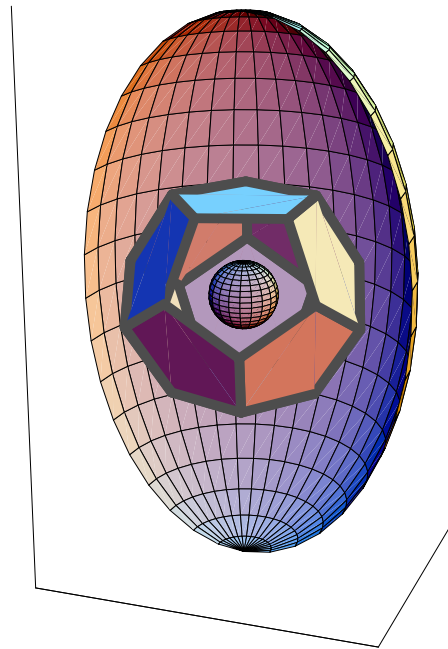


◇ Tests ◇ Tests ◇
◇ Archiv ◇
◇ 1 ◇
◇ Diplom ◇ 1989 – 2000 ◇ *Diplôme* ◇



von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel — HTA-Biel/BFH — HTI/BFH bis • *jusqu'à* 2000

Ausgabe vom 15. September 2007, Version 1.0.0 / d/f

Mit klickbaren Links • *Avec des lignes cliquables*

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

- *Produit avec PCTeX sous Win XP. Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

- *L'homme a trois occasions pour apprendre:
Premièrement par réflexion, c'est la plus noble;
deuxièmement par l'imitation, c'est la plus facile;
troisièmement par l'expérience, c'est la plus dure.*

(Selon Confucius)

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.

Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20

Büro B112 CH-3400 Burgdorf/BE

Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230

Mail: Siehe <http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html> unter „Koordinaten von R.W.“

(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

©2007

Die Urheberrechte für das verwendete graphische Material gehören dem Autor.

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

1	Einführung — Introduction	3
1.1	Gegenstand — Sujet	3
1.2	Gliederung — Gliederung	4
1.2.1	Sprachen — Langues	4
1.2.2	Gliederung — Gliederung	4
1.2.3	Ausnahmen — Exceptions	4
2	Archiv Teil 2	5
2.1	Inhalt	5
2.2	Test: Ungleich., Ungl'syst., Mengenl., Zahlenth., 1-dim. F'kt. — I/01	6
2.3	Test: 1-dim. Funkt., Gleich'syst., Ungleich'syst., Zahlenth. — I/02	7
2.4	Test: 1-dim. Funkt., Ungleich'syst., Mengenlehre — I/03	8
2.5	Test: 1-dim. Funktionen — I/04	10
2.6	Test: Funktionen, Vektorgeometrie — I/05	11
2.7	Test: Funktionen, Vektorgeometrie — I/06	12
2.8	Test: Vektorgeometrie — I/07	13
2.9	Test: Gleichungssysteme, Vektorgeometrie — I/08	14
2.10	Test: 1-dim. Differentialrechnung — I/09	15
2.11	Test: 1-dim. Diff'rechn., Diff'geom., Grenzwerte — I/10	16
2.12	Test: 1-dim. Diff'rechn., Diff'geom., Grenzwerte — I/11	17
2.13	Test: 1-dim. Integralrechnung — I/12	18
2.14	Test: 1-dim. Integralrechnung — I/13	19
2.15	Test: Statistik — I/14	20
2.16	Test: Statistik — I/15	22
2.17	Test: Statistik — I/16	24
2.18	Test: 1-dim. Diff'rechn., nichtlineare Gleich., Gleich.'syst. — I/17	25
2.19	Test: Det. und Matrizen, Diff'gleich., Statistik — I/18	26
2.20	Test: Grundlagen — I/19	28
2.21	Test: Grundlagen — I/20	29
2.22	Test: Grundlagen — I/21	30
2.23	Test: Grundlagen — I/22	31
2.24	Test: Alg., Zahlenth., Gleich., Grndl., Vekt.'geom. — I/23	32
2.25	Test: Grundlagen, Algebra, Funktionen, Grenzwerte — I/24	33
2.26	Test: Funktionen, Logik, Mengenl., Relat., Zahlenth. — I/25	35

2.27	Test: Funktionen, Logik, Mengenl., Relationen — I/26	36
2.28	Test: Logik, Mengenlehre., Relationen — I/27	37
2.29	Test: Logik, Mengenlehre., Relationen — I/28	39
2.30	Test: Logik, Mengenlehre., Relationen — I/29	41
2.31	Test: Funktionen, Logik, Mengenl., Relat., Ungleich. — I/30	42
2.32	Test: Logik, Mengenlehre — I/31	44
2.33	Test: Boolsche Algebra, Kombinatorik, Relationen — I/32	45
2.34	Test: Boolsche Algebra, Kombinatorik, Relationen — I/33	46
2.35	Test: Relationen, Funktionen, Ungleichungen — I/34	47
2.36	Test: Logik, Mengenl., Relat., Funkt., Zahlenth. — I/35	48
2.37	Test: Grundlagen, Funktionen, Schaltalgebra — I/36	49
2.38	Test: 1-dim. Differentialrechnung, Grenzwerte — I/37	50
2.39	Test: Funktionen, nichtlin. Ungleich., Vektorgeom. — I/38	51
2.40	Test: Zahlenth., Kombinatorik — Th. d. nomb., analyse comb. — I/39	52
2.41	Test: Kombinatorik, Logik, Mengenl., Zahlenth. — I/40	54
2.42	Test: Grundbegr., Grenzwerte, Funktionen, Algebra — I/41	55
2.43	Test: Funkt., nichtlin. Gleich.n, Zahlenth., Kombinatorik — I/42	56
2.44	Test: Boolsche Algebra, Zahlentheorie — I/43	57
2.45	Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen — I/44	58
2.46	Test: 1-dim. Int'rechn., Zahlentheorie — I/45	59
2.47	Test: Algebra und Zahlentheorie, Grenzwerte — I/46	60
2.48	Test: Kompl. Zahlen u. Abb., Funkt., 1-dim. Diff'rechn. — I/47	61
2.49	Test: Kompl. Zahlen, Alg. u. Zahlenth., komplexe Abb. — I/48	62
2.50	Test: Kompl. Zahlen, Alg. u. Zahlenth., komplexe Abb. — I/49	63
2.51	Test: Kompl. Zahlen, Alg. u. Zahlenth., komplexe Abb. — I/50	64
2.52	Test: Kompl. Zahlen, Alg. u. Zahlenth., komplexe Abb. — I/51	65
2.53	Test: Vekt'geom., Det. u. Matrizen, Eigenwerte, 1-dim. Int'rechn. — I/52	66
2.54	Test: Lin. Abb., 1-dim. Diff'rechn., kompl. Zahlen, Reihen — I/53	67
2.55	Test: Lin. Abb., 1-dim. Diff'rechn., kompl. Zahlen, Reihen — I/54	68
2.56	Test: Det. u. Matrizen, Gleich'syst., komplexe Zahlen — I/55	69
2.57	Test: Det. u. Matrizen, lin. Abb., Eigenwerte — I/56	70
2.58	Test: Lin. Abb., Reihen, Pot'reihen, kompl. Zahlen — I/57	71
2.59	Test: 1-dim. Diff'– u. Int'rechn., Vektorgeometrie — I/59	72
2.60	Test: Boolsche Alg., 1-dim. Diff.– u. Integr'rechn., Vekt'geom. — I/59	73
2.61	Test: Nichtlin.e Gleich., Diff'gleich., Numerik — I/60	74
2.62	Test: Nichtlin. Gleich., 1-dim. Int'rechn., Vekt'geom. — I/61	75
2.63	Test: Grenzwerte, nichtlin. Gl. u. Ungleich., Zahlenth. — I/62	76

Kapitel • Chapitre 1

Einführung — Introduction

1.1 Gegenstand — Sujet

In dieser Sammlung ist eine Auswahl von Aufgaben zusammengefasst, welche in den Jahren vor 2000 verwendet worden sind.

• *Dans cette collection, un choix de problèmes est rassemblé. Il s'agit de problèmes qui ont été utilisés dans les années avant 2000.*

Klickbare Links zu Skripten: • *Liens cliquables pour les cours:*

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html> (Skript-Download) • *Download cours*

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur in Papierform vorhanden. An eine gesamthafte Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.

• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale.*

1.2 Gliederung — Disposition

1.2.1 Sprachen — Langues

Bemerkung: • **Remarque:**

Da momentan nur noch wenige Serien auch in französischer Übersetzung vorliegen, wird im weiteren Text aus Kapazitätsgründen auf Übersetzungen verzichtet.

1.2.2 Gliederung — Disposition

- (1) Archiv Teil 1
- (2) Archiv Teil 2
- (3) Archiv Teil 3

1.2.3 Ausnahmen — Exceptions

In diesem Rahmen werden nicht herausgegeben: Tests aus speziellen und weiterführenden Teile der Mathematik, Informatik–Tests, Computeralgebra–Tests, Problemstellungen zu Semesterarbeiten aus Mathematik, Physik und Informatik.

Kapitel • Chapitre 2

Serien aus dem „Archiv Teil 2“

2.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormalig gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Stoffgebiete war nie vorhanden.

2.2 Test: Ungleichungen, Ungleichungssysteme, Mengenlehre, Zahlentheorie, Funktionen im $\mathbb{R}^1$ I/01

Abschrift • Copie

$$(1) \quad x = \frac{-1}{2 + \frac{-1}{2 + \frac{-1}{2 + \ddots}}}$$

$$(a) \quad x = ?$$

$$(b) \quad x \in \mathbb{Q} ?$$

$$(2) \quad \text{Skizziere } \mathbb{L} ! \bullet \text{ Esquisse de } \mathbb{L} ! \quad \rightsquigarrow \quad \left| \begin{array}{l} 3x + 2y \geq 6 \\ 2x - 3y \leq 3 \end{array} \right|$$

$$(3) \quad x + 1 \geq \cos(x) - 1 \rightsquigarrow \mathbb{L} = ?$$

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} \mathbb{L}_1 : x^2 + x - 2 \leq 0 \\ \mathbb{L}_1 : -x^2 + x + 2 \geq 0 \end{array} \right| \rightsquigarrow \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = ?$$

$$(5) \quad 2x^2 - 5x - 1 \geq x + 10 \rightsquigarrow \mathbb{L} = ?$$

$$(6) \quad |A| = 99, \quad |B| = 98, \quad |C| = 97, \quad |A \cap B| = 30, \quad |A \cap C| = 27, \quad |B \cap C| = 28, \quad |A \cap B \cap C| = 26.$$

$$(a) \quad |A \cup B \cup C| = ?$$

$$(b) \quad |(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)| = ?$$

$$(7) \quad (A \cup B) \cap C = \dots \cup \dots \rightsquigarrow \text{Durch eine Zeichnung erklären!} \bullet \text{Expliquer par un dessin!}$$

$$(8) \quad (a) \quad f(x) = x^2 - |[x]| \rightsquigarrow \text{Skizze!} \bullet \text{Esquisse!}$$

$$(b) \quad \text{Löse:} \bullet \text{Résoudre:} \quad x^2 - |[x]| = 1$$

$$(9) \quad (a) \quad g(x) = (x + 1) \operatorname{sgn}(x) \rightsquigarrow \text{Skizze von } g! \bullet \text{Esquisse de } g!$$

$$(b) \quad (x + 1) \operatorname{sgn}(x) = 0 \rightsquigarrow x = ?$$

$$(c) \quad (x + 1) \operatorname{sgn}(x) = -2 \rightsquigarrow x = ?$$

$$(10) \quad f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x), \quad g(x) = \sin(x) \cdot x^2$$

$$(a) \quad \text{Skizze!} \bullet \text{Esquisse!}$$

$$(b) \quad f(x) = g(x) \rightsquigarrow x = ?$$

Viel Glück!

WIR

2.3 Test: Funktionen im $\mathbb{R}^1$, Gleichungssysteme, Ungleichungssysteme, Zahlentheorie

I/02

Abschrift • Copie

(1) Löse: • *Résoudre*:
$$\left| \begin{array}{rcl} x - y & \leq & 1 \\ x + y & \geq & 1 \\ y & \geq & 2x - 6 \end{array} \right|$$

(2) (a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot): \leadsto$ Algebraische Struktur? • *Structure algébrique?*

(b) $a + b = 10, a^2 = 10b \leadsto a = ?, b = ?, a \in \mathbb{Q}?$

(3) (a) Löse: • *Résoudre*: $x^2 - 4x + 5 = 0$

(b) Skizziere: • *Esquisse*: $y = x^2 - 4x + 5$

(4) (a) Exakt: • *Exacte*: $\tan(60^\circ) = ?$

(b) Löse: • *Résoudre*: $\cos(x) = \frac{1}{2}$ ($\leadsto$ alle Lösungen!) • *Toutes les solutions!*

(5) Löse: • *Résoudre*:
$$\left| \begin{array}{rcl} -2x - y + 12 & = & 0 \\ x + y & = & 2 \\ x - 2y & = & 8 \\ 2x + y & = & 12 \end{array} \right|$$

(6) $\log_{10}(3) + 3 \log_{10}(2) = \log_{10}(x) \Rightarrow x = ?$

(7) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right) \Rightarrow x = ?$

(8) Auf wieviele verschiedene Arten kann man sechs Häuser mit sechs verschiedenen Farben kolorieren?

• *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut colorer six maisons de manières différentes?*

(9) $\text{kgVppmc}(1376528024, 1376528026) = ?$

(10) $0.0123456789\overline{0123456789} \dots = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a}{b} = ?$

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

2.4 Test: Funktionen im $\mathbb{R}^1$, Mengenlehre, Ungleichungssysteme

I/03

Abschrift • Copie

- (1) $A = [-11, 22)$, $B = (18, 60]$, $C = \mathbb{N}_0$, $D = (5, 22) \rightsquigarrow ((A \cup B) \cap C) \setminus (D \cap A) = ?$
- (2) Gebe eine Übersicht über die Teilmengen von $\mathbb{R}$, welche in unserer Mathematik wichtig sind. • *Donner une vue d'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont importants en mathématique.*
- (3) $y^2 - 3y - 4 = x \rightsquigarrow$ Lässt sich y als $f(x)$ darstellen? (Wie, wo?)
 • $y^2 - 3y - 4 = x \rightsquigarrow$ *Est-ce qu'on peut représenter y comme $f(x)$? (Comment, où?)*

(4)
$$\left| \begin{array}{rcl} -x + y & \leq & 3 \\ 3x - y & \geq & -10 \\ 2x + y & = & k \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array} \right|$$

Wie gross kann x maximal sein? (Skizze!)
 • *Quelle valeur maximale est-ce que k peut atteindre? (Esquisse!)*

- (5)
- | | |
|---------------------------------------|--|
| (a) $f_1(x) = x^2$ | (e) $f_5(x) = ax + b$ |
| (b) $f_2(x) = e^{-x^2}$ | (f) $f_6(x) = 3 \cos(2x - 4) + 8$ |
| (c) $f_3(x) = e^x$ | (g) $f_7(x) = \frac{2}{(\frac{x}{2})^2 + 3}$ |
| (d) $f_4(x) = \cos \frac{x}{\pi} + 4$ | |

Welche Funktion ist • *Quelle fonction est*

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| (a) monoton? • <i>monotone?</i> | (d) gerade? • <i>paire?</i> |
| (b) beschränkt? • <i>bornée?</i> | (e) ungerade? • <i>impaire?</i> |
| (c) periodisch? • <i>périodique?</i> | |
- (6) Pole und Asymptoten? • *Donner les pôles et les asymptotes:*

- | | |
|--|--|
| (a) $h_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ | (c) $h_3(x) = \frac{1}{2x - 1} + 2x - 1$ |
| (b) $h_2(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1}$ | (d) $h_1(x) = \frac{1}{x^2 - 1} - x^2 + 1$ |
- (7) $f(x) = \frac{1}{x} \rightsquigarrow$ Rechteck = • *Rectangle = Fig. $\left((0; 0), (1; 1), (x; f(x)), (0; f(x))\right)$.*
 $R(x) =$ Flächeninhalt von $Fig. = ?$ • *R(x) = Surface de Fig. = ?* %

(8) (a) $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$

i. $f(g(x)) = ?$

iii. $f(f(x)) = ?$

ii. $g(f(x)) = ?$

iv. $g(g(x)) = ?$

(b) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_2(x) = \sqrt{x}$

i. $f_1(f_2(f_3(x))) = ?$

iv. $f_2(f_3(f_1(x))) = ?$

ii. $f_1(f_3(f_2(x))) = ?$

v. $f_3(f_1(f_2(x))) = ?$

iii. $f_2(f_1(f_3(x))) = ?$

vi. $f_3(f_2(f_1(x))) = ?$

(9) $F(x) = \cos(2 \sin(e^{2x} - 1) + 1) + e^{2x}$, $g(x) = e^{2x-1}$, $F(x) = f(g(x))$

$$\Rightarrow f(x) = ?$$

(10) $M_1 = \{(x, y) \mid y = f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4\}$, $M_2 = \{(x, y) \mid y = f_2(x) = 3x + 6\}$

$$\Rightarrow M_1 \cap M_2 = ?$$

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

2.5 Test: Funktionen im $\mathbb{R}^1$,

I/04

Abschrift • Copie

(1) (a) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

i. Pole? • *Pôles?*iii. Nullstellen? • *Zéros?*ii. Asymptoten? • *Asymptotes?*iv. Graph? • *Graphe?*

(b) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}$

i. Pole? • *Pôles?*iii. Nullstellen? • *Zéros?*ii. Asymptoten? • *Asymptotes?*iv. Graph? • *Graphe?*

(2) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + (-1) + \frac{x}{10}$

(a) Pole? • *Pôles?*(c) Nullstellen? • *Zéros?*(b) Asymptoten? • *Asymptotes?*(d) Graph? • *Graphe?*

(3) $f(x) = \cos(x), g(x) = x + 1, h(x) = \sin(x)$

(a) $F(x) = h(g(f(x))) = ?$ (d) $F \rightsquigarrow$ gerade/ ungerade?• $F \rightsquigarrow$ paire/ impaire?(b) Graph von $F(x)$? • *Graphe de $F(x)$?*(c) Berechne die $F(x)_{\max}$!(e) $F(x) = -x^2 + \frac{1}{2} \rightsquigarrow x = ?$ • *Calculer les $F(x)_{\max}$!*(f) $F(x) = y \Rightarrow x = F^{-1}(y) = ?$

(4)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos^2(x) & x \leq 0 \\ x & x \in (0, 2] \\ -(x-1) & x > 2 \end{cases}$$

(a) Graph? • *Graphe?*(b) Maximum? • *Maximum?*(c) Nullstellen? • *Zéros?*(5) Skizze, Polarkoordinaten: • *Esquisse, coordonnées polaires:*

$$r(\varphi) = \left| 2 - \frac{\varphi}{10} \right|, \quad \varphi \in [6, 8\pi]$$

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

2.6 Test: Funktionen, Vektorgeometrie**I/05**

Abschrift • Copie

- (1) $\ln(3) - \ln(2) + \ln(6) - \ln(4) + \ln(9) - \ln(6) + \ln(12) - \ln(8) + \dots + \ln(300) - \ln(200) = ?$
- (2) $6x^2 - 2x + 1 + \ln(5^x) = 0 \Rightarrow x = ?$
- (3) $(\ln(x^4) - \ln(x^2) + 2)^3 - 126 = 0 \Rightarrow x = ?$
- (4) Gegeben sind die Punkte $P_1(0; 2)$, $P_2(3; 1)$, $P_3(5; -4)$, $P_4(8; 3)$, $P_5(3.5; 5)$. Weiter ist $a_1 = |\overline{P_1P_2}|$, $a_2 = |\overline{P_2P_3}|$, $a_3 = |\overline{P_3P_4}|$, $a_4 = |\overline{P_4P_5}|$, $a_5 = |\overline{P_5P_1}|$ und $A = \text{Flächeninhalt von } \triangle P_2P_3P_5$
- (a) $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = ?$
- (b) $A = ?$
- (5) Gegeben sind die Punkte $A(1; 1)$, $B(7; 0)$, $C(7; 6)$, $D(3; 5)$. Weiter ist $P(x; y) = \overline{AC} \cap \overline{BD}$. Berechne x und y .
- (6) $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$
Berechne λ und μ .
- (7) Gegeben sind die Punkte $A(1; 2; 3)$, $B(2; 4; 6)$, $C(-1; 3; 6)$. Bei B gilt $\beta = \angle(\overline{BA}, \overline{BC})$. Untersuche, ob $\beta = \perp$ gilt!

*Viel Glück!**Viel Glück!*

WIR

2.7 Test: Funktionen, Vektorgeometrie

I/06

Abschrift • Copie

(1)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{3x - 1}$$

(a) Pole? • *Pôles?*(b) Asymptoten? • *Asymptotes?*(2) $\arcsin(x) = \cos(x) \Rightarrow x \approx ?$ (Zeichnung) • *(Dessin)*(3) $r(\varphi) = |\cos(\frac{\varphi}{2})| + 1 \rightsquigarrow$ Graph? • *Graphe?*(4) $y(x) = (e^{x+4})^2 \rightsquigarrow$ Graph? • *Graphe?*(5) $2 \log_5(10) - \log_{10}(x) = 0 \Rightarrow x = ?$ (6) $\ln(1) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(6) + \ln(4) - \ln(8) + \ln(5) - \ln(10) + \ln(6) - \ln(12) + \dots - \dots = ?$ (7) $(\ln(x)) + 1 + e^x - 3 \Rightarrow x = ?$ (Zeichnung) • *(Dessin)*(8) $2\vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{x} + 2\vec{u} - 3\vec{c}) = \frac{1}{3}(2\vec{x} - \vec{u} + \vec{c}) \Rightarrow \vec{x} = ?$ (9) Gegeben: Konvexes Viereck $Fig(ABCD)$. • *Donné: quadrilatère convexe $Fig(ABCD)$.* M_1 = Seitenmittelpunkt von • *centre de côté de $\overline{AB}$,* M_2 = Seitenmittelpunkt von • *centre de côté de $\overline{BC}$,* M_3 = Seitenmittelpunkt von • *centre de côté de $\overline{CD}$,* M_4 = Seitenmittelpunkt von • *centre de côté de $\overline{DA}$.*Weiter gilt: • *En outre on sait: $E = \overline{M_1M_3} \cap \overline{M_2M_4}$.* $\rightsquigarrow$ Berechne E ! • *Calculer E !*(10) Gegeben: Punkte $A, B,$ (allgemeine Lage). • *Donné: Points $A, B,$ (position générale).*Zudem gilt: • *En outre on sait: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{BD}$.* $\rightsquigarrow$ Berechne λ ! • *Calculer λ !*

Viel Glück! — Bonne chance!

Viel Glück!

WIR

2.8 Test: Vektorgeometrie

I/07

Abschrift • Copie

- (1) Gegeben sind zwei Ebenen Φ und Ψ mit $\varphi = \angle(\Phi, \Psi)$:

$$\Phi: 3x + 2y - 5z + 8 = 0, \quad \Psi: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi = ?$$

- (2)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \lambda \cdot \vec{b}$$

(a) Berechne x so, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt.

(b) Berechne λ so, dass (falls möglich) $\langle \vec{a}, \vec{v} \rangle = 7$ gilt.

- (3) Eine Gerade g ist gegeben durch den Stützvektor $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und den Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weiter ist der Punkt $P(-4; 4)$ bekannt.

(a) Berechne die Distanz d der Geraden vom Ursprung.

(b) Berechne die Distanz d_1 der Geraden von P .

- (4) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit die Ebene $\Phi: \vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$ sowie $P_0(5; 5; 5)$.

(a) Berechne die Distanz von P_0 zu Φ .

(b) Berechne das Volumen des Tetraeders, welches durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in seiner Grösse definiert ist.

Viel Glück!

WIR

2.9 Test: Gleichungssysteme, Vektorgeometrie

I/08

Abschrift • Copie

- (1) Gegeben ist das Dreieck $\triangle OP_1P_2$ mit der Fläche F und $P_1(5; 2)$, $P_2(2; 3)$, $\vec{a} = \overrightarrow{OP_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OP_2}$, $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ sowie $h =$ Höhe von P_2 auf $\overline{OP_1}$. Hebe diese Situation in den 3-dimensionalen Raum mit $z = 0$ und berechne folgende Werte:
- (a) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = ?$ (d) $|F| = ?$
 (b) $\langle \vec{a}, (\vec{a} + \vec{b}) \rangle = ?$ (e) $h = ?$
 (c) $\vec{a} \times \vec{b}$ (f) $\varphi = ?$
- (2) Gegeben ist eine Gerade g , welche den Kreis mit dem Ursprung als Zentrum im Punkte $P(1; 2)$ tangiert. g schneidet die x -Achse in A und die y -Achse in B . g soll durch die Form $g: \vec{r}_g = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ dargestellt werden, $\vec{a}$ normiert.
- (a) $A(x_1; y_1) = ?$ (d) $\vec{a} = ?$
 (b) $B(x_2; y_2) = ?$ (e) Fläche von $\triangle OAB = ?$
- (3) Gegeben sind $P_1(x_0 = 3; 0; 0)$, $P_1(0; y_0 = 4; 0)$, $P_1(0; 0; z_0 = 12)$, $P(x_0; y_0; z_0)$ und O (Ursprung). O, P_1, P_2 und P_3 definieren einen Quader. Durch P_1, P_2 und P_3 ist eine Ebene $\Phi = \Phi(x_0, y_0, z_0)$ gegeben. Φ soll durch die Koordinatengleichung $\Phi: Ax + By + Cz + D$ mit $D = -144$ dargestellt werden.
- (a) Berechne A, B, C !
 (b) Berechne die Distanz von Φ zu O !
 (c) Berechne die Distanz von Φ zu P !
- (4) $\vec{r}_0$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ definieren ein Parallelepiped (auch Spat, Parallellflach, Parallelotop) mit dem Stützpunkt P_0 , $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$, und dem Volumeninhalt V . Weiter ist durch $\Phi: \vec{r}_\Phi = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ eine Ebene definiert und durch $g: \vec{r}_g = \vec{r}_0 + t\vec{c}$ eine Gerade. φ ist der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$, φ_1 der Winkel zwischen Φ und der Ebene, welche durch $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildet wird. Es gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) $V = ?$

(b) $\varphi = ?$

(c) $\varphi_1 = ?$

$$(5) \quad \left| \begin{array}{rcl} 2x + y + z + w & = & 5 \\ x + 2y + z + w & = & k \cdot 5 \\ x + y + 2z + w & = & u \cdot 5 \\ x + y + z + 2w & = & 5 \end{array} \right|$$

Berechne nachvollziehbar $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$

Viel Glück!

WIR

2.10 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$

I/09

Abschrift • Copie

(1) (a) $f(x) = e^x \cos(x) + \frac{1}{3} x^3 \sin(x) \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(b) $f(x) = (\sin(x) \cdot \arcsin(x)) \cdot \sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(c) $f(x) = \frac{x^x}{\ln(x)} \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(2) Berechne Nullstellen und Extrema: • *Calculer les zéros et les extrêmes:*

(a) $f(x) = 4 e^{-2x} \cdot \cos(2\pi x) - 3.9$

(b) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}\pi}$

(3) Gegeben: • *Donné:* $\triangle ABC$, $D \in \overline{AC}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, $|\overline{BD}| = 6$, $|\overline{AD}| = 5$, $|\overline{DC}| = 3$.
 $P_1, P_1 \in \overline{AB}$, $P_3 \in \overline{BC}$, $P_4 \in \overline{AC}$, $Fig.(P_1 P_2 P_3 P_4) = \text{Rechteck}$. • *rectangle.*

Sei • *Soit* $|\overline{P_1 P_2}| := x$. Flächeninhalt($Fig.(P_1 P_2 P_3 P_4)$) = $F(x)$

• $Surface(Fig.(P_1 P_2 P_3 P_4)) = F(x)$

$$F(x) \rightarrow \max \Rightarrow x = ?$$

(4) Gegeben: Kurve • *Donné: courbe* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $y = f(x)$

$$\alpha = \arctan(f'(x)), \quad x(t) = k \cdot \cos(\alpha) \cdot t, \quad y(t) = k \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$x[m], \quad y[m], \quad t[sec], \quad k \approx 5 \left[\frac{m}{sec} \right], \quad g \approx 9.81 \left[\frac{m}{sec^2} \right]$$

(a) Skizze? • *Esquisse?*

(b) $y(x) = ?$

(c) $x_1 > 0$, $f(x_1) = 0$, $x_1 = x_1(\alpha) \rightarrow \max \Rightarrow \alpha = ?$

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

2.11 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Differentialgeometrie und Kurven, Grenzwerte

I/10

Abschrift • Copie

-
- (1) $x(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$, $y = (t) = \tan(t)$, $\frac{dy}{dx} = ?$ für $t = 1$.
- (2) $f(x) = e^x$, $x = 1 \rightsquigarrow$ Krümmungsradius = ?
- (3) $f(x) = e^x$, $x = 1 \rightsquigarrow$ Mittelpunkt des Krümmungskreises = ?
- (4) $r(\varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$. $\rightsquigarrow$ Berechne für $\varphi = 15^\circ$ den Winkel zwischen Radius und Tangente (in Grad)!
- (5) Diskutiere $f(x) = \frac{x+5}{2-x}$.
- (6) Berechne die Extrema von $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.
- (7) Berechne den Steigungswinkel der Kurve (rad!) für $x = 2$:
- (a) $f(x) = \frac{\cos(x) \cdot \arccos(\frac{1}{x})}{x}$
- (b) $f(x) = x \cdot \tan(x) - \ln(\cosh(x))$
- (c)
- (8) (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) - x^4}{3x^2 - \sin(x) + 2x} = ?$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - e^{-x}}{x^6 - e^x} = ?$
- (9) Gegeben ist ein quadratisches Papier mit der Seitenlänge 10 cm. Aus diesem Papier wird die Mantelfläche einer quadratischen Pyramide ausgeschnitten. (Form eines Malteserkreuzes, aussen jedoch wie das Tatzen- oder Templerkreuz. Die Form wird an der Prüfung bei Bedarf mündlich erklärt.) x ist die Distanz von einer Quadratecke bis zum Beginn einer Tatze, wo man mit dem Schnitt beginnt (symmetrische Anordnung infolge der nachfolgenden Aufgabenstellung naheliegend).
- (a) Wie gross muss man x wählen, damit die Pyramide einen maximalen Volumeninhalt erhält?
- (b) Wie gross muss man x wählen, damit die Pyramide eine maximalen Manteloberfläche erhält?
- (10) *Literaturhausaufgabe:* Versuche herauszufinden, ob die eben errechnete Pyramidenform sich in einer ägyptischen Pyramide auffinden lässt. (Es ist eine Dokumentation zu erstellen. Termin nach mündlicher Mitteilung.)

Viel Glück!

WIR

2.12 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Differentialgeometrie und Kurven, Grenzwerte

I/11

Abschrift • Copie

- (1) $x(t) = t^3 + 3t^2 - 2t + 4$, $y(t) = t^4 - 2t^3 - t^2 - t + 4$, $\frac{dy}{dx} = ?$ für $t = 1$.
- (2) $f(x) = x^4 + 4x^2$, $x = 0 \rightsquigarrow$ Krümmungsradius = ?
- (3) $f(x) = x^4 + 4x^2$, $x = 0 \rightsquigarrow$ Mittelpunkt des Krümmungskreises = ?
- (4) $r(\varphi) = \varphi \cdot \cos(2\varphi)$. $\rightsquigarrow$ Berechne für $\varphi = \frac{\pi}{12}$ den Winkel zwischen Radius und Tangente (in rad)!
- (5) Diskutiere $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$.
- (6) Berechne die Extrema von $f(x) = 2e^{\cos^2(x)} + 4$.
- (7) Berechne den Steigungswinkel der Kurve (rad!) für $x = 1$:
- (a) $f(x) = x^{\ln(x)}$
- (b) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} + \frac{\sinh(x^2)}{x^2}$
- (8) (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2 - x^2) - (1 - x)^2}{x^2 - 2x + 1 - \sin(1 - x)} = ?$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 + e^x}{x - x^2 + e^{2x}} = ?$

Viel Glück!

WIR

2.13 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$

I/12

Abschrift • Copie

(1) Berechne möglichst exakt:

(Falls in einem Teilschritt eine Tabelle verwendet wird: Bitte exakte Referenz mit Seitenzahl u.s.w. angeben.)

(a) $\int_0^{\infty} (x^{-\frac{2}{5}} - x^{-2}) dx$

(d) $\int_0^2 \frac{(2x)^2}{5\pi} dx$

(b) $\int_1^5 \frac{\sqrt{2+50x^2}}{3} dx$

(e) $\int_1^2 \frac{(a \cdot t)^4}{1+t^5} dt$ (Rechnung zeigen!)

(c) $\int_0^{\pi} e^s \cdot \sin(x) ds$ (Rechnung zeigen!)

(f) $\int_0^1 \frac{\arccos(y)}{2\sqrt{1-y^2}} dy$

(2) (a) Berechne exakt den durch die Funktionen $f(x) = \sin(x) + \sin(\frac{x}{4}) + 7$ und

$g(x) = \cos(x) - \cos(3x) - 4$ begrenzten Flächeninhalt über dem Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$.

(b) Die Kurve $f(x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} = \sinh(4x)$ lässt man um die x -Achse rotieren. Berechne den Inhalt des entstehenden Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = 2$ exakt und numerisch.

(c) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Berechne auf 4 Stellen hinter dem Komma genau die Länge der Funktionskurve zwischen $x = 0$ und $x = 4$.

(d) Gegeben ist die Fläche zwischen der Kurve $f(x) = |\sin(x)|$ und der x -Achse über dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Berechne für diese Fläche den Schwerpunktsabstand y_S .

(e) Gegeben ist die Fläche zwischen der Kurve $f(x) = x^{-1}$ und der x -Achse über dem Intervall $[1, x_1]$.

Berechne für diese Fläche den Schwerpunktsabstand y_S für $x_1 \rightarrow \infty$.

Viel Glück!

WIR

2.14 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$

I/13

Abschrift • Copie

Version française: Voir <http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf>

(1) Berechne möglichst exakt:

(Falls in einem Teilschritt eine Tabelle verwendet wird: Bitte exakte Referenz mit Seitenzahl u.s.w. angeben.)

(a) $\int \frac{\sin(x)}{2 \cdot \sqrt{\cos(x)}} dx$

(d) $\int \sqrt{1 + 16x^2} dx$

(b) $\int_0^1 x^3 e^x dx$

(e) $\int_1^2 \frac{x^3}{2 + x^4} dx$

(c) $\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

(f) $\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

- (2) (a) Gegeben sind die Kurven $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$. Diese Beiden Kurven schneiden zusammen mit der y -Achse im 1. Quadranten eine Fläche aus. Skizziere die Situation und berechne den Flächeninhalt.
- (b) Gegeben sind die Kurven $y = \ln(x) + 4$ und $y = -1 - \sin^2(x)$ zwischen $x = 1$ und $x = 1.5$. Berechne den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Kurven über dem angegebenen Intervall. (Skizze!)
- (3) (a) Die Kurve $y = e^{2x} - e^x$ lässt man über dem Intervall $[0, 1]$ um die x -Achse rotieren. Berechne den Inhalt des Rotationskörpers. (Skizze!)
- (b) Gegeben ist die Kurve $y = f(x) = x - x^3$ über der x -Achse im 1. Quadranten. Berechne den y -Abstand des Schwerpunkts von der x -Achse: $y_S = ?$ (Skizze!)
- (4) (a) Gegeben ist die Kurve $y = f(x) = \cos(x)$ über dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$. Berechne die Kurvenlänge l . (Skizze!)
- (b) Gegeben ist die Kurve $r = r(\varphi) = \sin(\varphi)$ in Polarkoordinaten über dem Intervall $I = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ (d.h. $\varphi \in I$). Berechne den Inhalt der durch $r(\varphi)$ und die beiden Begrenzungsradien bei $\varphi = \frac{\pi}{6}$ und $\varphi = \frac{\pi}{3}$ eingeschlossene Sektorfläche. (Skizze!)

Viel Glück!

WIR

2.15 Test: Statistik**I/14**

Abschrift • *Copie*

- (1) Was ist eine diskrete Variable?
- (2) Was ist eine Hypothese?
- (3) Was sind Statistiken?
- (4) Was ist ein Schaubild?
- (5) Was ist Statistik?
- (6) Was ist die Arbeitsweise der Statistik?
- (7) Was ist induktive Statistik?
- (8) Was ist deduktive Statistik?
- (9) Beschreibung dieser Aufgabe siehe Rückseite!

% % %

- (9) In der nachstehenden Tabelle links findet man die Häufigkeitsverteilung der Monatslöhne in „narchischen Dollars“ von 65 Arbeitern bei der Firma Knarr um 1922. Die Prüfungsfragen dazu sind rechts genannt.

Lebensdauer	Anzahl
30–39.99	8
40–49.99	10
50–59.99	16
60–69.99	14
70–79.59	10
80–89.99	5
90–99.99	2
	Summe 65

- (a) Obergrenze der 4. Klasse?
- (b) Untergrenze der 6. Klasse?
- (c) Klassenmitte der 3. Klasse?
- (d) Klassengröße der ersten Klasse?
- (e) Klassenbreite?
- (f) Absolute Häufigkeit der 5. Klasse?
- (g) Relative Häufigkeit der 5. Klasse?
- (h) Prozentsatz der Arbeiter, die weniger verdienen als 70 n\$?
- (i) Prozentsatz der Arbeiter, die mindestens 70 n\$ verdienen?
- (j) Histogramm?
- (k) Häufigkeitspolygon?
- (l) Summenkurve?

Viel Glück!

2.16 Test: Statistik**I/15**

Abschrift • *Copie*

- (1) Womit beschäftigt sich Statistik?
- (2) Was ist induktive Statistik?
- (3) Was ist deduktive Statistik?
- (4) Was ist eine diskrete Variable?
- (5) Was ist die Arbeitsweise der Statistik?
- (6) Was sind Statistiken?
- (7) Was ist eine Hypothese?
- (8) Was ist ein Schaubild?
- (9) Beschreibung dieser Aufgabe siehe Rückseite!

% % %

- (9) In der nachstehenden Tabelle links findet man die Ergebnisse eines Tests der Lebensdauer in h eines elektronischen Bauteils XX01P–13H der Firma Knarr. Die Prüfungsfragen dazu sind rechts genannt.

Lebensdauer	Anzahl
100–199	14
200–299	46
300–399	58
400–499	76
500–599	68
600–699	62
700–799	48
800–899	22
900–999	6
	Summe 400

- (a) Obergrenze der 4. Klasse?
- (b) Untergrenze der 7. Klasse?
- (c) Klassenmitte der 8. Klasse?
- (d) Klasseränder der ersten Klasse?
- (e) Klassenbreite?
- (f) Absolute Häufigkeit der 3. Klasse?
- (g) Relative Häufigkeit der 3. Klasse?
- (h) Prozentsatz der Teile mit einer Lebensdauer nicht grösser als 600?
- (i) Prozentsatz der Teile mit einer Lebensdauer von mindestens 700?
- (j) Histogramm?
- (k) Häufigkeitspolygon?
- (l) Summenkurve?

Viel Glück!

2.17 Test: Statistik**I/16**

Abschrift • Copie

- (1) Wieso braucht man in der Statistik die Wahrscheinlichkeitstheorie?
- (2) Was ist ein Zufallsexperiment?
- (3) Was ist ein Ereignis?
- (4) Was ist die relative Häufigkeit eines Ereignisses?
- (5) Was ist ein Produktereignis?
- (6) Wie ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses definiert?
- (7) Was ist ein Summenereignis?
- (8) Erkläre $h(A \cup B) = (h(A) + h(B) - h(A \cap B))$.

Viel Glück!

WIR

2.18 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, nichtlineare Gleichungen, Gleichungssysteme

I/17

Abschrift • Copie

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, nichtlineare Gleichungen, Gleichungssysteme
I18 Differentialgleichungen

- (1) Gegeben ist die Funktion — *Soit donnée la fonction* $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x + 2$.
- (a) Kontrollieren Sie, ob diese Funktion bei $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 3.84732$ eine Nullstelle hat.
Controller si cette fonction a un zéro à $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 3.84732$.
- (b) Skizzieren Sie die Funktionskurve.
Dessiner une esquisse de la courbe de cette fonction.
- (c) Bestimmen Sie alle Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Kurve.
Trouver tous les zéros, les points extrêmes et les points d'inflexion de cette fonction.
- (2) Gegeben ist das Gleichungssystem — *Soit donné le système d'équations:*

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ r x - y - z &= 1 \\ 2x + y - 4z &= -3q \end{aligned} \tag{2.1}$$

- (a) Für $z = 3$ und $q = 1$ existiert eine Lösung. Berechne x, y und r .
Pour $z = 3$ et $q = 1$ il existe une solution. Calculer x, y et r .
- (b) Sei $q = -2$. Für welche r existieren keine resp. unendlich viele Lösungen?
Soit $q = -2$. Decider pour quels r il n'y a pas de solution resp. infiniment de solutions.

Viel Glück!

WIR

2.19 Test: Determinanten und Matrizen, Differentialgleichungen, Statistik I/18

Abschrift • Copie

- (1) Eine Gruppe von Studenten hat die Körpergrösse von Mitstudenten gemessen. Hier sind die Messdaten (in cm):

Un groupe d'étudiants a mesuré la taille d'un nombre d'étudiants de l'école. Voici les données (en cm):

173	178	177	173	184	161	162	169	154	188
177	177	169	183	185	183	173	192	182	181
176	177	169	177	173	163	192	165	156	159
175	173	179	178	177	168	158	183	187	175
174	173	179	169	179	168	174	194	160	187

- (a) Teilen Sie die Daten in Klassen ein mit den Klassenmitten 152, 157, 162, ... (Klassenbreite 5).
Classifier les données en classes dont les millieus sont 152, 157, 162, ... (largeur des classes 5).
- (b) Berechnen Sie Mittelwert sowie Standardabweichung der Klassen.
Calculer la valeur moyenne et la déviation standard.
- (c) Stellen Sie die Klassen in einem Balkendiagramm oder Histogramm dar.
Représenter ces classes à l'aide d'un diagramme de barre ou bien histogramme.
- (2) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:
Résoudre les équations différentielles suivantes:

(a)

$$y(x) y'(x) - x = 1, \quad y(1) = 2$$

(b)

$$y'(x) = e^{-x} y(x)$$

%

(3) Gegeben sind die folgenden Matrizen. *Soient données les matrices suivantes:*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M_4 sei die Inverse von M_3 — *soit M_4 l'inverse de M_3 ,*

$M_5 = M_4 \cdot M_2$.

Die Gerade g ist gegeben durch — *la droite g soit donnée par*

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

- (a) Berechnen Sie / *Calculer M_4 und / et M_5 .*
- (b) Berechnen Sie das Bild g' von g unter M_5 / *Calculer l'image g' de g : $\vec{v} = M_5 \cdot \vec{r}$.*
- (c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g' mit der Geraden $y = x$.
Calculer le point d'intersection de g' avec la droite $y = x$.
- (d) Bestimmen Sie das Volumen des Spats, der aufgespannt wird durch die Ortsvektoren zu den Punkten $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.
Vergleichen Sie das Resultat mit der Determinante von M_1 .
*Calculer le volume du parallélépipède étendu par les vecteurs liés aux points suivants: $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.
Comparez le résultat avec la valeur de la détermination de M_1 .*

Viel Glück!

2.20 Test: Grundlagen

I/19

Abschrift • Copie

(1) Vereinfache: $\frac{a-b}{\left(\frac{1}{a+b}\right)} : \frac{\left(\frac{a+1}{b} - \frac{b+1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a \cdot b}\right)}$

(2)

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 - x^2} \Rightarrow x = ?$$

- (3) Skizziere: In einem Quadrat mit dem Umkreisradius $r = 1$ wird über jeder Seite mit Zentrum = Seitenmittelpunkt nach innen ein Halbkreis gezeichnet. Alle Halbkreise inzidieren im Zentrum. So entsteht ein „vierblättriges Kleeblatt“, welches schraffiert werden soll. Um den Umkreis wird danach ein zweites Quadrat in paralleler Lage gezeichnet. Die Fläche zwischen dem Umkreis und dem äusseren Quadrat wird ebenfalls schraffiert. Berechne den Inhalt der gesamten schraffierten Fläche.
- (4) Skizziere: Um einen Kreis mit dem Radius 10 wird ein Trapez gezeichnet, welches an der Basis zwei spitze Innenwinkel besitzt. Die beiden Schenkel messen 24 und 26. Um das Trapez wird ein Rechteck gezeichnet, welches zu den beiden parallelen Trapezseiten kolliniare Seiten aufweist und daher in zwei Punkten zusammen mit dem Trapez den Kreis berührt.
- (a) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes!
- (b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks!

Viel Glück!

WIR

2.21 Test: Grundlagen

I/20

Abschrift • Copie

- (1) Gegeben seien die Seiten eines gleichschenkligen Trapezes:

$$\overline{AB} = 20, \quad \overline{CD} = 4, \quad \overline{AD} = \overline{BC} = 17.$$

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das entsteht, wenn man die Seite $\overline{AD}$ und die Seite $\overline{BC}$ bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert.

- (2) Ein Tankwagen soll drei Ölbehälter von 10.8 m^3 , 4.5 m^3 und 19.5 m^3 nacheinander füllen. Beim ersten Behälter liefert der Tankwagen eine bestimmte Menge Öl pro *Minute*. Beim zweiten wird diese Menge um $\frac{1}{3}$ herabgesetzt, und beim dritten liefert der Tankwagen 40 Liter pro *Minute* mehr als beim zweiten. Die totale Füllzeit für die beiden ersten Behälter ist gleich gross wie diejenige für den dritten allein. Wie gross ist diese Zeit?
- (3) (a) Man bestimme den Wert x , für welchen der folgende Ausdruck null ist:

$$\frac{2x}{4x^2 - 4x + 1} - \frac{2}{2x - 1}$$

- (b) Bestimme k so, dass die folgende Gleichung ersten Grades wird:

$$\frac{2x}{4x^2 - 4x + 1} - \frac{2}{2x - 1} = \frac{kx - 8}{4x^2 - 1}$$

- (4) (a) Vereinfache so weit wie möglich:

$$\left(\frac{x}{a} - 1\right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right)$$

- (b) Vereinfache so weit wie möglich:

$$\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}\right) : \left(\frac{b}{1+\frac{a}{b}}\right)$$

Viel Glück!

WIR

2.22 Test: Grundlagen

I/21

Abschrift • Copie

- (1) Gegeben seien die Seiten eines gleichschenkligen Trapezes:

$$\overline{AB} = 20, \quad \overline{CD} = 5, \quad \overline{AD} = \overline{BC} = 17.$$

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das entsteht, wenn man die Seite $\overline{AD}$ und die Seite $\overline{BC}$ bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert.

- (2) Ein Tankwagen soll drei Ölbehälter von 10.2 m^3 , 4.5 m^3 und 19.5 m^3 nacheinander füllen. Beim ersten Behälter liefert der Tankwagen eine bestimmte Menge Öl pro *Minute*. Beim zweiten wird diese Menge um $\frac{1}{3}$ herabgesetzt, und beim dritten liefert der Tankwagen 41 Liter pro *Minute* mehr als beim zweiten. Die totale Füllzeit für die beiden ersten Behälter ist gleich gross wie diejenige für den dritten allein. Wie gross ist diese Zeit?
- (3) (a) Man bestimme den Wert x , für welchen der folgende Ausdruck null ist:

$$\frac{2x}{2x^2 - 4x + 1} - \frac{2}{2x - 1}$$

- (b) Bestimme k so, dass die folgende Gleichung ersten Grades wird:

$$\frac{4x}{2x^2 - 4x + 1} - \frac{2}{2x - 1} = \frac{kx - 8}{4x^2 - 1}$$

- (4) (a) Vereinfache so weit wie möglich:

$$\left(\frac{x}{a} + 1\right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2 + x^2}\right)$$

- (b) Vereinfache so weit wie möglich:

$$\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}\right) : \left(\frac{b}{1 - \frac{a}{b}}\right)$$

Viel Glück!

WIR

2.23 Test: Grundlagen

I/22

Abschrift • Copie

- (1) Skizziere: Gegeben ist ein Kreis in einem Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt $M = O$ und dem Radius R . Mit Zentrum auf der negativen x -Achse wird ein zweiter Kreis mit dem Radius $r = \frac{R}{2}$ gezeichnet, welcher durch M und durch $(-R; 0)$ geht. Weiter wird durch $(-r; 0)$ die Senkrechte h zur x -Achse errichtet. Schraffiere die Menge der Punkte, welche innerhalb des grossen Kreises, aber ausserhalb des kleinen Kreises und rechts von h liegen. Diese Fläche nennen wir A .

(a) Berechne den Inhalt von A exakt.

(b) Setze $|A| = x \cdot r^2$ und berechne x , wenn π durch $\frac{22}{7}$ sowie $\sqrt{3}$ durch $\frac{7}{4}$ approximiert wird.

- (2) Skizziere: Um einen Kreis mit dem Radius 5 wird ein Trapez gezeichnet, welches an der Basis zwei spitze Innenwinkel besitzt. Die beiden Schenkel messen 12 und 13. Um das Trapez wird ein Rechteck gezeichnet, welches zu den beiden parallelen Trapezseiten kolliniare Seiten aufweist und daher in zwei Punkten zusammen mit dem Trapez den Kreis berührt.

(a) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes!

(b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks!

- (3) Vereinfache:

$$\left(2\frac{5}{6} - 1\frac{1}{2}\right)^2 \cdot x : \frac{(2\frac{5}{12}\lambda + 4\frac{1}{4}\lambda) \cdot \frac{6}{7}\mu^2}{3\frac{1}{2}x^2 : (3\frac{1}{5}\mu - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{4}\mu + \mu \cdot \frac{4}{5}) \cdot \lambda}$$

Das Resultat soll ein gekürzter Bruch sein. Die Aufgabe gilt als gelöst, wenn der Weg sichtbar ist. Erwartet wird eine Rechnung von Hand.

- (4)

$$s = 2 \cdot \left(\left(\frac{r}{3}\right)^3 - \left(\frac{r-1}{3}\right)^3\right), \quad t = \left(\left(\frac{r}{3}\right)^3 + \left(\frac{r-1}{3}\right)^3\right)$$

Um exakt wieviel ist der grössere der beiden Ausdrücke s und t grösser als der andere?

Viel Glück!

WIR

2.24 Test: Algebra, Zahlentheorie, Gleichungen, Grundlagen, Vektorgeometrie

I/23

Abschrift • Copie

- (1) Einer Kugel mit Radius r ist ein Drehzylinder mit Radius ρ und der Höhe h eingeschrieben worden, dessen Mantelfläche gleich der halben Kugeloberfläche ist. Berechne das Zylindervolumen.

(2)

$$\left(\frac{10-3x}{5} - \frac{2x-12}{3} + 2\right) \cdot \left(\frac{2x-1}{4x+11} - \frac{5}{21}\right)$$

Bestimme die Werte von x , für die dieses Produkt null ist.

(3)

$$\frac{5x-11}{4-3y} = \frac{10x-19}{7-6y}$$

Suche die ganzzahligen Lösungen (x, y) dieser Gleichung!

- (4) In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge 6 sind die Seitenmittelpunkte mit M_a , M_b , M_c bezeichnet (z.B. $a = \overline{BC}$). Mit dem Mittelpunkt A wird ein Kreisbogen von M_c nach M_b geschlagen und ebenso mit dem Mittelpunkt B ein Kreisbogen von M_c nach M_a . Über den halben Dreieckseiten $\overline{CM_a}$ und $\overline{CM_b}$ wird je ein Halbkreis nach aussen errichtet. Berechne nun den Umfang und den Inhalt der von den Kreisbogen begrenzten Figur $CM_bM_cM_aC$.

Viel Glück!

WIR

2.25 Test: Grundlagen, Algebra, Funktionen, Grenzwerte I/24

Abschrift • Copie

(1) (a)

$$\frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2} \leadsto x = ?$$

(b)

Vereinfache: $\frac{a^2 + a c - b^2 - b c}{a^2 - b^2 - 2 b c - c^2}$

(c)

$$x^2 - 4 x - 3 \leq 2 x + 1 \Rightarrow \mathbb{L} = ? \text{ (Exakt!)}$$

(2) Skizziere die Graphen:

(a) $f(x) = x - [x], \quad x \in [-2, 2]$

(b) $f(x) = \sin(|x - [x + 0.5]|), \quad x \in [-2, 2]$

(c) $f(x) = \sin(x) + \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in [-0.1, 0.1]$

(d) $f(x) = \frac{x-1}{|(\sqrt{x}-1)|}, \quad x \in \mathbb{R}$

(3) Bestimme so genau wie möglich Pole, Asymptoten und Monotoniebereiche:

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

(4) (a) $a_n = \cos(n) \cdot \sin\left(\frac{n + 2 n^2}{3 n^3 + 4 n^{\frac{1}{2}}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?$

(b) Gegeben ist eine quadratische Platte der Dicke 1 cm. Auf diese Platte wird eine zweite Platte der selben Dicke gelegt, deren Ecken mit den Seitenmittelpunkten der ersten Platte zusammenfallen. Nach dem gleichen Rezept wird auf die zweite Platte eine dritte gelegt und so fort, in alle Ewigkeit. So entsteht ein unendlich hoher Turm. Wie gross ist die gesamte obere Deckfläche aller Platten zusammen, die man aus einem Halbfabrikat ausschneiden müsste? (Das Ausschneiden ist der unendlich vielen Teile wegen natürlich in der Realität nicht möglich, aber rechnen kann man es trotzdem.)

(c) Gegeben ist eine Folge mit $x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$.

Zeige im Beispiel $a = 2$ dass die Folge konvergiert und berechne den Grenzwert allgemein für $a > 0$. Herleitung angeben!

(5) Schreibe in lateinischer Schrift:

Ἡεὐρεκα! Γεσχηαφφτ! Δασ Δνγ ηατ Σπασσ γεμαχητ!

- (6) (a) Skizziere die Graphen.
(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f, g und h .
(c) Wo ist f, g und h injektiv, surjektiv oder bijektiv?
- (7) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?
(a) Formel?
(b) Induktionsbeweis?
(c) Was ändert sich, wenn man statt Kreise Ellipsen betrachtet?
- (8) Man berechne mit Hilfe eines Algorithmus den g.g.T. und das k.g.V. von 123456 und 7890.
- (9) (a) Gesucht sind Additions- und Multiplikationstabellen der Restklassen modulo 6.
(b) Löse mit Hilfe der eben aufgestellten Tabellen die folgende Gleichung:

$$[5]_6 + [5]_6 \cdot [x]_6 = [3]_6$$

Viel Glück!

2.26 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen, Zahlentheorie

I/25

Abschrift • Copie

(1) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow X \wedge \neg Z)) \dot{\vee} Z \leadsto$ Tautologie?

(2) Verwandle den folgenden Ausdruck in eine vollständige NF:

$$(\neg Z \Rightarrow X \wedge Y) \uparrow (X \Rightarrow \neg Z)$$

(3) Gegeben sind in der Universalmenge U drei Mengen A , B und C . Berechne, falls möglich, mit Hilfe der nachfolgenden Angaben die Mächtigkeit $|\overline{A \cup B \cup C}|$:

$$|U| = 100, \quad |A| = 50, \quad |B| = 30, \quad |C| = 8, \quad |A \cap B| = 11, \quad |A \cap C| = 7, \quad B \cap C = \{\}$$

(4) $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (1, 6), (6, 1), (6, 6), (2, 6), (6, 2), (3, 6), (6, 3), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 6), (1, 6), (5, 4)\}$.

Erstelle einen Graphen und beurteile, welche Eigenschaft diese Relation hat.

(5)

$$f(x) = \sqrt{(x-3)(x-4)(x+1)}, \quad g(x) = x^{-5}, \quad h(x) = x^{-6}$$

(a) Skizziere die Graphen.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f, g und h .

(c) Wo ist f, g und h injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(6) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?

(a) Formel?

(b) Induktionsbeweis?

(c) Was ändert sich, wenn man statt Kreise Ellipsen betrachtet?

(7) Man berechne mit Hilfe eines Algorithmus den g.g.T. und das k.g.V. von 123456 und 7890.

(8) (a) Gesucht sind Additions- und Multiplikationstabellen der Restklassen modulo 6.

(b) Löse mit Hilfe der eben aufgestellten Tabellen die folgende Gleichung:

$$[5]_6 + [5]_6 \cdot [x]_6 = [3]_6$$

Viel Glück!

WIR

2.27 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen

I/26

Abschrift • Copie

(1) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge \neg C)) \dot{\vee} C \leadsto$ Tautologie?

(2) Verwandle den folgenden Ausdruck in eine vollständige NF:

$$(\neg C \Rightarrow A \wedge B) \uparrow (A \Rightarrow \neg C)$$

(3) Erkläre, was ein „indirekter“ Beweis ist.

(4) Gegeben sind in der Universalmenge G zwei Mengen A und B .

(a) $|\overline{A \cup B}| = ?$ (Formel)

(b) Beweise die Formel durch Rückgriff auf die Logik: $A \cup B = \{x \in G \mid \dots\}$.

(5) Gegeben sind in der Universalmenge G drei Mengen A , B und C . Berechne, falls möglich, mit Hilfe der nachfolgenden Angaben die Mächtigkeit $|\overline{A \cup B \cup C}|$:

$$|U| = 100, \quad |A| = 51, \quad |B| = 30, \quad |C| = 8, \quad |A \cap B| = 11, \quad |A \cap C| = 7, \quad B \cap C = \{\}$$

(6) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (1, 6), (6, 1), (6, 6), (2, 6), (6, 2), (3, 6), (6, 3), (3, 3), (2, 3), (4, 5), (3, 2), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 6), (1, 6), (5, 4)\}$.

Erstelle einen Graphen und beurteile, welche Eigenschaft diese Relation hat.

(7)

$$f_1(t) = \sqrt{(t-3)(t-4)(t+1)}, \quad f_2(t) = t^{-5}, \quad f_3(t) = t^{-6},$$

$$f_4(t) = \begin{cases} t^2 & t \text{ abbrechender Dezimalbruch} \\ \frac{1}{t} & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Skizziere die Graphen, falls möglich.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f_1, f_2, f_3 und f_4 .

(c) Wo ist f_1, f_2, f_3 und f_5 injektiv, surjektiv oder bijektiv?

Viel Glück!

WIR

2.28 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen

I/27

Abschrift • Copie

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Herleitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!

• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!*

- (1) $\neg A \vee \neg B \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel? • *Tableau de vérité?*
- (2) $\left[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)\right] \wedge \left[(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)\right] \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • *Simplifier!*
- (3) $\left((A \Rightarrow B) \Rightarrow C\right) \Rightarrow \left((C \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)\right) \equiv ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • *Simplifier!*
- (4) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • *Simplifier!*
- (5) $a \Rightarrow \neg b, c \Rightarrow a, b \vdash \neg c \rightsquigarrow$ Korrekt? • *Correct?*
- (6) $\neg C \Leftrightarrow (B \vee A) \rightsquigarrow$ Vollständige A.N.F.? • *a.N.F. complète?*
- (7) $|A \cup B| = |A| + \dots? \dots \rightsquigarrow$ „Euler–Venn“ verwenden! • *Utiliser "Euler–Venn"!*
Was passiert bei $A \cap B = \{\}$? • *Qu'est-ce qui se passe si $A \cap B = \{\}$?*
- (8) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \rightsquigarrow$ Beweis? • *Preuve?*
(Benutze die Definition von $A \times M$.) • *(Utiliser la définition de $A \times M$.)*
- (9) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \rightsquigarrow$ Beweis? • *Preuve?*
(Benutze die Definition von $A \cup M$.) • *(Utiliser la définition de $A \cup M$.)*
- (10) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \geq 7) \wedge (x < 20)\}, \quad N = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \leq 21) \wedge (x > 8)\}$
 - (a) $M \cup N = ?$
 - (b) $M \cap N = ?$
 - (c) $M \setminus N = ?$
 - (d) $M \triangle N = ?$
- (11) $M = \{a, b, c\}, \quad \mathcal{P}(M) = \{M, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\}$
 - (a) Hasse–Diagramm von $\mathcal{P}(M)$? (12 Pfeile!)
• *Diagramme de Hasse de $\mathcal{P}(M)$? (12 flèches!)*
 - (b) $M = \{a, b, c, d\} \rightsquigarrow$ Hasse–Diagramm zu $x =$ Pfeilen, $x = ?$ • *Diagramme de Hasse à x flèches, $x = ?$*

%

(12)

X	Y	Z	P
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

 $P \equiv ?$ (Formel) • (Formule)

Viel Glück! — Bonne chance!

2.29 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen

I/28

Abschrift • Copie

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Herleitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!

• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!*

- (1) $A \wedge C \wedge (B \vee \neg A \vee \neg C) \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel? • *Tableau de vérité?*
- (2) $\left[\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg B \vee A \vee \neg(A \wedge B) \right] \wedge B \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • *Simplifier!*
- (3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \left((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \right) \equiv ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • *Simplifier!*
- (4) $\left[(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) \right] \Leftrightarrow \left[(\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \right] \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • *Simplifier!*
- (5) $a \Rightarrow b, c \vee \neg b, \neg b \vdash \neg a \rightsquigarrow$ Korrekt? • *Correct?*
- (6) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \left((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \right) \rightsquigarrow$ Vollständige A.N.F.? • *a.N.F. complète?*
- (7) $|A \cap B| = |A| + \dots? \dots \rightsquigarrow$ „Euler–Venn“ verwenden! • *Utiliser "Euler–Venn"!*
Was passiert bei $A \cup B = A$? • *Qu'est-ce qui se passe si $A \cup B = A$?*
- (8) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \rightsquigarrow$ Beweis? • *Preuve?*
(Benutze die Definition von $A \times M$.) • *(Utiliser la définition de $A \times M$.)*
- (9) $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) \rightsquigarrow$ Beweis? • *Preuve?*
(Benutze die Definition von $A \cap M$.) • *(Utiliser la définition de $A \cap M$.)*
- (10) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid (x < 25) \wedge (x \geq 8)\}, \quad N = \{x \in \mathbb{N} \mid (x > 9) \wedge (x \leq 24)\}$
 - (a) $M \cup N = ?$
 - (b) $M \cap N = ?$
 - (c) $M \setminus N = ?$
 - (d) $M \triangle N = ?$
- (11) $M = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{P}(M) = \{M, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{\}$
 - (a) Hasse–Diagramm von $\mathcal{P}(M)$? (12 Pfeile!)
• *Diagramme de Hasse de $\mathcal{P}(M)$? (12 flèches!)*
 - (b) $M = \{1, 2, 3, 4\} \rightsquigarrow$ Hasse–Diagramm zu $x =$ Pfeilen, $x = ?$ • *Diagramme de Hasse à x flèches, $x = ?$*

%

(12)

X	Y	Z	P
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

 $P \equiv ?$ (Formel) • (Formule)

Viel Glück! — Bonne chance!

2.30 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen

I/29

Abschrift • Copie

- (1) $\neg A \vee (A \wedge C \wedge \neg B) \vee \neg C \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel? Suche damit die einfachste vollständige kanonische Normalform (a.N.F. oder k.N.F.)
- (2) Vereinfache durch Äquivalenzumformung:
- (a) $\left[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \right] \wedge \left[(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \right]$
- (b) $\left((A \Rightarrow B) \Rightarrow C \right) \Rightarrow \left((C \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \right)$
- (3) $a \Rightarrow \neg b, c \Rightarrow a, b \vdash \neg c \rightsquigarrow$ Ist dieser logische Schluss korrekt?
- (4) Beweise korrekt mit Hilfe der Definition: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (5) Auf einem Schiff sind 109 Feriengäste. 81 von ihnen lieben Spagetti, 24 essen gerne Kalamares und 35 lieben schwarze Oliven. 11 von ihnen möchten Spagetti und Kalamares, 35 hingegen Spagetti mit Oliven, 7 aber wollen Kalamares und Oliven. Wieviele Teller müssen bereitgestellt werden, auf denen es alle drei angebotene Sorten zu essen gibt?
- (6) Ist die folgende Relation $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ eine Äquivalenzrelation?

$$aRb : \Leftrightarrow (a^2 + b^2 \geq a \cdot b) \wedge \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

- (7) Gegeben ist eine Karte der Grösse einer Visitenkarte. Auf der vorderen Seite ist aufgedruckt: „Der Satz auf der Rückseite ist wahr“. Schaut man dann auf der Rückseite was dort steht, so findet man: „Der Satz auf der Vorderseite ist falsch“.
- Übersetze diesen Aussagenzusammenhang in die formale Logik und erkläre, wie sich das mit der Karte verhält, d.h. was man dort für eine logische Schlusskette finden kann.

Viel Glück!

WIR

2.31 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen, Ungleichungen

I/30

Abschrift • Copie

I30 Algebra !!!

(1)

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \vdash (B \Rightarrow (C \Rightarrow A))$$

(a) Ist dieser logische Schluss korrekt?

(b) Falls die letzte Frage mit nein beantwortet werden musste, so soll die eine kNF oder aNF gefunden werden (davon die einfachste Form).

(2) Der folgende Ausdruck ist so umzuformen, dass er möglichst kurz geschrieben werden kann:

$$\neg(\neg A \Rightarrow (\neg(A \wedge \neg B)))$$

(3) Gegeben sind die Intervalle $A = [2, 3]$, $B = [3, 5]$, $C = (5, 10)$. Beweise oder widerlege:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup A \times C$$

(4)

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 1), (3, 4), (4, 5), (2, 1), (1, 1), (3, 3), (5, 4), (4, 4), (4, 3), (5, 5), (2, 2)\}$$

Erstelle einen Graphen und beurteile, um welchen Relationstyp es sich handelt.

(5)

$$a\mathcal{R}b : \Leftrightarrow a^2 \geq \frac{1}{2}, \quad a, b \in (1, \infty) \rightsquigarrow \text{Relationstyp?}$$

(6) Skizziere den Graphen und bestimme den Definitionsbereich D_f :

$$f(x) = y = \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{1}{2}x - 1$$

(7) Skizziere den Graphen:

$$f(x) = (\sin(|x|) + |[x]|) \cdot \operatorname{sgn}(x), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

(8) Gegeben ist der Kettenbruch

$$x = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \ddots}}}. \rightsquigarrow \text{Frage: } x \in \mathbb{Q} ?$$

(9)

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 999 = ?$$

%

(10)

$$f(n) = \frac{1}{n^2 + 9} + 1, \quad D_f = \mathbb{N}$$

(a) f injektiv?(b) $W_f = ?$ (c) f bijektiv bezüglich W_f ?

(11) Löse:

$$(x - 2)(x - 3) \geq (x + 1)(x + 2)$$

(12)

$$I_1 = (0, 7), \quad I_2 = [1.5, 5], \quad I_3 = (3, 9] \Rightarrow I = I_1 \setminus (I_2 \cap I_3) = ?, \quad |I| = ?$$

Viel Glück!

2.32 Test: Logik, Mengenlehre**I/31**

Abschrift • Copie

(1) $((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg A \wedge B \wedge C)$

(a) Stelle die Wahrheitstabelle auf!

(b) Suche die zugehörige k.N.F.!

(c) Suche die zugehörige a.N.F.!

(2) Vereinfache mit Hilfe von Äquivalenzumformungen:

$$\left[(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee C) \right] \Leftrightarrow \left[(A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C) \right]$$

(3) Beweise korrekt mit Hilfe der Definitionen:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(4) In den letzten drei Wochen haben sich bei der Polizei 101 Personen Autodiebstähle angemeldet. 45 fahren BMW, 50 VW und 31 AX. 18 melden gleich zwei Diebstähle, nämlich BMW und VW an, 15 melden BMW und AX an und 8 VW und AX. Der Polizei ist bekannt, dass in ihrem Einzugsgebiet 5 Personen wohnen, welche mehr als zwei Autos besitzen. Geht es hier mit rechten Dingen zu?

Viel Glück!

WIR

2.33 Test: Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen I/32

Abschrift • Copie

Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen

• *Algèbre de Boole, analyse combinatoire, relations*

- (1) $(x_3 + \bar{x}_2)x_2 + (x_3 + x_1)x_3 + x_3 = ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen, Rechnen! • *Simplifier, calculer!*
- (2) $abcd + a\bar{b}cd + \bar{a}bcd + \bar{a}b\bar{c}d + abc\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d = ?$
 $\rightsquigarrow$ Karnaugh!
- (3) Konstruiere eine Schaltung, die 3 einstellige Dualzahlen addieren kann.
 • *Construire un circuit pour faire additionner 3 nombres binaires.*
- (a) Wertetabelle • *Tableau des valeurs*
- (b) A.N.F. (Schreibweise der Booleschen Algebra)
 • *A.N.F. (façon d'écriture selon l'algèbre de Boole)*
- (c) Vereinfachung (Karnaugh) • *Simplification (Karnaugh)*
- (4) Aussagenlogik, Verbandstheorie, Boolesche Algebra, Schaltalgebra $\rightsquigarrow$ Unterschiede?
 • *Logique propositionnelle, théorie des treillis, algèbre de Boole, algèbre des circuits*
 $\rightsquigarrow$ différences?
- (5) Auf wieviele Arten kann man 8 Autos auf 11 Parkplätze stellen?
 • *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut parquer 8 voitures sur 11 places?*
- (6) Gegeben: Ziffern 1, 1, 2, 3, 4. Wieviele 5-ziffrige Zahlen kann man damit bilden?
 • *Donné: Chiffres 1, 1, 2, 3, 4. Combien de nombres à 5 places est-ce qu'on peut former avec ces éléments?*
- (7) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (1, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$
- (a) Ist mit R eine Funktion gegeben? • *Est-ce que R est une fonction?*
- (b) Ist mit R eine strenge Ordnungsrelation gegeben?
 • *Est-ce que R est une relation d'ordre stricte?*

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

2.34 Test: Boolsche Algebra, Kombinatorik, Relationen I/33

Abschrift • Copie

Boolsche Algebra, Kombinatorik, Relationen

• *Algèbre de Boole, analyse combinatoire, relations*

- (1) $x_3 x_2 x_1 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_1 x_3 = ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen, Rechnen! • *Simplifier, calculer!*
- (2) $abc d + \bar{a} \bar{b} c d + \bar{a} b c d + \bar{a} \bar{b} c \bar{d} + \bar{a} b c \bar{d} + a b \bar{c} d + a \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} b \bar{c} d = ?$
 $\rightsquigarrow$ Karnaugh!
- (3) Konstruiere eine Schaltung, die 3 einstellige Dualzahlen addieren kann.
 • *Construire un circuit pour faire additionner 3 nombres binaires.*
- (a) Wertetabelle • *Tableau des valeurs*
- (b) A.N.F. (Schreibweise der Booleschen Algebra)
 • *A.N.F. (façon d'écriture selon l'algèbre de Boole)*
- (c) Vereinfachung (Karnaugh) • *Simplification (Karnaugh)*
- (4) Aussagenlogik, Verbandstheorie, Boolsche Algebra, Schaltalgebra $\rightsquigarrow$ Unterschiede?
 • *Logique propositionnelle, théorie des treillis, algèbre de Boole, algèbre des circuits*
 $\rightsquigarrow$ différences?
- (5) Auf wieviele Arten kann man 36 Spielkarten an 4 Spieler verteilen?
 • *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut distribuer un jeu de cartes avec 36 cartes à 4 joueurs?*
- (6) Gegeben: Ziffern 1, 1, 2, 2, 8. Wieviele 5-ziffrige Zahlen kann man damit bilden?
 • *Donné: Chiffres 1, 1, 2, 2, 8. Combien de nombres à 5 places est-ce qu'on peut former avec ces éléments?*
- (7) $R = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \gamma), (\alpha, \gamma), (\delta, \delta), (\delta, \varepsilon), (\varepsilon, \delta), (\varepsilon, \varepsilon)\}$
- (a) Ist mit R eine Funktion gegeben? • *Est-ce que R est une fonction?*
- (b) Ist mit R eine strenge Ordnungsrelation gegeben?
 • *Est-ce que R est une relation d'ordre stricte?*

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

2.35 Test: Relationen, Funktionen, Ungleichungen**I/34**

Abschrift • Copie

Version française: Voir <http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf>**(1)** Untersuche und begründe, ob der folgende Sachverhalt richtig ist:

$$(f \text{ bijektiv}) \wedge (g \text{ bijektiv}) \Rightarrow (f \circ g \text{ bijektiv})$$

(2) $f(x) = 2x^2 + 8x - 35$, $g(x) = x + 10$. Wo ist dann die folgende Aussage richtig?

$$(f(x) < g(x)) \wedge (6.5x < 0)$$

(3) Gegeben: $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. Gesucht sind:

(a) Wertetabelle?

(d) Eventuelle Nullstellen des Graphen?

(b) Graph?

(e) Wo ist $f(x) = \sqrt{x}$?(c) y -Achsenabschnitt?**(4)** $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = [x]$, $h(x) = x^2$.(a) Bestimme $\Phi = h \circ g \circ f$.(d) Ist Φ surjektiv?(b) Bestimme D_Φ .(e) Ist Φ injektiv?(c) Bestimme W_Φ .(f) Ist Φ bijektiv?*Viel Glück!*

WIR

2.36 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen, Funktionen, Zahlentheorie I/35

Abschrift • Copie

- (1) $\left((x = y) \Rightarrow (y = z) \right) \Rightarrow (a < z) \vdash \left((a < z) \Rightarrow ((z = y) \Rightarrow (y = x)) \right) \rightsquigarrow$ korrekt?

- (2)

X	Y	Z	W	$f(X, Y, Z, W)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

 $f(X, Y, Z, W) \equiv ?$ (a.N.F.)

- (3) In einem Stadion sind 548 Personen. 100 von ihnen haben einen CH-Pass, 200 einen F-Pass, 300 einen I-Pass. 30 haben sogar einen CH- und einen F-Pass, 15 einen F- und einen I-Pass, 20 einen CH- und einen I-Pass. Wieviele haben alle 3 Pässe? (Sofern die Konstellation logisch korrekt ist.)
- (4) Beweise oder widerlege exakt: $A \times (A \cap B) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
- (5) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{10, 15\}$, $C = \mathbb{N} \Rightarrow (A \times B) \cap (A \times C) = ?$
- (6) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $f(x) = \sqrt{x+2} - 2$, $h(x) = 3 \sin(x^2)$.
 (a) Wo ist $f(g(x))$ bijektiv?
 (b) Berechne $[(f \circ g) \circ h](x)$
- (7) Kreativ: Stelle $[a]_3 \cdot [b]_3 := [a \cdot b]_3 = [x]_3$ in einer Tabelle dar.
- (8) $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq a b$, $a, b \in \mathbb{Z}$ Äquivalenzrelation?
- (9) Wo gilt $-2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - 6x + 5$?

Viel Glück!

WIR

2.37 Test: Grundlagen, Funktionen, Schaltalgebra**I/36**

Abschrift • Copie

- (1) Erkläre den Begriff „mathematisches Modell“ am Beispiel der Schaltalgebra!
- (2) $f(x) = \sinh(x) \cdot \cosh(x)$
- (a) $D_f = ?$ (c) Wo ist f bijektiv?
- (b) $W_f = ?$ (d) Skizziere die Umkehrfunktion, falls eine solche existiert!
- (3) $\frac{\log_3(2) - \log_9(4)}{\log_\pi(\pi^2 - \pi)} + \ln(2e^e) = ?$ (Vereinfachen!)
- (4) Zwei 2-stellige Dualzahlen a und b werden multipliziert: $a \cdot b = c$.
 a hat die Form $a_1 \cdot a_2$ (Ziffern a_1, a_2). b hat die Form $b_1 \cdot b_1$ (Ziffern b_1, b_2).
- (a) Gesucht sind die algebraischen Ausdrücke für die nötigen Schaltungen
(mit „+“, „·“, „-“).
- (b) Vereinfache die Ausdrücke nach „Karnaugh“!

Viel Glück!

WIR

2.38 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Grenzwerte

I/37

Abschrift • Copie

(1) $\langle a_n \rangle = [a_1, a_2, a_3, \dots] = [-2, -2, -4, -6, 16, \dots]$

(a) $a_{10} = ?$

(b) Konvergiert die Folge?

(2) $\langle a_n \rangle \rightsquigarrow a_n = \cos(n) \cdot \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n} + \frac{\cos(n)}{n^2}$

(a) Konvergiert die Folge für $n \rightarrow \infty$?

(b) Was ist allenfalls der Grenzwert?

(3) $f(x) = \frac{\sin(x - \pi) \cdot (x - \pi) + \cos(x - \pi) \cdot e^{\frac{x - \pi}{2}} - \pi}{x^2 - \pi} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = ?$

(4)

(a) $\left(\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+3)} \right)' = ?$

(b) $\left(\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot e^x - 2e^{-\cos(x)} \right)' = ?$

(5) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 8x + 4$

Steigungswinkel der Tangente an die Kurve für $x = 160$? (In rad, auf 5 Stellen genau!)

Viel Glück!

WIR

2.39 Test: Funktionen, nichtlineare Ungleichungen, Vektorgeometrie

I/38

Abschrift • Copie

(1)

$$f(x) = ax + b, \quad g(x) = cx + d, \quad (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

Was gelten zwischen a, b, c, d für Beziehungen?

(2) Entwerfe von Hand den Graphen von $\sin(\tan(|x|))$ in $[-\pi, \pi]$. Mache dazu eine vernünftige Wertetabelle.

(3) Löse: $\frac{1}{4}x^2 - 2x - 5 > \frac{1}{3}x + 6$.

(4)

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 8x}{-x^2 + 5x + 7}$$

(a) Polstellen?

(b) Asymptoten?

(c) Funktionsgleichung(en) der Asymptoten?

(d) Graph?

(5) Gegeben ist die Gerade g durch $P(-1; 4)$ und $Q(3; 7)$ sowie die Gerade h mit $h \perp g$ und $P \in h$.

(a) Bestimme die Funktionsgleichung $g: x \mapsto g(x)$.

(b) Bestimme die Funktionsgleichung $h: x \mapsto h(x)$.

(c) Wo ist $h(x) = 0$?

Viel Glück!

WIR

2.40 Test: Zahlentheorie ($\mathbb{N}$) Kombinatorik— Théorie des nombres ($\mathbb{N}$), analyse combinatoire I/39

Abschrift • Copie

Hinweis: Beweise $\leadsto$ vollständige Induktion. • *Indication: Preuves $\leadsto$ Induction complète.*

(1) Gesetz und Beweis: • *Loi et preuve:* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = ?$

(Nur für den Beweis werden Punkte erteilt.)

• *(Les points seront donnés seulement pour la preuve.)*

(2) Beweise: in einem konvexen n -Eck gibt es $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ Diagonalen.

• *Prouver: Dans un polygone convexe à n sommets il y a $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ diagonales.*

(3) Beweise: • *Prouver:* $\forall n \in \mathbb{N} : s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n \cdot n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(4)

$$\frac{(2n+1)^2}{8} = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

Warum funktioniert hier die vollständige Induktion nicht?

• *Pourquoi ici l'induction complète ne fonctionne-t-elle pas?*

(5)

$1 \cdot 2$	$= 2$	$= 6/3$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3$	$= 8$	$= 24/3$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4$	$= 20$	$= 60/3$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$	$= 40$	$= 120/3$

Allgemeines Gesetz ? — Beweis?

• *Loi générale? — Preuve?*

(6) Erste Runde eines Schachturniers mit 14 Spielern: Auf wieviele Arten kann man 7 Paare bilden?

• *Première partie d'un tournoi d'échecs avec 14 joueurs: De combien de manières peut-on composer les 7 couples de joueurs?*

(7)

R
O O
X X X
A A A A
N N N N N
E E E E E E

Auf wieviele Arten kann man in diesem Schema den Namen „ROXANE“ lesen? Regel: Keine Buchstaben überspringen! (Roxane: Gattin Alexanders des Grossen.)

• *De combien de manières différentes peut-on lire le nom de "Roxane" dans ce schéma? Règle: Interdit de dépasser des lettres. (Roxane: L'épouse d'Alexandre le grand.)*

%

(8)

$$M = \{x, y, z \in \mathbb{N} \mid x + y + z = 100\} \Rightarrow |M| = ?$$

Hinweis: $|M|$ = Anzahl Lösungen von $x + y + z = 100$, $x, y, z \in \mathbb{N}$.

- *Indication:* $|M|$ = Nombre de solutions de $x + y + z = 100$, $x, y, z \in \mathbb{N}$.

(9) Wieviele innere Schnittpunkte haben die Diagonalen eines konvexen n -Ecks?

- *Combien de points d'intersection intérieurs les diagonales d'un polygone convexe à n sommets ont-elles?*

Untersuche, wieviele Eckpunkte nötig sind, um einen Schnittpunkt zu erzeugen. Wo schneiden sich die Diagonalen durch diese Eckpunkte? Wie kann man hier die Kombinatorik anwenden?

- *Chercher combien de sommets sont nécessaires pour produire un point d'intersection. Où les diagonales par ces sommets ont-elles les points d'intersection? Comment est-ce qu'on peut appliquer maintenant l'analyse combinatoire?*

Viel Glück!

2.41 Test: Kombinatorik, Logik, Mengenlehre, Zahlentheorie

I/40

Abschrift • Copie

- (1) Beweise mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$(q^n - 1) = (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q + 1) \cdot (q - 1)$$

- (2) In einem kartesischen Koordinatensystem sind auf der x -Achse die Punkte $P_1(1; 0)$, $P_2(2; 0)$, $\dots$, $P_n(n; 0)$ und auf der y -Achse die Punkte $Q_1(0; 1)$, $Q_2(0; 2)$, $\dots$, $Q_n(0; n)$ gegeben. Damit werden folgende Geraden gezeichnet: $g_1 = \overline{P_1 Q_n}$, $g_2 = \overline{P_2 Q_{n-1}}$, $g_3 = \overline{P_3 Q_{n-2}}$, $\dots$, $g_n = \overline{P_n Q_1}$.

- (a) Skizziere die Situation.
- (b) Wieviele geschlossene Flächen entstehen durch eine solche Konstruktion mit n Geraden g_k und den beiden Achsen? Beweise die Vermutung!
- (c) Wieviele Schnittpunkte inklusive Achsenschnittpunkte entstehen total?
- (3) Gegeben ist eine Tolleiter mit 8 Tönen. Der Komponist will 4 Takte mit je 8 Achteltönen erzeugen. Wieviele verschiedene Kompositionen ohne Pausen sind möglich?
- (4) Ist der Ausdruck $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow \neg A \Rightarrow X$ eine Tautologie, eine Kontraposition oder keines von beiden?
- (5) Ermittle die Anzahl Teilmengen von U :

$$U = \{\{A\}, \{A, \{A\}\}, \{A, A, \{A\}, \{A\}\} \cup \{\{A\}\}\}$$

Viel Glück!

WIR

2.42 Test: Grundbegriffe, Grenzwerte, Funktionen, Algebra I/41

Abschrift • Copie

- (1) Warum kann man nicht allgemein behaupten, dass die folgende Gleichung richtig sei?

$$\frac{0}{0} = 1$$

- (2) Berechne, falls möglich, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin(\cos(n))}{n + \sin(n)}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2n + 1.1}}{\sqrt[5]{n^2 - 2n + 1}}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ? \quad a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{(??)^n}$

(3) $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

- (a) Zeige, dass $\langle a_n \rangle$ konvergiert.

- (b) Versuche, numerisch einen Grenzwert zu beobachten. Lässt sich hier eine Vermutung formulieren?

(4) Bestimme den folgenden Limes: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2.x)^n}{2-x} \right)$.

- (5) Vergleiche die Mächtigkeit der Intervalle $[0, 1]$ und $[0, 4]$. (Begründung!)

- (6) Erkläre resp. definiere die folgenden Ausdrücke:

(a) Gleichmässige Stetigkeit auf I

(c) Reelle Zahl

(b) Algebraisch irrationale Zahl

(d) Zahlenkörper

(7) Gegeben ist der Ausdruck $(\pi^{\frac{11}{17\pi+\pi}})^{\pi} \cdot (e^e)^{\frac{1}{e}} \cdot e^{(e^{\frac{1}{e}})} \cdot (e^{\frac{11}{17\pi+\pi}})^{\pi}$.

- (a) Vereinfache den Ausdruck.

- (b) Approximiere den Ausdruck numerisch.

Viel Glück!

WIR

2.43 Test: Funktionen, nichtlineare Gleichungen, Zahlentheorie, Kombinatorik I/42

Abschrift • Copie

(1) Gegeben sind die Ziffern 4, 9, 1, 1, 9, 9, 0. Wieviele 7-ziffrige Zahlen zwischen 2'000'000 und 6'000'000 kann man damit bilden?

(2) Wieviele Lösungen mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ hat die folgende Gleichung?

$$x + y + z = 100$$

(3) Sporttoto: 13 Spiele sind zu beurteilen. Für jedes Spiel hat man die Möglichkeit, 1, x oder 2 anzukreuzen. Wieviele verschiedenen Lösungen kann man setzen?

(4) Vereinfache: $((k+1)! - k \cdot k!) \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) \binom{2k-1}{k-1} \cdot k! = ?$

(5) Vereinfache: $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+1} = ?$

(6) Löse die Gleichung: $\tan(x) \cdot \cot(x) = 0.6384$.

(7) Skizziere die Funktion $f : x \mapsto y = \arctan(x)$ und löse die Gleichung $\arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

(8) Skizziere in Polarkoordinaten: $r(\varphi) = \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \varphi^2$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

(9) Berechne möglichst exakt: $\log_{3.7}\left(\frac{1}{3.6}\right) + \log_{3.7}(3.6) = ?$

(10) Berechne möglichst exakt: $\log_{(e^2)}(e^\pi) = ?$

Bemerkung: Die meisten Aufgaben sind relativ einfach und geben nicht sehr viel zu tun. Löse diejenigen Aufgaben zuerst, die dir am einfachsten vorkommen und versuche, mit 5 Minuten pro Aufgabe auszukommen.

Viel Glück!

2.44 Test: Boolesche Algebra, Zahlentheorie**I/43**

Abschrift • Copie

- (1)**
- Vereinfache so weit wie möglich den Booleschen Ausdruck:

$$d + \bar{d}(a b c + \bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(d + d c)(d + e f) + (a \bar{d})$$

- (2)**
- Dreistellige Dualzahlen
- a
- ,
- b
- und
- c
- sollen mit Hilfe einer Schaltung addiert werden.

- (a) Erstelle die Tabelle der Leitwerte.
 (b) Leite daraus einfache Boolesche Ausdrücke für die Schaltungen ab.
 (c) Vereinfache die Ausdrücke so weit wie möglich. Die Schalterzahl soll minimal sein.
 Dazu soll man mit „Serie“, „Parallel“ und „Negation“ auskommen.

- (3)**
- Beweise die folgenden Aussagen, falls möglich: („|“ bedeutet „teilt“)

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} : k \mid (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3)$$

- (4)**
- Beweise:
- $\forall_{n \in \mathbb{N}} : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n \cdot n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- .

- (5)**
- Gegeben sind die folgenden Gleichungen:

$1 \cdot 2$	$= 2$	$= 6/3$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3$	$= 8$	$= 24/3$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4$	$= 20$	$= 60/3$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$	$= 40$	$= 120/3$

Suche das allgemeine Gesetz und beweise es!

Viel Glück!

WIR

2.45 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen I/44

Abschrift • Copie

(1) Berechne:

(a) $(2 - i) + (-i)^{\frac{1}{2}} \cdot (-i)^{\frac{1}{2}} - i^3$

(b) $\frac{(2 + i)(1 + i)}{(2 - i)}$

(2) Stelle graphisch möglichst exakt dar: $\sqrt[7]{2 - 3i}$.

(3) Suche $x \in \mathbb{N}$ minimal, so dass $127m + 552n = x$ ganzzahlige Lösungen m, n haben.

(4) Was ist ein Körper in der Algebra und was leistet er?

(5) Untersuche, ob folgendes System eine ganzzahlige Lösung $\{x, y\}$ hat:

$$\left| \begin{array}{lcl} x^2 - 13x + 5 & \equiv & 2x + y \pmod{11} \\ x + y & \equiv & 2 \pmod{3} \end{array} \right|$$

(6) Sei $p \in \mathbb{P}$, $k \in \mathbb{N} \cap \{-1, 0, 1, 2, \dots, p-1\}$, $a \in \mathbb{Z}$.

(a) Beweise: $p \mid \binom{p}{k}$.

(b) Kann man die eben erwähnte Beziehung sinnvoll mit vollständiger Induktion beweisen?

(c) Zeige: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Hinweis: Zeige $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ wie folgt:

Entwickle $\underbrace{(1 + (1 + \dots + 1))}_a^p$ und verwende das Resultat der letzten Teilaufgabe.

(7) Berechne mit der in der vorangegangenen Teilaufgabe gefundenen Beziehung das multiplikative Inverse von $[8]$ in $(\mathbb{Z}_{17}, +, \cdot)$.

Viel Glück!

WIR

2.46 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Zahlentheorie**I/45**

Abschrift • Copie

(1) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?

- (a) Suche die Formel!
- (b) Beweise die die Formel mit vollständiger Induktion!
- (c) Löse dieselbe Aufgabe für Dreiecke: Suche die Formel!
- (d) Löse dieselbe Aufgabe für Dreiecke: Beweise die die Formel mit vollständiger Induktion!

(2) Beweise: $\forall_{n \in \mathbb{N}} : \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) = 1$.**(3)** Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. K sei der Kreis um $O(0; 0)$ mit Radius r :

$$x = x(t) = r \cos(t), \quad y = y(t) = \dots, \quad t \in [0, 2\pi)$$

Berechne das Kurvenintegral von $f(x, y)$ über die Kurve K .**(4)** Die Hyperbel $y = x^{-1}$ wird geschnitten mit der Geraden $y = a \cdot x$.Wir betrachten die Fläche zwischen der x -Achse, der Geraden und der Hyperbel im 1. Quadranten. x_0 sei die x -Koordinate des Schnittpunkts der Geraden mit der Hyperbel. x_0 ist als Parameter zu verwenden.

- (a) Wie gross ist die beschriebene Fläche?
- (b) Wie gross ist das Volumen welches entsteht, wenn die Fläche um die x -Achse rotiert wird?
- (c) Ist die Oberfläche des Rotationskörpers endlich oder unendlich?

(5) $\int_0^1 e^x (\sin(2x) - \cos(x)) dx = ?$ (Herleitung zählt!)*Viel Glück!*

WIR

2.47 Test: Algebra und Zahlentheorie, Grenzwerte

I/46

Abschrift • Copie

(1) Berechne exakt: $k.g.V.(224424, 56322) = ?$ (Methode $\leadsto$ Euklidischer Algorithmus!)

(2) Verwandle $0.54\overline{54}\dots$ in einen gewöhnlichen, gekürzten Bruch!

(3) Berechne das Inverse von $[5]$ in $(\mathbb{Z}_{13}, \cdot)!$

(4) Berechne x resp. x und y jeweils vollumfänglich:

(a) $16 \equiv 22x \pmod{30}$

(b) $18x \equiv 1 \pmod{53}$

(c) System:
$$\left| \begin{array}{rcl} 4x + y & \equiv & 8 \pmod{12} \\ 2x - y & \equiv & 10 \pmod{12} \end{array} \right|$$

(5) Berechne den Grenzwert, falls möglich:

(a) Rekursiv definierte Folge: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$

(b) $a_n = \frac{(1 - n^2)}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

(c) $a_n = \frac{n^2 + 6}{3n^2 + 5}$

(d) $a_n = \frac{n^{\frac{1}{2}} - n^2}{n^{\frac{1}{2}} + n^2}$

(e) $a_n = 10 - 9 + 8.1 - 7.29 + 6.561 - \dots$ (n Summanden!)

(6) Berechne $\lim_{n \rightarrow 6} \frac{(x-6)^4}{(x^4-6^4)}$

Viel Glück!

WIR

2.48 Test: Komplexe Zahlen und Abbildungen, Funktionen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/47

Abschrift • Copie

(1) Die Einzelschritte müssen sichtbar sein:

(a) Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ wird abgebildet in $f(z) = \frac{|z|}{\bar{z}}$.
Wo liegt geometrisch das Bild bezüglich z ? (Begründung!)

(b) $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -2 - 5i \Rightarrow \frac{(z_1 - z_2)(z_1 + z_2^2)}{z_1} = ?$

(2) (a) Was ist die Summe aller 5-ten Einheitswurzeln? (Begründung!)

(b) $\left(\frac{(2-3i)^2}{(2+3i)} + (2+3i)^{\frac{1}{6}}\right) - (2-3i) = ?$

(3) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x^{\frac{1}{2}} + 6$, $g(x) = e^x \ln(x^2 + x)$, $F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

(a) $F'(x) = ?$ (Nach den Regeln ableiten, keine Umformungen!)

(b) Steigungswinkel der Tangente an die Kurve $F(x)$ für $x = 3$ in $rad \rightsquigarrow \alpha = ?$

(4) $f(x) = e^{\frac{\sinh(x^2)}{(x+1)}}$, $g(x) = x \cdot \ln\left(\frac{e^{(x^2)}}{(x+1)}\right)$.

(a) Berechne die Ableitungen von f und g .

(b) Entscheide, ob $f'(1) > g'(2)$ richtig ist.

Viel Glück!

2.49 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen, komplexe Abbildungen

I/48

Abschrift • Copie

Version française: Voir <http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf>

- (1) Löse die folgende Restklassengleichung:

$$x \cdot 4 \equiv 8 \pmod{30}$$

- (2) Was sind transzendente Zahlen?
Notiere kurz, was sich dazu sagen lässt!

- (3) $\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 5x - 6} \rightsquigarrow$ Partialbruchzerlegung?

- (4) $z = 1+i$, $b = 2-i$. Berechne die folgenden Ausdrücke und zeichne die Resultate zusammen mit z und b in ein Koordinatensystem ein:

(a) $z^3 = ?$

(b) $z^3 - b = ?$

(c) $b \cdot (z^3 - b) = ?$

(d) $\sqrt[5]{b \cdot (z^3 - b)} = ?$

(e) $b + \sqrt[5]{b \cdot (z^3 - b)} = ?$

- (5) $z_n = r \cdot \operatorname{cis}(\varphi_n)$, $r = 1$, $\varphi_n = \frac{n\pi}{8}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 14, 15\}$.

- (a) Berechne für die 16 Zahlen z_n die Werte $w = \frac{-1}{z-i}$ und zeichne die Resultate in $\mathbb{C}$ ein. (Berechnungsformel angeben!)

- (b) Wann gibt es keine Lösung?

Viel Glück!

WIR

2.50 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen, komplexe Abbildungen I/49

Abschrift • Copie

Version française: Voir <http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf>

- (1) Löse die folgende Restklassengleichung:

$$6 \cdot x \equiv 12 \pmod{50}$$

- (2) Lassen sich die Mächtigkeiten von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ vergleichen?
Notiere kurz, was sich dazu sagen lässt!

- (3) $\frac{2x^3 - 1}{x^2 - x + 6} \rightsquigarrow$ Partialbruchzerlegung?

- (4) $z = 1 - i$, $b = 2 + i$. Berechne die folgenden Ausdrücke und zeichne die Resultate zusammen mit z und b in ein Koordinatensystem ein:

(a) $z^3 = ?$

(b) $z^3 + b = ?$

(c) $b \cdot (z^3 + b) = ?$

(d) $\sqrt[5]{b \cdot (z^3 + b)} = ?$

(e) $b - \sqrt[5]{b \cdot (z^3 + b)} = ?$

- (5) $z_k = r \cdot \operatorname{cis}(\varphi_k)$, $r = 1$, $\varphi_k = \frac{k\pi}{8}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 14, 15\}$.

- (a) Berechne für die 16 Zahlen z_k die Werte $w = \frac{-1}{z + i}$ und zeichne die Resultate in $\mathbb{C}$ ein. (Berechnungsformel angeben!)

- (b) Wann gibt es keine Lösung?

Viel Glück!

2.51 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen, komplexe Abbildungen

I/50

Abschrift • Copie

- (1) Löse das folgende Restklassengleichungssystem:

$$\begin{cases} 14x \equiv 28y + 28 \pmod{21} \\ 15x \equiv 20y + 25 \pmod{10} \end{cases}$$

- (2) Was haben komplexe und transzendente Zahlen gemeinsam?

- (3) $\frac{x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 3x + 3}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} \leadsto$ Partialbruchzerlegung?

- (4) $w = \frac{z}{\bar{z}}$, $z \in \mathbb{C}$. Wie liegen z und w in $\mathbb{C}$ geometrisch zueinander?

- (5) $w = \frac{2}{iz - 1}$, $z = z_n = e^{i\varphi_n}$, $\varphi_n = \frac{n\pi}{25}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\leadsto$ Was erhält man für die $w = w_n$ geometrisch für eine „Figur“?

$\leadsto$ Skizziere die Lage der w_n in $\mathbb{C}$.

Viel Glück!

2.52 Test: Komplexe Zahlen, Algebra und Zahlentheorie, komplexe Abbildungen

I/51

Abschrift • Copie

- (1) $p_1(x) = x^2 - 5x + k$.
- (a) Faktorisierere $p_1(x)$ für $k = 6$.
 - (b) Löse die Gleichung $p_1(x) = 0$ für $k = 6$.
 - (c) Löse die Ungleichung $p_1(x) \leq 0$ für $k = 6$.
 - (d) Löse $p_1(x) \leq 0$ und diskutieren das Lösungsverhalten für veränderte k .
- (2) Ein Polynom p_2 4-ten Grades hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. x_3 und x_4 sind nicht explizit bekannt. Man weiss aber, dass die Summe aller Nullstellen -4 beträgt und das Produkt aller Nullstellen $+4$. Ausserdem ist $p_2(-1) = 1$.
- (a) Wie lautet das Polynom (Näherung der Koeffizienten auf 4 Dezimalstellen genau).
 - (b) Stimmt die Ungleichung $p_2(-30) < p_2(\frac{3}{2})$? (Begründung!)
- (3) $z_1 = 2 + i \cdot \sqrt{3}$.
- (a) $\bar{z}_1 = ?$ (exakt!).
 - (b) $z_1 - \bar{z}_1 = ?$ (exakt!).
 - (c) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = ?$ (exakt!).
 - (d) $z_1^3 = ?$ (exakt!).
 - (e) $z = \sqrt[3]{\bar{z}_1^3} = ?$
 - (f) $z_1 - (\bar{z}_1)^2 = ?$ (exakt!).
 - (g) $z = \frac{z_1}{\bar{z}_1 - i} = ?$ (reeller Nenner, exakt!).
 - (h) $z_1 = r \operatorname{cis}(\varphi)$, $r = ?$, $\varphi = ?$
 - (i) $z_1 = e^{z_2}$, $z_2 = ?$
- (4) Studiere die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{1+z} = w$.
- (a) Was ist das Bild der reellen Achse?
 - (b) Was ist das Bild der imaginären Achse?
 - (c) Was ist das Bild des Einheitskreises?
- (5) Entwickle $\frac{p_3(x)}{q(x)} = \frac{2x^4 - x^3 + 7x^2 + 9x - 4}{(x-2)^2 \cdot (x+2)}$ in einen Partialbruch!

Viel Glück!

WIR

2.53 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/52

Abschrift • Copie

(1)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechne die Eigenwerte von C .
- (b) Berechne die Eigenvektoren von C .
- (c) Was hat B mit C zu tun?
- (d) Berechne die Inverse von C .

(2)

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 2}{x^2 + 2x}$$

- (a) $\int f(x) dx = ?$
- (b) $\int_{-3}^{\infty} f(x) dx = ?$
- (c) $\int_{-3}^{\infty} \frac{f(x)}{x^k} dx \rightsquigarrow$ Wie gross muss k mindestens sein, damit das Integral existiert?
(Begründung!)
- (d) $\int_{-3}^{\infty} \frac{f(x)}{x^4} dx = ? \rightsquigarrow$ Exakt!

- (3) $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat Nullstellen bei $x = 0$ und bei $x = 3$ sowie einen Wendepunkt in $(x, y) = (1, 1)$. Weiter sei $M(x_m, y_m)$ derjenige Punkt mit $0 \leq x_m \leq 3$, in dem der Funktionswert ein lokales Maximum annimmt. R sei das achsenparallele Rechteck, das durch den Ursprung O und M gebildet wird.

Berechne $\int_0^3 f(x) dx$ und entscheide, ob $\int_0^3 f(x) dx \geq$ (Inhalt von R) richtig ist.

- (4) Gegeben sind die Gerade g und die Ebene Φ :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi: x - y + 2z + 2 = 0$$

Unter welchem Winkel (α) trifft g auf Φ auf?

Viel Glück!

WIR

2.54 Test: Lineare Abbildungen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen, Reihen

I/53

Abschrift • Copie

(1)

$$(-1) A^{-1} \cdot \vec{x}' = (\vec{x} - \vec{b}), \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad y = 4x - 3$$

$\leadsto$ Bild $\vec{x}'$ des Geradenvektors $\vec{x}$? • *Image $\vec{x}'$ du vecteur de la droite $\vec{x}$?*

(2) Miovre: $\sin(5\varphi) = \cos^5(\varphi) - \dots = ?$

(3)

$$f(z) = \frac{2}{z-1} \quad \begin{array}{ll} \text{Bild von} & \bullet \text{ Image de} \\ \text{Bild von} & \bullet \text{ Image de} \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma_1 : z_1(t) = e^{it} \\ \gamma_2 : z_2(t) = 3it \end{array}$$

(4) Gesucht: Polynom $f(x)$ mit • *Chercher: Polynôme $f(x)$ avec*

$$f(1) = 0, \quad f(-1) = 0, \quad f(-2) = 0, \quad f'(2) = 38.$$

(5) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:

• *Démontrer la convergence ou la divergence des séries suivantes:*

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 \sin(nx)}{n^6} + \frac{1}{n^3} \right)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^3}{2n^3 + 7} \right)^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{4n^4 + 2n^2 + 3}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sin(\frac{1}{n}) + 1}$$

Viel Glück!

WIR

2.55 Test: Lineare Abbildungen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen, Reihen

I/54

Abschrift • Copie

(1)

$$(-1) A^{-1} \cdot \vec{x}' = (\vec{x} + \vec{b}), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad y = 2x - 5$$

$\leadsto$ Bild $\vec{x}'$ des Geradenvektors $\vec{x}$? • *Image $\vec{x}'$ du vecteur de la droite $\vec{x}$?*

(2) Miovre: $\sin(5\varphi) = \dots \sin(\varphi) - \dots = ?$

(3)

$$f(z) = \frac{3}{z+1} \quad \begin{array}{ll} \text{Bild von} & \bullet \text{ Image de} \\ \text{Bild von} & \bullet \text{ Image de} \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma_1 : z_1(t) = e^{it} \\ \gamma_2 : z_2(t) = 2it \end{array}$$

(4) Gesucht: Polynom $f(x)$ mit • *Chercher: Polynôme $f(x)$ avec*

$$f(1) = 0, \quad f(3) = 0, \quad f(-1) = 0, \quad f'(-2) = \frac{19}{2}.$$

(5) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:

• *Démontrer la convergence ou la divergence des séries suivantes:*

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 \cos(-2nx)}{n^5} + \frac{2}{n^4} \right)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^4}{8+4n^4} \right)^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3}{2n^6 + 4n^2 - 2}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{\frac{1}{n}} + 1}$$

Viel Glück!

WIR

2.56 Test: Determinanten und Matrizen, Gleichungssysteme, komplexe Zahlen I/55

Abschrift • Copie

- (1) (a) Löse $\frac{\sqrt{2}(z-i)^5 - \sqrt{2}}{1+i} = 1-i$ und skizziere die Lösung.
- (b) Sei $z = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$.
Leite aus $z^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$ eine Formel für $\cos(n\varphi)$ ab!
- (c) Beschreibe eine geometrische Konstruktion für den Punkt $\frac{1}{z}$ zu einem beliebigen gegebenen $z \in \mathbb{C}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Wie hängt $\det(A)$ von α und β ab?
Erkläre das Resultat!

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Für welches α hat das Gleichungssystem allenfalls keine Lösung?
- (b) Wie gross muss α gewählt werden, damit $x = \frac{1}{8}$ wird?
Berechne dazu auch y und z !

(4)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechne $B^2 = B \cdot B$ sowie $B \cdot (B \cdot \vec{u})$.
- (b) Sei $B \cdot ((2B) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechne λ so, dass die Gleichung richtig ist.

(5)

$$M \cdot X = X \cdot M \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Löse dieses Gleichungssystem (Unbekannte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.)

Wähle bei Bedarf $t = \gamma$ als Parameter. Suche dazu $\text{Dim}(\mathbb{L})$, den Rang und die Ordnung.

Viel Glück!

WIR

2.57 Test: Determinanten und Matrizen, lineare Abbildungen, Eigenwerttheorie

I/56

Abschrift • Copie

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechne die Spur und die Determinante von A .
- (b) Berechne die Eigenwerte von A .
- (c) Berechne die Eigenvektoren von A .
- (d) Berechne allenfalls weitere existierende Hauptvektoren von A .

(2) Sei $A = B + k \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix}.$

Berechne die Eigenwerte und untersuche, wie diese von k abhängen.

(3) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

- (a) Stelle A dar in der Form $A = U \cdot D \cdot U^{-1}$ mit $\det(U) = 1$.
- (b) Berechne $A^{100} := A \cdot A \cdot \dots \cdot A$
- (c) Berechne das Bild der Geraden $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ unter A .
Was ist daran speziell auffallend?

Viel Glück!

WIR

2.58 Test: Lineare Abbildungen, Reihen, Potenzreihen, komplexe Zahlen

I/57

Abschrift • Copie

- (1) Kreis: • *Cercle*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(y-3)^2 + (x+1)^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dots - (x+1)^2} + \dots = \dots$

Bild $\vec{x}'$ des Kreises? • *Image $\vec{x}'$ du cercle?*

$$A^{-1} \cdot \vec{x}' = A \cdot (\vec{x} + \vec{b}), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$f(z) = \frac{\bar{z} \cdot 2 \cdot z}{|z|^2 \cdot (z - i)} \quad \begin{array}{l} \text{(a) Bild von } \bullet \text{ Image de } z(t) = e^{it} ? \\ \text{(b) Bild von } \bullet \text{ Image de } z(t) = 2i ? \end{array}$$

- (3) (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n^3 + n^4}{n^5 + n^6 + n^7} \cdot x^n \rightsquigarrow$ Konvergenzradius? • *Rayon de convergence?*
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2(x-4)^n}{n^4} \rightsquigarrow$ Konvergenzradius? • *Rayon de convergence?*
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos(\frac{1}{n}) - 1} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*
 (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{n + \frac{1}{2}} + \frac{(n \cdot x)^n}{n!} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*
 (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(x)}{(2n+1)(2n-1)} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

Berechne im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

• *Calculer la valeur limite dans le cas de la convergence.*

- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \rightsquigarrow$ „Vernünftige Näherung“. • *„Approximation raisonnable“.*

Viel Glück!

WIR

2.59 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie

I/59

Abschrift • Copie

- (1) In welchem Verhältnis teilt die durch $f(x) = x^3$ beschriebene Kurve das im 1. Quadranten liegende Flächenstück, welches begrenzt ist durch $g(x) = ax - x^3$ und die x -Achse? Für welche a -Werte ist die Aufgabe sinnvoll?
- (2) In einem kartesischen Koordinatensystem wird ein durch den Punkt $P(1; 11; 2)$ gehender, parallel zur x -Achse laufender Lichtstrahl an einer Kugel mit Zentrum im Ursprung und dem Radius 3 reflektiert. In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet der reflektierte Strahl die (x, z) -Ebene?

Kontrollangabe: Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind ganzzahlig.

(3)

$$f(x) := \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1}{x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{1 - x^2}\right)$$

Berechne $f'(x)$. Stelle das Resultat möglichst einfach dar.

(4) Integration:

(a) Zeige zuerst, dass die Funktion $f(x) = \cos(\sin(x))$ eine 2π -periodische Funktion ist.

(b) Wir nehmen an, dass mit Hilfe der eben definierten Funktion $A(a) = \int_0^{2\pi} e^{a \cdot x} \cdot f(x) dx$

berechnet sei. Berechne daraus $\int_0^{n \cdot 2\pi} e^{a \cdot x} \cdot f(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) Für welchen a -Wert existiert das obige Integral bei $n \rightarrow \infty$? Berechne in diesem Fall dieses uneigentliche Integral wieder unter Verwendung von $A(a)$.

Viel Glück!

WIR

2.60 Test: Boolsche Algebra, Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie I/59

Abschrift • Copie

- (1) Vereinfache den Booleschen Ausdruck $z = x \cdot y + [(x + y') \cdot y]'$.

Dabei bedeutet „ $\cdot$ “ $\hat{=}$ AND, „ $+$ “ $\hat{=}$ OR, „ $'$ “ $\hat{=}$ NOT.

Verlangt ist Analyse und Graphik.

- (2) Berechne mit Hilfe der Partialbruchzerlegung das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2x^2 + 9x + 12}{x^2 + 6x + 10} dx.$$

- (3) Durch ein unbekanntes Polynom f 3. Grades ist eine Kurve gegeben, von der man weiss:
 $f(-p) = 0$, $f(0) = 3p$, $f(2p) = 3p$. Zudem befindet sich in $(0; f(0))$ ein lokales Maximum.

(a) Skizziere die Situation.

(b) Berechne die Koeffizienten als Funktion des Parameters p .

(c) A_1 sei das Flächenstück unter der Kurve zwischen $-p$ und 0. A_2 dasjenige zwischen 0 und $2p$. Bestimme das Verhältnis $A_1 : A_2$.

- (4) Von einem Punkt $P(3; 3; 5)$ aus fällt ein Lichtstrahl in Richtung des Vektors $\vec{a} = (-1, -1, -2)^T$ auf einen Planspiegel, der durch die Ebene $\Phi : x + 2x + 3z = 6$ beschrieben wird. Bestimme die Parameterdarstellung der Geraden, auf der der reflektierte Strahl liegt.

Viel Glück!

2.61 Test: Nichtlineare Gleichungen, Differentialgleichungen, Numerik I/60

Abschrift • Copie

(1) $f(x) = \frac{1}{3} \cos(x) + \frac{1}{10} - x. \rightsquigarrow$ Löse $f(x) = 0$ mit $x > 0$!

Approximiere die kleinste Nullstelle dieser Gleichung wie folgt:

- (a) Newton–Methode
- (b) Fixpunktmethode
- (c) Regula falsi (sofern einfach möglich)

Wähle als Startwert $x_1 = 0.3$ und für die Regula falsi noch $x_2 = 0.5$.

Vergleiche die Anzahl Rechenschritte bis zu einer Genauigkeit von 6 Stellen hinter dem Komma bei den verschiedenen Methoden. Beurteile damit die Methoden!

(2)

$$y'' = \cos(y') + e^y \sin(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad \Delta y = 0.1.$$

Berechne $y(0.1)$ approximativ mit Hilfe von Runge–Kutta!

(3)

$$\{(x_i; y_i)\} = \{(2; 0.5), (3; -0.7), (4; 0.9), (5; 0.4), (6; 0.8)\}$$

- (a) Berechne das Interpolationspolynom $p(x)$ mit minimalem Grad durch die gegebenen Stützstellen mit Hilfe des Newton–Verfahrens.
- (b) Annahme: $|f^{(n)}| \leq 1.1 \cdot |\max. \text{ Sekantensteigung bei Stützstellen}|$. $f(x_i)$ sei dabei der Wert der wirklichen Funktion. Wie gross ist dann $|f(x) - p(x)|$ maximal?
- (c) Beurteile die letzte Annahme mit Hilfe eines abschätzbaren Wertes für $f^{(4)}$. (Methode der Binomialkoeffizienten.)
- (d) Berechne eine Näherung von $\int_2^6 f(x) dx$ mit Hilfe des Simpson–Verfahrens.
- (e) Berechne eine Näherung von $\int_2^6 p(x) dx$ und vergleiche diesen Wert mit dem erhaltenen Wert in der vorangegangenen Teilaufgabe.

Viel Glück!

WIR

2.62 Test: Nichtlineare Gleichungen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie I/61

Abschrift • Copie

(1) $f(x) = \frac{1}{10} (\cos(x))^2 + \frac{1}{2} - x. \rightsquigarrow$ Löse $f(x) = 0$ mit $x > 0$!

Approximiere die kleinste Nullstelle dieser Gleichung wie folgt:

- (a) Newton-Methode
- (b) Fixpunktmethode
- (c) Regula falsi (sofern einfach möglich)

Wähle als Startwert $x_1 = 0.1$ und für die Regula falsi noch $x_2 = 0.5$.

Vergleiche die Anzahl Rechenschritte bis zu einer Genauigkeit von 6 Stellen hinter dem Komma bei den verschiedenen Methoden.

(2) Die Ebene Φ ist gegeben durch $A(2; 1; 3)$, $B(-1; 4; 6)$, $C(1; -1; -2)$, $P(5; 5; 5)$.

- (a) Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks $\triangle(ABC)$.
- (b) In welchen Punkten schneidet Φ die Koordinatenachsen?
- (c) Wo durchstösst die Gerade $\overline{PS}$ die (x, y) -Ebene?

(3)

$$\{(x_i; y_i)\} = \{(1; 0.5), (3; 0.9), (2; -0.7), (5; 0.8), (4; 0.4)\}$$

- (a) Berechne das Interpolationspolynom $p(x)$ mit minimalem Grad durch die gegebenen Stützstellen.
- (b) Sei f die wirkliche Funktion mit ihrem Graphen durch die Stützstellen. Berechne eine Näherung von $\int_1^5 f(x) dx$ mit Hilfe des Simpson-Verfahrens.

Viel Glück!

2.63 Test: Grenzwerte, nichtlineare Gleichungen und Ungleichungen, Zahlentheorie

I/62

Abschrift • Copie

(1) Löse:

(a) $\log_{10}(x) - e^x > 0$

(b) $\sinh^2(x) - \cosh^2(x) = \frac{1}{4}$

(c) $\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \frac{1}{4}$

(2) Zeige:

(a) $x R y : \Leftrightarrow x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$ ist Äquivalenzrelation.

(b) Betrachte dazu die Abbildung: $x \mapsto \text{Äquivalenzklasse } [x]$.
 $\leadsto$ Was ist hier die Urbildklasse von $[\sqrt{2}]$?

(3) Untersuche die Konvergenz von $\langle a_n \rangle$ und berechne, falls möglich, den Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1} - 1}$

(b) $a_n = e^{\frac{1}{n}}$

(c) $a_n = e^{\sqrt{n}}$

(d) $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

(4) Wieviele Häufungspunkte hat die Folge $\langle a_n \rangle = \langle \sin(\frac{3n\pi}{13}) + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \rangle$?(5) (a) Stimmt die Gleichung $|\mathbb{Q}^2| = |\mathbb{Q}|$? (Begründung!)(b) Stimmt die Gleichung $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$? (Begründung!)*Viel Glück!*

WIR

Ende • *Fin*