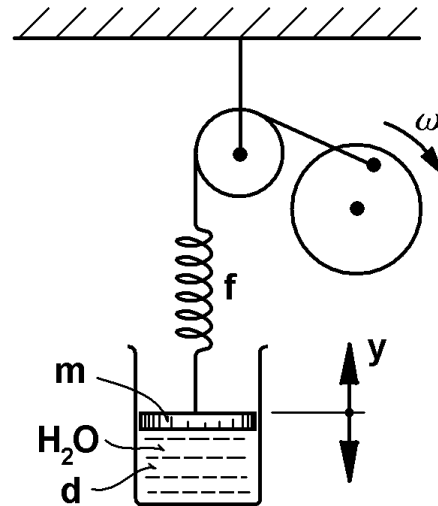
Mit dem Federgesetz ergibt sich dann: $m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + f \cdot y = 0$, $f = \text{Federkonstante}$

Sei $2\rho = \frac{d}{m}$, $\omega^2 = \frac{f}{m} \Rightarrow \ddot{y} + 2\rho \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$

(Aus dem 2. Beispiel)

Falls zusätzlich eine Anregerkraft F wirkt, etwa über einen Exzenter, so erhält man die folgende D'Gl:

$$F(t) = k \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow$$



$$E(y) \equiv \ddot{y} + 2\rho \dot{y} + \omega_0^2 y = k \cdot \sin(\omega t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Aus physikalischen Gründen kann man vermuten: $y(t) = A \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi)$

Ende Zitat

Aufgabe ==> %

- (a) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 0$ und $f = 1$, äussere Kraft $= 0$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (b) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 0$ wie oben, äussere Kraft $= 0$. Die Verwendete Feder soll pro Längeneinheit dieselbe Federkonstante wie oben haben. Die Feder soll aber doppelt so lang sein.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (c) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fäll $m = 2$, $d = 0$ und $f = 1$ wie oben, äussere Kraft $= 0$.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (d) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 0$ und $f = 1$ wie ganz oben, äussere Kraft $= 10$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (e) Stelle die Differentialgleichungen auf für die Fall einer horizontalen Situation, dass jetzt Masse $m = 1$ und zweimal die Feder, wie in der 1. Aufgabe verwendet wird, $d = 0$. Die Abfolge der Federn und Massen ist ist wie folgt:
Feder₁ — Masse — Feder₂, äussere Kraft $= 0$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 5$, $y_2'(0) = 0$.
Bemerkung: Für jede Masse muss man eine Differentialgleichung aufstellen. Die beiden Gleichungen kann man entkoppeln.
- (f) Stelle die Differentialgleichungen auf für die Fall einer horizontalen Situation, dass jetzt zweimal die Masse $m = m_1 = m_2 = 1$ und dreimal die Feder, wie in der 1. Aufgabe verwendet wird, $d = 0$. Die Abfolge der Federn und Massen ist ist wie folgt:
Feder₁ — Masse₁ — Feder₂ — Masse₂ — Feder₃, äussere Kraft $= 0$. Löse diese Differentialgleichung.
 $y_1(x)$ und $y_2(x)$ seien die Auslenkungen der beiden Massen aus ihren Ruhelagen. Für die Anfangsbedingungen sei: $y_1(0) = 2$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = -1$, $y_2'(0) = 0$, Position von m_2 im Koordinatensystem von m_1 : $d = -6$.
Bemerkung: Für jede Masse muss man eine Differentialgleichung aufstellen. Die beiden Gleichungen kann man entkoppeln.
- (g) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 0$ und $f = 1$, äussere Kraft $= \sin(t)$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (h) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 1$ und $f = 1$, äussere Kraft $= 0$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (i) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 1$ und $f = 1$, äussere Kraft $= \sin(t)$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (j) Eine Masse m ist an zwei parallelen Federn aufgehängt mit $f_1 = 3$ und $f_2 = 4$. Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 2$ und $d = 1$, äussere Kraft $= 4 \sin(2x)$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Bemerkung: Erst muss aus f_1 und f_2 die gemeinsame Konstante f errechnet werden.

(2) Linienintegral

Konsultiere die Abschnitte 6.4.1., Linienintegrale ff im Skript „Mathematik II“ unter dem Link

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweid.pdf> resp.

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweidf.pdf> resp.

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweif.pdf>

Orientiere dich über das Thema „Linienintegrale“. Was dort noch über weitere Begreiffe steht (Differentialoperatoren) steht, kann auf der momentanen Kenntnisstufe weggelassen werden.

$$(a) \text{ Sei } \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ 5z \\ 10x \end{pmatrix}, \quad \gamma: t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2]$$

$$\text{i. Berechne das Linienintegral} \quad W = \int_0^2 \vec{F} \cdot \vec{x}_t' dt = \int_0^2 \langle \vec{F}, \vec{x}_t' \rangle dt$$

$$\text{ii. Berechne das Linienintegral} \quad W = \int_{|\gamma|} |\vec{F}| d|\gamma|$$

$$(b) \text{ Sei nun } \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ 5z \\ 10x \end{pmatrix}, \quad \gamma: t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 2t^2 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{i. Berechne das Linienintegral} \quad W = \int_0^2 \vec{F} \cdot \vec{x}_t' dt = \int_0^2 \langle \vec{F}, \vec{x}_t' \rangle dt$$

$$\text{ii. Berechne das Linienintegral} \quad W = \int_{|\gamma|} |\vec{F}| d|\gamma|$$

$$(c) \text{ Sei nun } \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ 5z \\ 10x \end{pmatrix}, \quad \gamma: t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \\ 1 + \sin(3t) \end{pmatrix}$$

$$\text{i. Berechne das Linienintegral} \quad W = \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot \vec{x}_t' dt = \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}, \vec{x}_t' \rangle dt$$

$$\text{ii. Berechne das Linienintegral} \quad W = \oint_{|\gamma|} |\vec{F}| d|\gamma|$$

(3) Spezielle Differentialgleichungen

- (a) Studiere die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \alpha y(x) = f(x)$$

- (b) Studiere die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = f(x)$$

- (c) Studiere die der Differentialgleichung

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = f(x)$$

$$\text{mit } \alpha = 2, \beta = -1, c_1 = 1, c_2 = 1, f(x) = \cos(x)$$

- (d) Studiere die der Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - y(x) = \cos(x + 1), y(x) = 1, y'(x) = 0$$

31.2 Link zu den Lösungen Phase 31

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_15.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAAna_2_15.nb

Kapitel 32

Phase 32 (II/16)

- ⊗ Übungen
- ⊗ Alte Prüfungsaufgaben
- ⊗ Selbststudium: Krümmung von Kurven (Skript Analysis, Skript Math. II)

Arbeiten

- ⊗ **Übungen:** Löse die Übungen auf der nächsten Seite fertig!
 - **Kurzlösungen** siehe:
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_16.pdf
 - Source Code siehe
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_16.nb

32.1 Übungen in Analysis: Prüfungsvorbereitung $\diamond$ E+M 2 16 $\diamond$

Die folgenden Aufgaben entstammen ehemaligen Modulprüfungen oder Vordiplomen.

32.1.1 19 Aufgaben mit Lösungen (Lösungen: separate Datei)

B (1)

(15 Punkte)

Gegeben ist $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} e^{\left(\frac{-\sqrt{x^2 + y^2}}{2}\right)}$, $\sqrt{x^2 + y^2} = r$. Diese Funktion f kann man auch als Funktion $h(r, \varphi)$ auffassen. Es gilt dann $h(r, \varphi) = \sqrt{r^2} e^{\left(\frac{-\sqrt{r^2}}{2}\right)}$, $\sqrt{r^2} = |r|$. Daher können wir die Funktionsfläche (Graph) in $\mathbb{R}^2$ auch als Rotationsfläche verstehen.

- (a) Skizziere den Graphen für $x, y \in [-2, 2]$ oder $r \in [0, 2]$. (Wenn r statt x, y benutzt wird, zeigt der Graph eine Rotationsfläche. Dann werden die Ecken abgeschnitten, was hier nichts ausmacht.)
- (b) Untersuche die Frage, was bei $x = y = r = 0$ für eine Situation passiert: Hat man eine Spitze oder hat man eine gewöhnliche Tangente in Richtung x sowie y (oder alternativ in Richtung r)? (Bestimme zur Beantwortung der Frage die Ableitungen und davon den Grenzwert für x, y resp. $r \rightarrow 0$.)
- (c) Bestimme die maximale Höhe der Fläche für $r \in [0, 2]$.
- (d) Bestimme den Gradienten der Funktion für $x = y = 1$.
- (e) Bestimme approximativ den Flächeninhalt über der Region $[1 \leq x \leq 2] \times [1 \leq y \leq 2]$.

B (2)**(12 Punkte)**

- (a) Berechne von Hand die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2y(x) + y''(x) = \cos(x)$$

und erläutere dabei die Lösungsmethode.

- (b) Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2y(x) - y'(x) + y''(x) = \cos(x).$$

- (c) Berechne die spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$2y(x) - y'(x) + y''(x) = \cos(x)$$

mit den Randbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

- (d) Skizziere die eben gefundene spezielle Lösung für $x \in [0, 12]$.

- (e) Berechne approximativ den Funktionswert der gefundenen speziellen Lösung bei $x \approx 2.75558$.

B (3)**(12 Punkte)**

- (a) Bestimme die Potenzreihenentwicklungen $p_s(x)$ von $\sin(x)$ und $p_c(x)$ von $\cos(x)$ bis und mit zu den Gliedern der Ordnung 10 (Polynome vom Grad ≤ 10). *Das Zentrum der Entwicklung für alle Teilaufgaben ist $x_0 = 0$.*
- (b) Bestimme graphisch approximativ das Intervall auf der x -Achse mit Zentrum 0, in dem $|p_s(x) - \sin(x)| \leq 0.01$ gilt.
- (c) Differenziere $p_s(x)$ nach x . Wie weicht das Resultat von $p_c(x)$ ab und wieso?
- (d) Bestimme mit Hilfe von $p_s(x)$ und $p_c(x)$ die Potenzreihenentwicklung $p_{s+c}(x)$ von $\sin(x) + \cos(x)$ bis und mit zu Gliedern der Ordnung 10. Bestimme ebenfalls die Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ bis und mit zu Gliedern der Ordnung 10. Vergleiche das Resultat mit $p_{s+c}(x)$. Was kann man daraus ersehen?
- (e) In der Nähe von $x = 0$ ist $\frac{p_s(x)}{x}$ eine Näherungsformel für $\frac{\sin(x)}{x}$. Skizziere die beiden Funktionen in einem Diagramm mit dem Ausschnitt $x \in [-1, 1]$ und $y \in [0, 1]$. Kann man die beiden Kurven im Diagramm unterscheiden?
- (f) Ermittle aus den Resultaten eine Näherungsformel für eine Stammfunktion von $\frac{\sin(x)}{x}$, welche für $x \in [-1, 1]$ anwendbar sein soll.

B (4) Die folgenden beiden elementaren Aufgaben sind unabhängig. **(Je 6 Punkte)**

- (a) Ein Brückenbogen hat die schöne Form einer Sinuslinie $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$. Berechne den Flächeninhalt des grössten Trapezes, das man zwischen diese Sinuslinie und die x -Achse einpassen kann und ebenso den Inhalt der Fläche zwischen Trapez und Sinuslinie.
- (b) Ein Feuerwehrmagazin hat eine Höhe von 10 m. Darin werden die Schläuche zum Trocknen aufgehängt. Der Grundriss ist $4 \times 4 \text{ m}^2$. Die Eingangstür vorne hat eine Höhe von 2.50 m. Nun will man eine Leiter maximaler Länge bestellen, welche von vorne gerade noch zur Tür hinein geschoben und hochgestellt werden kann. Wie lang darf diese Leiter höchstens sein? (Der Weg von vorne verläuft rechtwinklig zur Wand mit der Tür und ist gerade genügend breit, sodass die Leiter bequem transportiert werden kann.)

B (5) **(18 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

- (a) $f(x) = x^2 + 0.5 \sin(x)$
- $f'(x) = ?$
 - $f'(x)|_{x=1} = ?$
 - $f'(x)|_{x=1} = \text{Steigung der Kurve} \Rightarrow \text{Steigungswinkel } \alpha = ?$
 - $f''(x)|_{x=1} = ?$
- (b) $f(x) = \left(\sqrt[4]{(x^{3/4} - 3)^3} \right)^5 \rightsquigarrow f'(x) = ?$
- (c) $f(x) = -4x^2 \sin(2 - 3x^2) \rightsquigarrow f'(x) = ?$
- (d) $f(x) = \frac{x \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1-x} \rightsquigarrow f'(x) = ?$
- (e) $f(x) = 4e^{-x} \cos(2 - e^x) \rightsquigarrow f'(x) = ?$
- (f) $f(x) = x^2 + a \sin(x) + \frac{2}{x} \rightsquigarrow \int_1^{e^2} f(x) dx = ?$

B (6)**(12 Punkte)**

Gegeben sind zwei Kurve durch $f_1(x) = x^5$ und $f_2(x) = x^{1/5}$ über dem Intervall $I = [0, 1]$. f_1 und f_2 schliessen über I eine Fläche A_0 ein. Die damit gegebene Figur sei ebenfalls mit A_0 bezeichnet.

- (a) Skizziere die Figur A_0 .
- (b) Zwischen die beiden gegebenen Kurven f_1 und f_2 wird nun eine dritte Kurve $f_3(x) = x^a$ gelegt mit $a > 0$.
Bestimme a so, dass f_3 die Figur A_0 in zwei inhaltsgleiche Teilfiguren A_1 (oben) und A_2 (unten) zerlegt. (Zeichne darauf f_3 in der Skizze ein.)
- (c) Wie in der letzten Teilaufgabe wird nun zwischen die beiden gegebenen Kurven f_1 und f_2 eine weitere Kurve $f_4(x) = x^a$ gelegt mit $a > 0$.
Bestimme diesmal a so, dass f_4 die Figur A_0 in zwei Teilfiguren A_3 (oben) und A_4 (unten) zerlegt, deren Flächeninhalte sich wie $\frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$ verhalten (goldener Schnitt).
(Zeichne darauf f_4 ebenfalls in die Skizze ein.)

B (7)**(15 Punkte)**

Gegeben sind zwei Funktionen $f(x) = e^{-x}(x^2 - 1)$ und $p(x) = ax^2 + bx + c$.

- (a) Bestimme die Parameter a, b, c von p so, dass $p(x)$ dieselben Nullestellen hat wie $f(x)$.
Zudem soll $p(x)$ für $x = -1$ die gleiche Tangentensteigung haben wie $f(x)$. (Skizziere jetzt die beiden Kurven!)
- (b) Bestimme das Verhältnis der beiden Flächeninhalte A_f und A_p zwischen der x -Achse und den Kurven $f(x)$ bzw. $p(x)$ bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$.
- (c) Anhand der Skizze könnte man glauben, dass die Kurve $f(x)$ für $x = 0$ einen Wendepunkt hat. Untersuche, ob diese Vermutung stimmt. (Das Resultat ist zu belegen.)
- (d) Die Parabel $p(x)$ wird um die x -Achse rotiert. Berechne das Rotationsvolumen bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$.
- (e) Berechne numerisch annähernd die Bogenlängen von f und p bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$. Was ist das Verhältnis der grösseren zur kleineren Länge?

B (8)**(15 Punkte)**

Die Funktion $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + dx + e}$ soll als Näherungsmodell der geometrischen Form eines Hügels dienen. Die Hügelkurve soll nun so in ein Koordinatensystem eingepasst werden, dass bei $x = -2$ und bei $x = 2$ je eine Nullstelle liegt und die Kurve dazu bei $x = 0$ ein Maximum besitzt. Bei $x = -1$ gibt es ferner eine Tangente mit der Steigung 1. Bei $x = 1$ hat die Tangente die Steigung -1 . Zudem ist $f(0) = 2$.

- (a) Berechne die Parameter a, b, c, d, e .

Hinweis: Man kann die Rechnung enorm vereinfachen, wenn man berücksichtigt, dass die gegebenen Werte auf eine gerade Funktion führen müssen und daher gewisse Parameter 0 sein müssen!

Skizziere die Kurve!

- (b) Berechne jetzt die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$.
- (c) Stelle die Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe mit dem Mittelpunkt $x = 0$ dar.
Hinweis: Wenn man die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$ betrachtet, so kann man darin als wesentlicher Teil eine geometrische Reihe entdecken.
- (d) Berechne mit Hilfe des Hinweises in der letzten Teilaufgabe den Konvergenzradius der gewonnenen Potenzreihe.
- (e) Verwende als Näherung nur das Taylorpolynom vom Grade 4. Was sind dann die gemachten Fehler an der Stelle $x = 0.5$ und $x = 0.9$?

B (9)**(8 Punkte)**

Zusatz: (Falls eine der regulären Aufgaben nicht gelöst werden kann.)

- (a) Suche die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \arctan(x)$ mit $x_0 = 0$. Verwende nur die Glieder bis $n = 10$. Ausgehend von der Tatsache, dass $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ ist, kann man mit dem gewonnenen Taylorpolynom die Zahl π annähern. Berechne diese Näherung und entscheide, wieviele Stellen mit dem Taschenrechner so exakt berechnet werden können.
- (b) (Wird hier weggelassen. Obige Aufgabe „Ein Feuerwehrmagazin hat eine Höhe von 10 m...“ ist ähnlich.)

B (10)**(12 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

- (a) $f(x) = -2 \frac{6x^3 + 5x^2 - 6x^1 + x^0}{-x^2 + 2x + 1}$
- i. $f'(x) = ?$
 - ii. $f'(x)|_{x=0} = ?$
 - iii. $f'(x)|_{x=0} = \text{Steigung der Kurve} \Rightarrow \text{Steigungswinkel } \alpha = ?$
 - iv. Etwaige reelle Lösungen: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = ?$
- (b) $f(x) = (\sin(x) e^x - \cos(e^{-x})) - \frac{x^3}{x+1}$
- i. $f'(x)|_{x=1.0} = ?$
 - ii. $f''(x) = ?$
 - iii. $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = ?$

B (11)**(12 Punkte)**

Gegeben ist die Kurve von $f(t) = -2e^{-t^2} + 1$ und im 4. Quadranten auf dieser Kurve ein Punkt $P = (x; y)$, d.h. $t = x$, $f(t) = y$. Wie gross muss x sein, damit das durch $(x; y)$, $(0; 0)$, $(-x; f(-x))$ gegebene Dreieck maximalen Inhalt $A(x)$ hat? (Der Inhalt wird als positiv erklärt.)

- (a) Skizziere $A(x)$.
- (b) Berechne $A'(x)$ und verwende den Newton-Algorithmus um den Punkt $P = (x; y)$ im 4. Quadranten zu finden, für den $A(x)$ maximal wird (Frage mit der nächsten Frage verbunden!).
- (c) Man starte den Newton-Algorithmus mit $x_1 = 0,5$. Nach wievielen Schritten ändert sich der Wert an der 3. Stelle hinter dem Dezimalpunkt nicht mehr?

B (12)**(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionskurven von $f_1(x) = a(x+3)(x+2)(x-4)$ sowie $f_2(x) = b+x^2$. An der Stelle $x = -2$ sollen die beiden Kurven einen gemeinsamen Punkt S_1 sowie auch eine gemeinsame Tangente haben. (Mache eine Skizze.)

- (a) Berechne a und b .
- (b) Berechne einen zweiten Schnittpunkt S_2 der beiden Kurven ($|x_2| \rightarrow \min$).
- (c) Durch den Wendepunkt W von f_1 sowie durch S_1 und S_2 wird eine Polynomkurve $f_3(x)$ gelegt, sodass die Tangenten von f_2 und f_3 in S_2 übereinstimmen. Berechne die Steigung von f_3 in S_2 . ($pgrad \rightarrow \min$.)

B (13)**(12 Punkte)**

Gegeben sind 5 Punkte in einem Koordinatensystem:

$$P_1 = (3; -6), P_2 = (-3; -6), P_3 = (-3; 5), P_4 = (0; 6), P_5 = (3; 4)$$

Durch die Punkte soll ein nicht degenerierter Kegelschnitt gelegt werden (Ellipse, Parabel oder Hyperbel). Für die Kegelschnittgleichung soll folgender Ansatz gemacht werden:

$$f(x, y) = a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y + f = 0, \quad f = 1$$

- (a) Berechne die Parameter a, b, c, d, e und setze diese in $f(x, y)$ ein.
- (b) Berechne aus $f(x, y) = 0$ die Funktionen $y_k(x)$ (vermutlich zwei Möglichkeiten $k = 1$ und $k = 2$).
- (c) Skizziere die Kurven $y_k(x)$.
- (d) Berechne im Falle einer Ellipse $u = x_{max}$, im Falle der Hyperbel $u = x_{min}$ des höher liegenden Hyperbelasts.
- (e) Entscheide exakt, ob $u > -0.5$ richtig ist!

B (14)**(12 Punkte)****Zusatz:**

- (a) $a_n = n^4$, $n \in \mathbb{N}$
- i. $\Rightarrow b_n = a_{n+1} - a_n = ?$
 - ii. $c_n = b_{n+1} - b_n = ?$
 - iii. $c_{9'000} = ?$
- (b) In Nasewo-Schilda steht ein 105 Meter hoher Turm mit einem quadratischen Grundriss von 8 mal 8 Metern. Auf einer Seite ist ein Eingang angebracht, welcher so breit wie der Turm, aber nur 4 Meter hoch ist. Vor dem Turm ist der Marktplatz. Dieser verläuft exakt horizontal, fast 250 Meter weit in alle Richtungen. Im Turm soll nun an der hintern Wand der grösste ebene Spiegel der Welt aufgestellt werden, so breit wie die Wand wohlverstanden. Wie hoch kann dieser Spiegel maximal sein, wenn er durch den Eingang geschoben werden muss und rechteckig sein soll?

B (15)**(12 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

- (a) $f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 6x^1 + x^0 - \frac{2}{x^2}$
- i. $f'(x) = ?$
 - ii. $f'(x)|_{x=1} = ?$
 - iii. $f'(x)|_{x=1} = \text{Steigung der Kurve} \Rightarrow \text{Steigungswinkel } \alpha = ?$
 - iv. $\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x \approx ?$
 - v. $f''(x) = ?$
- (b) $f(x) = (e^x + \cos(x))^x + \frac{((\sin(\frac{x}{3} - 3))^2)}{(\ln(x) - x^2)}$
- i. $f'(x) = ?$
 - ii. $f'(x)|_{x=1.0} = ?$

B (16)**(12 Punkte)**Gegeben sind die Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ in einem Koordinatensystem mit folgenden Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ (0;0) & (1;1) & (2;0) & (3;1) & (4;-1) & (6;0) & (7;3) \end{pmatrix}$$

P_1, P_2, P_3 sind durch eine Polynomkurve 3. Grades $f_1(x)$ verbunden. Ebenso P_3, P_4, P_5 durch $f_2(x)$ und P_5, P_6, P_7 durch $f_3(x)$. In den Punkten P_3 und P_5 stimmen die Tangenten der benachbarten Kurven überein. In P_1 ist die Tangentensteigung der Kurve gleich 0.

- (a) Berechne die drei Polynomkurven $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$.
 $(f_1(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 = ? \text{ u.s.w..})$
- (b) Berechne die Steigungen in P_3 , P_5 und P_7 .

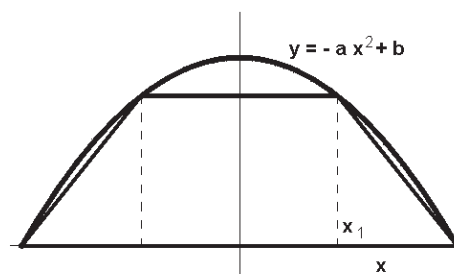
B (17)**(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktionskurve C von $f(x) = e^x$. Durch die Punkte $Q_1(-1; f(-1))$ und $Q_2(1; f(1))$ wird die Sehne s gezogen. Diese Sehne wird soweit parallel nach unten verschoben, bis sie zur Tangente t wird. (Mache eine Skizze.)

- (a) Berechne den Berührungspunkt $T(x_0; t(x_0))$ von t an C ($t(x_0) = f(x_0)$).
- (b) Berechne den Schnittpunkt A von t mit der x -Achse.
- (c) Sei n die Normale zu t in T . Berechne den Schnittpunkt B von n mit der x -Achse.
- (d) Berechne den Inhalt des Dreiecks $\triangle ABT$.

B (18)**(12 Punkte)**

In Ixtown steht eine Stadtbahnbrücke mit parabelförmigen Brückenbögen. Unter einem solchen Parabelbogen soll eine trapezförmige Halle für die Computergrufti-Messe gebaut werden. Die Wänden und Decke der Halle sind ebene Flächen. Stirnseitig ist die Halle vertikal bündig zur Brücke und verglast. (Vgl. nebenstehende Skizze). Für die Parabel nehmen wir folgende Funktion an:



$$y = f(x) = -a x^2 + b$$

Die gemessenen Werte für a und b sind aus der Bogenhöhe 20 Meter und der Bogenbreite auf Bodenniveau 40 Meter zu bestimmen.

- (a) $a, b = ?$
- (b) Berechne die x -Koordinate x_1 des rechten oberen Punktes des Trapezes, so dass die einfallende Lichtmenge maximal ist ($\leadsto$ grösstmöglicher Stirnflächeninhalt, $\leadsto x_1 = ?$ Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)
- (c) Berechne näherungsweise das ungenutzte Restvolumen zwischen Brücke und Halle im Bogen, in dem die Halle steht. (Die Brückenbreite s ist gleich 20 Meter.)

B (19)**(12 Punkte)****Zusatz:**

(a) $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = 12, a_n = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta$

i. $a_5 = ?$

ii. $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = ?$

iii. $s_{100} \approx ?$

iv. $\frac{s_{1000}}{s_{999}} \approx ?$

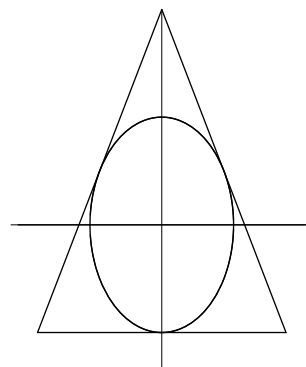
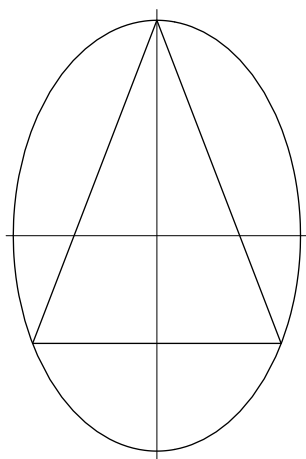
(b) $b_1 = 1, a_n = (n+1)(b_{n-1} - 1) \rightsquigarrow b_{50} \approx ?$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^2 - e}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}} \cdot \frac{\cos(n^2) + n^2 - 2n + 2}{3n^3 + 4n^2 + 2n - 1} \cdot (n+1) = ?$

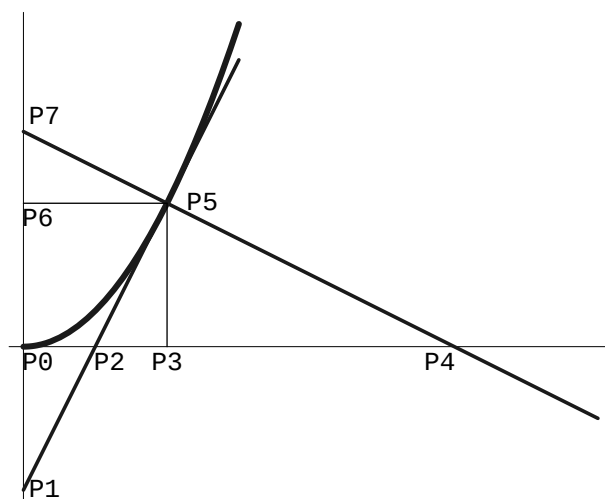
32.1.2 27 Aufgaben ohne Lösungen**B (1)****(12 Punkte)**

Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $s = 12$ und der Höhe $h = 18$.

- (a) Um dieses Dreieck soll zuerst eine Ellipse mit den Halbachsen a und b so gelegt werden, dass die Basis des Dreiecks parallel zur kleineren Achse zu liegen kommt. a und b sollen so gewählt werden, dass der Flächeninhalt A_1 der Ellipse minimal wird. Berechnen Sie dieses A_1 .
- (b) Anschliessend soll in das Dreieck eine Ellipse mit den Halbachsen c und d so eingeschrieben werden, dass wieder die Basis parallel zur kleineren Achse ist und dass der Flächeninhalt A_2 maximal wird. Berechnen Sie A_2 .
- (c) Wie gross ist $A_1 : A_2$?



B (2)



Die Skizze zeigt eine Funktion $f(x) = ax^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$. In $P_5(x_0, y = ax_0^n)$ sind die Tangente und die Normale gegeben. Die damit entstehenden Punkte $P_0 \dots P_7$ definieren Dreiecksflächen resp. Flächen, deren eine Begrenzungslinie der „Parabelbogen“ ist.

Die Flächen werden wie folgt benannt (mache eine Skizze!):

$$(P_0P_5P_6P_0) \rightsquigarrow A_1, \quad (P_0P_3P_5P_0) \rightsquigarrow A_2, \quad (P_0P_1P_2P_0) \rightsquigarrow A_3, \\ (P_2P_3P_5P_2) \rightsquigarrow A_4, \quad (P_6P_5P_7P_6) \rightsquigarrow A_5, \quad (P_3P_4P_5P_3) \rightsquigarrow A_6.$$

Berechnen Sie die folgenden Verhältnisse der Flächeninhalte. Untersuchen Sie wie n gewählt werden muss, damit das jeweilige Verhältnis unabhängig ist von x_0 . Untersuchen Sie auch den Einfluss von a .

(a) $A_1 : A_2$

(d) $A_4 : A_5$

(b) $A_4 : A_2$

(e) $A_4 : A_6$

(c) $A_4 : A_3$

(f) $(A_4 \cdot A_4) : (A_5 \cdot A_6)$

B (3)

(12 Punkte)

Zur Funktion $p(x) = -x + 1$ suchen wir über dem Intervall $[0, 1]$ eine andere Funktion $f(x) = \cos(\omega x) + h$ derart, dass $\int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx$ minimal ist und $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt.

(a) Berechnen Sie das Integral von Hand

(b) Berechnen Sie h und ω . (Eine numerische Näherung genügt.)(c) Skizzieren Sie die Graphen von $p(x)$ und der gefundenen Funktion $f(x)$ im selben Diagramm.

B (4)**(12 Punkte)**

Ein ebener Kreiszylinder mit dem Radius $R = 4$ ist derart in ein Koordinatensystem einer „Lehren-Bohrmaschine“ gestellt, dass die z -Achse die Zylinderachse ist. Die ebene Grundfläche befindet sich auf der Höhe $z = -5$ und die ebene Deckfläche auf der Höhe $z = 5$.

Der in der Bohrmaschine eingespannte Bohrer hat einen Durchmesser von $d = 2$. Seine Achse ist parallel zur y -Achse und hat von der Zylinderachse einen senkrechten Abstand von $a = 2$. (Aus der Situation folgt, dass dieser Abstand a exakt in x -Richtung gemessen ist.) Es gilt $z = 2$.

- (a) Machen Sie sich eine räumliche Skizze von der Situation.
- (b) Berechnen Sie approximativ das Volumen des entstehenden Abfalls beim Ausbohren des Loches. Wieviel Prozent des ursprünglichen Volumens wird Abfall?

B (5)**(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = z := x^4 + y^2$. Durch $|\text{grad}(f)| = 1$ wird in der Grundebene eine Kurve C definiert.

- (a) Berechnen Sie die Kurve C als Vektorfunktion und skizzieren Sie C . Skizzieren Sie auch $z = f(x, y)$ resp. $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y) \wedge (x, y) \in C\}$ für $x \geq 0, y \geq 0$.
- (b) Bestimmen Sie C für $x \geq 0, y \geq 0$ als Funktion $y = h(x)$ und ermitteln Sie dort den Definitionsbereich von h .
- (c) Berechne Sie die Extremalstellen von $z = f(x, y)$ für $(x, y) \in C$ resp. $y = h(x)$ mit Hilfe der Methode von Lagrange.

B (6)**(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen $g(z) = \frac{1}{a+z}$ und $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$. Um $f(x)$ rasch von Hand in eine Potenzreihe zu entwickeln und dabei die infolge der Quotientenregel anfallenden grossen Ausdrücke für die Koeffizienten zu vermeiden, gehen wir wie folgt vor:

Entwickelt man $g(z)$ sowie e^x in eine Potenzreihe, so findet man:

$$g(z) = \frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} - \frac{z^3}{a^4} + \frac{z^4}{a^5} - \frac{z^5}{a^6} + \frac{z^6}{a^7} - \frac{z^7}{a^8} + \frac{z^8}{a^9} - \frac{z^9}{a^{10}} + \frac{z^{10}}{a^{11}} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{3628800} + \dots$$

$$\text{Setzt man nun } f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \dots) - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \dots} = \frac{1}{1+z},$$

$$\text{so ist } a = 1 \text{ und } z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \dots$$

- (a) Berechnen Sie *von Hand* die ersten vier Koeffizienten B_k in der Potenzreihenentwicklung von

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \dots} := B_0 + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \dots$$

der Reihe nach aus der Gleichung

$$1 = (1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \dots) \cdot (B_0 + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \dots).$$

Bemerkung: Die Zahlen B_k heissen **Bernoullische Zahlen**.

- (b) Berechnen Sie damit eine Näherungsformel für $\int_0^{x^n} \frac{t}{e^t - 1} dt$, ($x^n \leq 1$).
- (c) Berechnen Sie den Konvergenzradius von $g(z)$ sowie von e^x . Was lässt sich daraus für den Konvergenzradius von $f(x)$ folgern?
Hinweis: $g(z)$ hat mit einer geometrischen Reihe zu tun!

B (7)**(12 Punkte)**

Ein vollkommen biegsamer, schwerer und an zwei Punkten aufgehängter Faden, der sich im Gleichgewicht befindet, nimmt die Form einer Kettenlinie an, welche durch die Funktion $f(x) = a \cosh(\frac{x}{a})$ beschrieben wird. Sei $P(x) := (x, f(x))$ und $a = 2$.

- (a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-1, 1]$.
- (b) Berechnen Sie den Krümmungsradius der Kurve für $x = 0$ und für $x = 1$.
- (c) Berechnen Sie den Krümmungsmittelpunkt M für $x = 1$. Zeichnen Sie M in den Graphen ein. (M liegt auf der Normalen n zur Tangente t . Die Normale schneidet die x -Achse in S)
- (d) Berechnen Sie für $x = 1$ die Streckenlängen $|\overline{MP}|$ und $|\overline{PS}|$. Ist zum Resultat etwas zu bemerken?

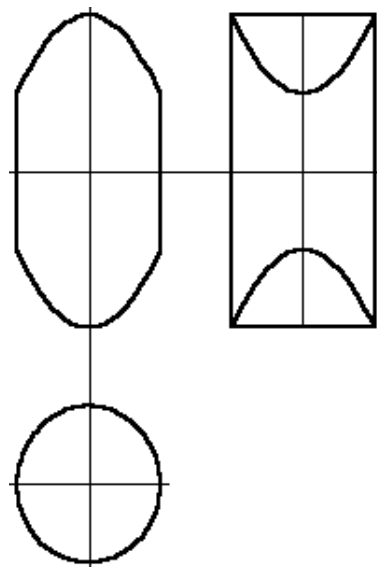
B (8)**(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 5(x^2 - 2x - 15)$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$. Die Graphen beider Funktionen schneiden einander in zwei Punkten auf der x -Achse. Im rechten Schnittpunkt fallen ausserdem die Tangenten an die beiden Kurven zusammen.

- Berechne a , b und c exakt. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)
- Zeichne die Graphen der beiden Kurven im Intervall $[-4, 6]$.
- Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den beiden Kurven eingeschlossen wird.

B (9)**(12 Punkte)**

Ein rotationssymmetrischer Schwimmkörper, der ausser an den beiden Deckflächen die Form eines Zylinders hat, ist derart in ein Koordinatensystem gestellt, dass die z -Achse gleich der Rotationsachse ist. Der Zylinderradius ist gleich 5 und die beiden Deckflächen des Körpers werden durch die Funktion $z = f_d(x, y) = -x^2 + 50$ und $z = f_g(x, y) = -f_d(x, y)$ gegeben. (Vgl. Skizze mit Grundriss, Aufriss und Seitenriss.)



- Berechne das Volumen des Körpers exakt. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)
 - Berechne die Oberfläche des Körpers. (Wenn eine exakte Berechnung nicht möglich ist, genügt auch eine numerische Näherung. Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)
- Zusatzaufgabe** (kann weggelassen werden): **(6 Punkte)**
- Der Körper wird axial zur x -Achse zylindrisch durchbohrt. Es entsteht ein Loch mit dem Durchmesser 5. Berechne das Restvolumen des Körpers. (Wenn eine exakte Berechnung nicht möglich ist, genügt auch eine numerische Näherung. Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

B (10)**(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen $f(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $g(x) = 2 - f(x)$.

- (a) Skizziere $f(x)$ und $g(x)$ und bezeichne $f(x)$ mit dem sonst üblichen Namen.
- (b) Die Funktion $g(x)$ soll im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ durch $u(x) = a \cdot \cos(x) + b$ approximiert werden. Bestimme die Parameter a und b so, dass $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - u(x))^2 dx$ minimal wird.
(Der Lösungsweg muss dokumentiert sein. Numerische Werte genügen.)
- (c) $u(0) = ?$, $u(-\frac{\pi}{2}) = ?$, $u(\frac{\pi}{2}) = ?$

B (11)**(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x)$, die einen Kreisbogen mit Radius $r = 1$ sowie Kreismittelpunkt $(x_M/y_M) = (0/1)$ beschreibt und durch den Punkt $P(0/2)$ geht. Weiter ist die Funktion $g(x) = k \cdot \cos(\alpha x + \beta) + c$ gegeben. k, α, β und c sind Parameter.

Die Parameter k, α, β und c sind so zu bestimmen, dass die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in P möglichst gut zueinander passen. Damit ist gemeint, dass die folgenden Kriterien erfüllt sein müssen: Die Graphen von f und g fallen im Punkte P zusammen, haben in P eine gemeinsame Tangente und auch dieselbe Krümmung.

Durch diese drei Bedingungen kann man drei Parameter als Funktion des vierten Parameters bestimmen.

- (a) Bestimme k, β und c als Funktion von α . (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)
- (b) Bestimme anschliessend die Potenzreihenentwicklungen von f und von $g = g_\alpha$. (Die Reihen können mit Hilfe von Tabellenbüchern gefunden werden. Die Angabe von Gliedern bis zur Ordnung 10 genügen.)
- (c) Entscheide anhand der nun vorliegenden Potenzreihenentwicklung von $g_\alpha(x) - f(x)$, was mit $|g_\alpha(x) - f(x)|$ passiert, wenn α gegen 0 strebt.
- (d) Berechne damit $\lim_{\alpha \rightarrow 0} g_\alpha(x)$ und skizziere in diesem Falle f und g_α .
- (e) Beschreibe den Einfluss von α auf das Annäherungsverhalten von $g_\alpha(x)$ an $f(x)$

B (12)**(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = 3x^2 - 5xy + 4y^2 - y + x - 1$ im Gebiet G ,
 $G = I \times I = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

- (a) Berechne die Extrema oder Sattelpunkte im Innern und auf dem Rand.
- (b) Durch den Rand ∂G von G lassen sich vier Geraden legen. Untersuche, in welchen Punkten P_i auf diesen vier Geraden die maximale Richtungsableitung lokale Extrema hat. (Untersuche dazu die Länge des Gradienten.) Entscheide, ob die gefundenen Extrema Minima oder Maxima sind.
- (c) Skizziere G mit den berechneten Extrema von f . Zeichne ebenfalls die berechneten Punkte P_i ein. Verbinde je zwei sich entsprechende Punkte auf gegenüberliegenden Geraden und kontrolliere, ob sich die Verbindungsgeraden in einem ausgezeichneten Punkt kreuzen. Was stellt man fest? Ist etwas bemerkenswert?
- (d) Bestimme, in welchen Punkten der Geraden $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ in der Grundebene $f(x, y)$ extremal wird. (Die Punkte auf dem Rand sind auch in die Betrachtung einzubeziehen.)

B (13)**(12 Punkte)**

Ein in der Tropenzone geplantes Stadion hat nach dem Vorbild einer römischen Arena die Form eines Zylinders mit einem Durchmesser von 250 Metern und einer Mantelhöhe von 25 Metern. Um die heutzutage gefürchtete UV-Strahlung abzuhalten wird vorgeschlagen, das Bauwerk zeltartig mit Hilfe eines bis zum Boden reichenden Rotationsparaboloides zu überdachen, wobei dieses geplante Zelt den oberen Zylinderrand berührt. (Skizziere die Situation!)

- (a) Berechne den Zeltradius und die Zelthöhe, wenn der umbaute Raum minimal werden soll.
- (b) Berechne im Falle des minimalen Volumens die Mantellänge vom Boden bis zum obersten Punkt des Zeltes numerisch.
- (c) Berechne den Zeltradius und die Zelthöhe, wenn die Zeltoberfläche minimal werden soll. (Falls diese Aufgabe auf den ersten Blick zu schwierig erscheinen mag, so versuche man zuerst, die Oberfläche des einfachst möglichen Rotationsparaboloids zu berechnen. Für die Integration können Hilfsmittel wie Tabellen etc. verwendet werden.)

B (14)**(12 Punkte)**

- (a) Berechnen Sie von $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + (2x^2 - 1)y^2$ die Extrema unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.
- (b) Sei $G = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Zu $f(x, y)$ wird eine Konstante c addiert, so dass das Integral $\int_G f(x, y) dG = 0$ wird. Wie gross muss c gewählt werden?

Hinweis: Für $y > 0$ kann z.B. y^2 geeignet substituiert werden. (Es gibt mehr als eine Möglichkeit ...)

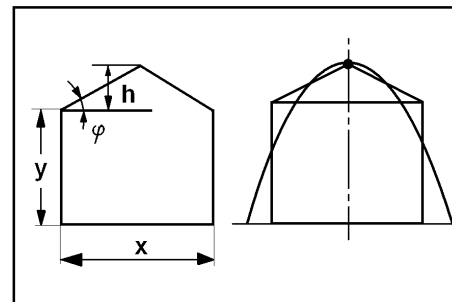
B (15)**(12 Punkte)**

Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $P_1(2/3)$, $P_2(7, 2)$ und $P_3(5/6)$. Im Innern befindet sich ein Punkt $P(x, y)$, der zu P_i einen Abstand d_i hat ($i = 1, 2, 3$).

- (a) Berechne $P(x, y)$ so, dass die Summe der Abstandquadrate $\sum_{i=1}^3 d_i^2$ minimal wird.
- (b) Entscheide mit Begründung, ob es sich bei P um einen der folgenden Punkte handelt: Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt oder Inkreismittelpunkt.
- (c) Begründe den vorhin gefundenen Sachverhalt allgemein.

B (16)**(12 Punkte)**

Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Hauses. Der Umfang $u = 40 \text{ m}$ ist gegeben. x, y, h sind unbekannt.



- (a) Berechne x, y, h so, dass der Flächeninhalt A maximal wird. Berechne auch A_{max} .
- (b) Bestimme die Funktionsgleichung der eingezeichneten Parabel durch die Dachspitze, wenn die Parabel mit der x -Achse ebenfalls den Flächeninhalt A_{max} umschliesst.

B (17)**(12 Punkte)**

Die grösste Nullstelle $x_0(\lambda)$ von $y(x, \lambda) = x^3 + 2(\lambda^2 + 1)x + 2\sqrt{6}\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ soll berechnet werden.

- (a) Zeige, dass $y(x, \lambda) = y_\lambda(x)$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ genau eine Nullstelle hat.
Hinweis: Untersuche die Ableitung $y_x'(x, \lambda)$.
- (b) Bestimme die grösste Nullstelle von $x_0(\lambda)$.
Hinweis: Es muss gelten: $y_0(x_0(\lambda), \lambda) = 0 \Rightarrow y_\lambda' + y_x' \cdot x_\lambda' = 0$ (Kettenregel)
 $\Rightarrow x_\lambda' = \dots = 0$ (Extremum!)
 Setze das so berechnete λ in $y(x, \lambda)$ ein ...
 verifiziere, dass tatsächlich die grösste und nicht die kleinste Nullstelle gefunden worden ist.

B (18)**(12 Punkte)**

Für das Integral $\int_0^1 \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx$ ist keine elementare Stammfunktion bekannt. Um trotzdem zu einer Abschätzung zu kommen, gehen wir wie folgt vor:

- (a) Benütze die Potenzreihenentwicklung für den Cosinus für $x_0 = 0$, um den Integranden wie folgt zu approximieren:

$$f(x) = \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} \approx \sum_{k=0}^{10} a_k x^k$$

- (b) Versuche, für die Approximation von $f(x)$, $x \in [0, 1]$, den Fehler abzuschätzen.
- (c) Verwende das gewonnene Resultat, um $\int_0^1 \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx$ zu approximieren.
- (d) Versuche, für $\int_0^1 \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx$ den Fehler abzuschätzen.

B (19) Begriff „Krümmungskreis“: Selbststudium**(12 Punkte)**

Im Graphen von $f(x) = x^2$ wird im Punkt $x = 0$ der Krümmungskreis eingezeichnet (Krümmungsradius ρ). P_0 sei ein Punkt auf der Kreisperipherie, $P_0 \neq (0, 0)$. Eine Kreistangente in P_0 mit dem Steigungswinkel φ , die nicht parallel zu einer Koordinatenachse liegt, schneidet die parabel in zwei Punkten P_1, P_2 .

- (a) Bestimme P_1 und P_2 für $\varphi = \frac{\pi}{6}$. (Numerisches Resultat genügt.)
- (b) Bestimme den Inhalt A der Fläche zwischen der Parabel und der Tangente (zwischen den Punkten P_1 und P_2).
- (c) Entscheide, ob $A < 3$ gilt oder nicht.

B (20)**(12 Punkte)**

Ein Gebiet D stellt die Oberfläche eines Sees dar, welche in einem xy -Koordinatensystem plaziert wird (x und y in km). die Tiefe in Metern unterhalb des Punktes (x, y) ist gegeben durch

$$z = f(x, y) = 300 - x^2 - 2y^2$$

- (a) Ein Boot befindet sich im Punkt $(10, 10)$ (d.h. am Ufer).
In welcher Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1(x, y) \\ a_2(x, y) \end{pmatrix} = \vec{a}(10, 10) = \begin{pmatrix} a_1(10, 10) \\ a_2(10, 10) \end{pmatrix}$ muss es fahren, damit die *Tiefe möglichst rasch abnimmt*?
- (b) Bestimme $\vec{a}(x, y) = \begin{pmatrix} a_1(x, y) \\ a_2(x, y) \end{pmatrix}$ für einen beliebigen Punkt (x, y) .
- (c) Der Kapitän wählt den Kurs so, dass in jedem Punkt die Richtung identisch ist mit der Richtung der stärksten Tiefenzunahme resp. Tiefenabnahme.
 $\leadsto \frac{dx(t)}{dt} = a_1(x, y), \frac{dy(t)}{dt} = a_2(x, y)$. Bestimme die Parameterdarstellung der Fahrtrurve, wenn das Schiff sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $(10, 10)$ befunden hat.

Hinweise: Normiere den Richtungsvektor nicht. Benütze folgende bekannte Tatsache:
 $(h(x) + c)' = (a \cdot e^{k \cdot x} + c)' = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x} = k \cdot h(x)$.

- (d) Berechne näherungsweise die Länge der Fahrtrurve vom Punkt $(10, 10)$ bis zum Punkt mit der grössten Tiefe.

B (21)**(12 Punkte)**

Gegeben sind die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u'(x) - \tan(x) \cdot u(x) &= -\sin(x) \\ x \cdot v'(x) &= v(x) + 4x \end{aligned}$$

- (a) Suchen Sie diejenige spezielle Lösung $u_0(x)$ der ersten Gleichung, die durch den Ursprung geht.
- (b) Berechnen Sie diejenige spezielle Lösung $v_0(x)$ der zweiten Gleichung, die die Bedingung $v_0(\pi) = u_0(\pi)$ erfüllt.
- (c) Berechnen Sie den Grenzwert der Steigung $\lim_{x \rightarrow \infty} v_0'(x)$ sowie das Minimum resp. das Infimum der Steigung.

B (22) Ausblick auf andere Semester**(12 Punkte)**

Ein harmonischer Oszillator (z.B. eine Masse an einer Feder) wird durch die Gleichung

$$m y''(t) + \mu y'(t) + k y(t) = F(t)$$

beschrieben. $F(t)$ ist die äussere Anregung, μ die Dämpfung. Um das Problem der Resonanz zu studieren, setzen wir $m = 1$, $\mu = 0$, $k = 1$ und für die äussere Anregung $F(t) = \sin(\omega_0 t)$. Für $t = 0$ befinde sich das System im Ruhezustand.

- (a) Bestimmen Sie für den beschriebenen Fall mit Hilfe der Laplace-Transformationen die Lösung in Abhängigkeit vom Parameter ω_0 .
- (b) Bestimmen Sie bei der gefundenen Lösung die Grösse ω_0 für den Resonanzfall.
- (c) Bestimmen Sie die Stossantwort zur Zeit $t = 0$ bei einer Dämpfung $\mu = 1$.
($m = 1$, $k = 1$ wie vorher.)

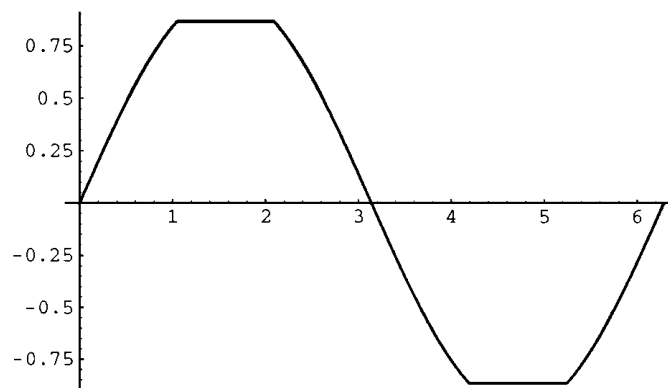
B (23) Ausblick auf andere Semester**(12 Punkte)**

In einem diskreten Zeitsystem soll die Impulsantwort $\{y_k\} = \{(-1)^k - 2^k\}$ ($k \geq 0$) sein.

- (a) Bestimmen Sie die Transferfunktion $G(z)$.
- (b) Entwerfen Sie zu $G(z)$ ein Blockdiagramm.
- (c) Bestimmen Sie die zugehörige Differenzengleichung.
- (d) Bestimmen Sie zu $G(z)$ die Schrittantwort.

B (24) Ausblick auf andere Semester**(12 Punkte)**

Die in der Figur über eine Periode gezeigte Funktion $nbsin(t)$ heisst unter „*neuer Bieler Sinus*“. In den Intervallen $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ und $(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ ist sie oben resp. unten horizontal abgeschnitten. Der neue Bieler Sinus lässt sich zusammensetzen aus der Funktion $\sin(t)$ sowie einer 2π -periodischen Hilfsfunktion $h(t)$, die 0 ist, ausser auf den folgenden Intervallen: Auf $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ ist sie gleich $(\sin(t) - \sin(\frac{\pi}{3}))$ und auf dem Intervall $(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ ist sie gleich $(\sin(t) + \sin(\frac{\pi}{3}))$.



- Skizzieren Sie $h(t)$.
- Entwickeln Sie $h(t)$ in eine Fourierreihe, indem Sie die Fourierkoeffizienten $a_0/2$, a_n und b_n bestimmen. (Falls die Koeffizienten nicht ständig gleich 0 sind, genügen die ersten vier, d.h. $n = 4$. Das gibt die Reihe $h_4(t)$.)
- Berechnen Sie numerisch die Abweichung $|h_4(t) - h(t)|$ an der Übergangsstelle $t = \frac{\pi}{3}$.
- Geben Sie in einer Gleichung die Beziehung zwischen $nbsin(t)$, $\sin(t)$ und $h(t)$.
- Berechnen Sie aus dieser Gleichung die Fourierkoeffizienten von $nbsin(t)$ bis zu $n = 4$.

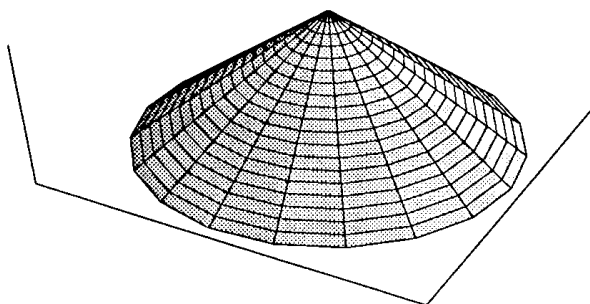
B (25) Ausblick auf andere Semester**(12 Punkte)**

- (a) Sei $\vec{u} = f(x, y, z) \cdot \vec{c}$. ($\vec{c}$ ist ein beliebiger, geeignet gewählter konstanter Vektor, f eine skalare Funktion.) Leiten Sie damit mit Hilfe des Divergenzsatzes folgende Gleichung her:

$$\iint_S f \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q (\nabla f) \, dV$$

(Der Nachweis für eine Komponente genügt.)

- (b)



In einem See wird eine kegelförmige Tauchkapsel mit dem Grundkreisradius R und der Höhe H so versenkt, dass die Rotationsachse senkrecht steht. Die Tiefe des Kapselbodens ab Wasseroberfläche sei z_0 . Da der Druck p in der Tiefe z unter der Wasseroberfläche dem Gewicht der Wassersäule über der Einheitsfläche entspricht, gilt für p die Formel: $p = k \cdot z$ ($k = \text{const.}$). Die auf ein Flächenelement $d\vec{S}$ wirkende Kraft berechnet sich bekanntlich nach der Formel $d\vec{F} = -p \cdot d\vec{S} = -p \cdot \vec{n} \cdot dS$. Damit kann die gesamte auf die Kapsel wirkende Auftriebskraft $-\iint_S p \cdot \vec{n} \, dS$ nach der im ersten Teil der Aufgabe hergeleiteten Gleichung berechnet werden. In einem geeignet gewählten Masssystem ist $R = 1$, $H = 3$. Berechnen Sie damit $\vec{F}$ als Funktion von z_0 . (Lassen Sie die Normierungskonstante k als Parameter stehen.) Spielt bei dieser Rechnung die Körperform eine Rolle? (Vergleichen Sie das Resultat mit dem *Gesetz von Archimedes*!)

B (26) Ausblick auf andere Semester**(12 Punkte)**

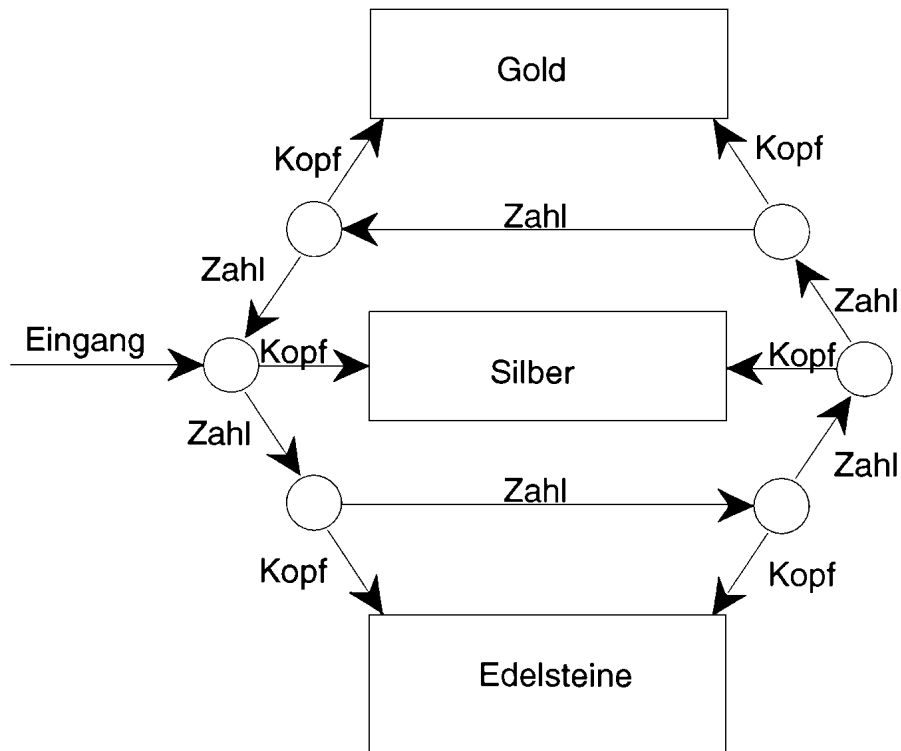
Untersuchen Sie das folgende Differentialgleichungssystem als System mit Eingang $f(t)$ und Ausgang $y(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} - x - 5y &= f(x) \\ \dot{y} + x + ky &= 0 \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die Transferfunktion $G(s)$.
 (b) Untersuchen Sie, in welchem Bereich für k das System stabil ist.

B (27) Ausblick auf andere Semester

(12 Punkte)



Sie betreten einen Labyrinth bei „Eingang“ (vgl. Skizze). Sie dürfen sich nur in Pfeilrichtung bewegen. Bei jeder Verzweigung entscheiden Sie mit einem Münzwurf (ideale Münze), welchen Gang Sie betreten. Das geht solange, bis Sie entweder bei den Edelsteinen, beim Silber oder beim Gold angelangt sind. Beachten Sie, dass Sie dazu vielleicht mehrere Durchgänge benötigen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen Sie

- (a) zu den Edelsteinen?
- (b) zum Silber?
- (c) zum Gold?

(Die Idee zu dieser Aufgabe ist einer Mittellehrerprüfung der Universität Basel entnommen.)

32.2 Link zu den Lösungen Phase 32

Hinweis: Die Lösungen sind aus Praktikabilitätsgründen mit *Mathematica* produziert worden. In den bald 20 Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter

<http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html>.

Vorteil dieses Verfahrens: Die Files mit dem reinen *Mathematica*-Source-Code in lassen sich damit sehr klein halten. Daher sind sie sehr einfach über Internet transportierbar. Es entstehen keine grossen Download-Zeiten und die Kosten des Speicherplatzes bei einem Provider übersteigen die gesetzten Grenzen nicht, denn die entstehenden File-Sammlungen haben beschränkte Grösse. Die abgearbeiteten Files mit dem Output mit Postscript-Graphiken sind allgemein sehr „schwer“, können aber jederzeit mit dem *Mathematica*-Programm aus dem Source-Code wieder erstellt werden. Dafür sind die mittels „Output beladenen Files“ erzeugten PDF-Files wieder klein, was sie transportabel macht.

Für den auf den folgenden Seiten wiedergegebene Output (bei der Alternativausgabe mittels des unten angegebenen klickbaren URL's via Internet abrufbar) sind daher die Seiten unabhängig nummeriert.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Lösungen zu den Prüfungsaufgaben des 1. Abschnittes:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_16.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/LEMAna_2_16.nb

32.3 Hinweise zur Prüfungsvorbereitung

Lade die folgenden Dateien herunter:

<http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/infoHTML.html#LT>

($\leadsto$ Links zur Lerntechnik)

<http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/RepetitionsplanVD.pdf>

($\leadsto$ Vorschlag für einen Repetitionsplan)

Den Rest des Kapitels muss jeder selbst schreiben...

Viel Glück!

Kapitel 33

Modulprüfungen

Modulprüfung 2007

Klasse M+E 06 / M+E 1

Mathematik, Analysis 2. Sem.

Zeit: 180 Minuten

Bedingungen:

- ⊗ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- ⊗ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊗ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊗ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊗ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊗ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊗ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊗ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊗ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊗ **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem ist die angegebene Anzahl von Punkten möglich.
- ⊗ Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als die bezeichnete Anzahl n Aufgaben gegeben sind, können n Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

27. August 2007

Modulprüfung in Analysis 2007

M+E 06 / M+E 1

Viel Glück !

Löse 7 der folgenden Aufgaben:

(Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

B (1)

(15 Punkte)

Gegeben ist eine Schraubenlinie

$$C_1 : \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad r = 1, \quad t \in I = [0, 4\pi].$$

Diese Schraubenlinie windet sich um einen senkrecht stehenden Zylinder mit Radius 1. Weiter ist eine zweite Kurve mit einer anderen, nicht mehr konstanten Steigung gegeben:

$$C_2 : \vec{w}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \\ t + \left(\frac{t}{10}\right)^2 \end{pmatrix}, \quad r = 1, \quad t \in I = [0, 4\pi].$$

- Zeige die beiden Schraubenlinien in einer einzigen Skizze.
- Berechne die Richtungsvektoren der beiden Kurven für $t_1 = 0$. Berechne auch den Winkel zwischen diesen beiden Richtungsvektoren. Was fällt auf?
- Berechne die Richtungsvektoren der beiden Kurven für $t_2 = 4\pi$ sowie den Winkel zwischen diesen beiden Richtungsvektoren.
- Berechne die beiden Kurvenlängen numerisch.
- Berechne das Kurvenintegral $\int_{C_1} \langle \vec{v}'(t), \vec{w}'(t) \rangle ds$, $ds = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| dt = |\vec{v}'(t)| dt$.

B (2)

(12 Punkte)

Gegeben sei $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$, $(x, y) \in D_f = [-\pi, \pi]^2$.

- Berechne die Lage allfälliger Extrema in D_f .
- Überprüfe die Identität $f(x, y) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$.
- Skizziere den Graphen und die Höhenlinienkarte.
- In der Grundebene ist die das Kurvengebilde $h(x, y) = \sin(x + y) - \cos(x - y) = 0$ gegeben. Suche für $x, y \geq 0$ allfällige Extrema auf der Funktionsfläche f , für die $h(x, y) = 0$ gilt.

B (3)**(15 Punkte)**

Ein Bauteil eines Apparates wird begrenzt durch

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in [-5, 5]^2, \quad z \leq 50.$$

- (a) Skizziere die Bauteilform. Benutze k_1, k_2, k_3, k_4 als Bezeichnungen für die gebogenen Kanten. Trage diese an den seitlichen senkrechten ebenen Flächen in der Skizze ein.
- (b) Berechne den Volumeninhalt des Bauteils.
- (c) Berechne die Längen der Bögen k_i , an denen Kabel angebracht werden sollen.
- (d) Berechne approximativ den Inhalt des krummen Teils der Oberfläche (Funktionsfläche von f).
- (e) Berechne den Inhalt des krummen Teils der Oberfläche $f(x, y)$, welcher infolge eines nachträglich angebrachten Bohrlochs mit Radius 2 auftritt (Oberflächenverlust, Bohrlochachse gleich z -Achse).

B (4)**(15 Punkte)**

- (a) Suche die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \sin(x)$ mit Zentrum $x_0 = 2\pi$ bis und mit den Gliedern der Ordnung 10 (Approximation mit Polynomgrad 10).
- (b) Suche damit die entsprechende Approximation $u(t)$ der Funktion $\sin(\frac{1}{t})$, indem du die Variable x durch $\frac{1}{t}$ ersetzt.
- (c) Vergleiche die Plots von $u(t)$ und $\sin(\frac{1}{t})$ für $t \in I = [0.1, 0.4]$.
- (d) Durch einen genauen graphischen Vergleich kann man vermutlich ablesen, dass die grösste Abweichung zwischen $u(t)$ und $\sin(\frac{1}{t})$ in I bei $t_1 = 0.4$ liegen muss. Kontrolliere diese Vermutung und berechne die auf $\sin(\frac{1}{t})$ bezogene grösste prozentuale Abweichung.
- (e) Ermittle mittels $\int_{0.1}^x u(t) dt$ eine Näherungsformel für das Integral $\int_{0.1}^x \sin(\frac{1}{t}) dt$ für $t \in [0.1, 0.4]$ und extrahiere daraus diejenigen Terme, in denen die Koeffizienten einen Betrag grösser als 0.1 besitzen. (Nur diese werden bewertet.)

B (5)**(9 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung (Anfangswertsproblem 1. Ordnung)

$$12y'(x) - 16\frac{x}{y(x)} = 0, \quad y(0) = 1.$$

- (a) Skizziere das Richtungsfeld.
- (b) Berechne die Lösung der Differentialgleichung bei der gegebenen Anfangsbedingung und zeichne die Lösung $y(x)$ ins Richtungsfeld ein.
- (c) Berechne $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x}$ und ergründe damit, um welche Art Wachstum es sich bei $y(x)$ annähernd handelt.

B (6)**(15 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung:

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}$$

- (a) Löse zuerst die homogene Differentialgleichung .
- (b) Löse die inhomogene Differentialgleichung. Versuche dazu den Ansatz $y(t) = a \cdot t^2 \cdot e^{-t}$
- (c) Wieviele Integralkurven gehen durch den Origo und haben dort eine horizontale Tangente? Skizziere diese Kurve(n) über dem Definitionsbereich $D = [-2, 2]$.
- (d) Bestimme für diese Kurve(n) die vorhandenen Extremwertstellen. Die vorhandenen Integrationskonstanten sind dabei Parameter. Wieviele Extremwertstellen hat eine Kurve maximal?
- (e) Bestimme für diese Kurve(n) mit $y(-1) = \frac{e}{2}$, $y(0) = 1$ die Kurvenlängen zwischen $t = -1$ und $t = 1$. Eine numerische Näherung genügt.

B (7)**(15 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung (Anfangswertsproblem 2. Ordnung)

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

- (a) Berechne die Lösung der homogenen Differentialgleichung bei den gegebenen Anfangsbedingungen.
- (b) Skizziere die homogene Lösung über dem Intervall $I = [-1.5, 4]$.
- (c) Berechne die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bei den gegebenen Anfangsbedingungen.
- (d) Skizziere die inhomogene Lösung über dem Intervall $I = [-1.5, 4]$.
- (e) Vergleiche den Verlauf der homogenen und der inhomogenen Lösung: Skizziere die Differenzfunktion $d(x) = y_{inh}(x) - y_{hom}(x)$ über dem angegebenen Intervall. Was fällt auf beim Vergleich der Kurvenform von $d(x)$, $y_{inh}(x)$ und $y_{hom}(x)$?

B (8)**(15 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben werden unabhängig voneinander gleich bewertet:

- (a) Integriere von Hand die Reihe $S(x)$ über dem Intervall $[0, t]$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$

Beurteile die Konvergenz der erhaltenen Reihe $S_1(t)$ durch Vergleich mit einer bekannten Majorante.

- (b) Untersuche von Hand, ob die folgende Identität gültig ist:

$$\cos(x) \equiv \int \left(1 - \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 \right) dx + C$$

Kann man daraus schliessen, dass $\cos(x)$ zwei verschiedene Ableitungen besitzt?

- (c) Zeige oder widerlege von Hand:

$$e^x(x-n) = \int (-n+x+1) e^x dx + C$$

- (d)

$$w(x, n) := \frac{\partial (\ln(x\sqrt{x}) - \ln(x\sqrt{x-n}))}{\partial x}$$

- i. Berechne $w(x, n)$ von Hand, $x \in D_{w,n}$.

- ii. Berechne anschliessend daraus den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow n} w^{-1}(x, n)$ sowie

- iii. den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow n^2} w^{-1}(x, n)$.

- (e) Sei $\sin E(n) := (e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin(\frac{x}{\sqrt{2}}))$ und $\cos E(x) := (e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos(\frac{x}{\sqrt{2}}))$.

Untersuche von Hand, ob die folgenden Formeln richtig sind:

$$\int \int \sin E(x) dx dx = -\cos E(x) + C_1 x + C_2, \quad \int \int \cos E(x) dx dx = \sin E(x) + C_1 x + C_2$$

— ENDE —

33.1 Link zu den Lösungen

<http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html>.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VD2007Ana_S2_M1_E1_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VD2007Ana_S2_M1_E1_Loes.nb

Ende Analysis 2. Semester

ENDE