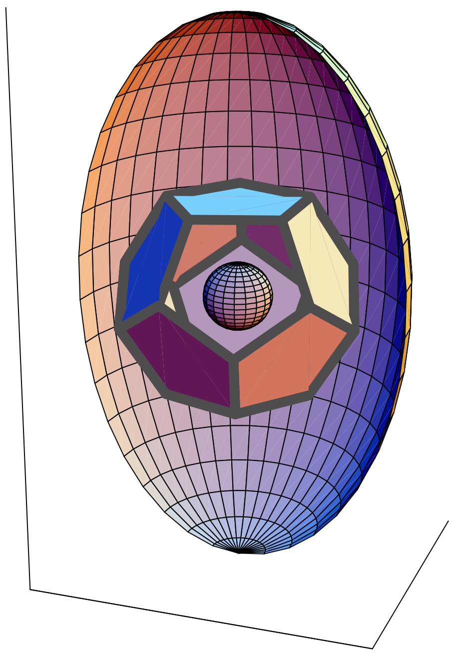
◇ Tests ◇ Tests ◇
◇ Archiv ◇
◇ 2 ◇
◇ Diplom ◇ 1989 – 2000 ◇ *Diplôme* ◇



von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel — HTA-Biel/BFH — HTI/BFH bis • *jusqu'à* 2000

Ausgabe vom 15. September 2007, Version 1.0.0 / d/f

Mit klickbaren Links • *Avec des lines cliquables*

WIR1 /2007/LaTex/ArchivTestsBis2000_2.TEX

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

• *Produit avec PCTeX sous Win XP. Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

• *L'homme a trois occasions pour apprendre:*
Premièrement par réflexion, c'est la plus noble;
deuxièmement par l'imitation, c'est la plus facile;
troisièmement par l'expérience, c'est la plus dure.

(Selon Confucius)

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

Kapitel • Chapitre 1

Einführung — Introduction

1.1 Gegenstand — Sujet

In dieser Sammlung ist eine Auswahl von Aufgaben zusammengefasst, welche in den Jahren vor 2000 verwendet worden sind.
• *Dans cette collection, un choix de problèmes est rassemblé. Il s'agit de problèmes qui ont été utilisés dans les années avant 2000.*

Klickbare Links zu Skripten: • *Liens cliquables pour les cours:*

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html (Skript–Download) • *Download cours*

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur in Papierform vorhanden. An eine gesamthafte Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.
• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale.*

1.2 Gliederung — Disposition

1.2.1 Sprachen — Langues

Bemerkung: • Remarque:

Da momentan nur noch wenige Serien auch in französischer Übersetzung vorliegen, wird im weiteren Text aus Kapazitätsgründen auf Übersetzungen verzichtet.

1.2.2 Gliederung — Disposition

---

(1) Archiv Teil 1

(2) Archiv Teil 2

(3) Archiv Teil 3

1.2.3 Ausnahmen — Exceptions

In diesem Rahmen werden nicht herausgegeben: Tests aus speziellen und weiterführenden Teile der Mathematik, Informatik–Tests, Computeralgebra–Tests, Problemstellungen zu Semesterarbeiten aus Mathematik, Physik und Informatik.

Kapitel • Chapitre 2

Serien aus dem „Archiv Teil 2“

2.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srof-fgebiete war nie vorhanden.

2.2 Test: Grenzwerte, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/1

Abschrift • *Copie*

(1)

$$P_1 = P_1(-3;1),\ \ P_2 = P_3(-2;0),\ \ P_3 = P_3(0;0),\ \ P_4 = P_4(1;0),\ \ P_5 = P_5(2;1)$$

Bestimme ein Polynom mit minimalem Grad durch P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

(2)

$$f(x) = \sin^2(x) - |[x]|,\ \ D_f = [-3,\ 3].$$

(a) Graph von f?

(b) Wo ist f stetig?

(c) Wo ist f monoton?

(3) $f_1 = 2\,x^2 + 2\,x - 4$ und $f_2(x) = -x^2 + x - 2$ schneiden sich in x_1 und x_2.

(a) Skizze?

(b) Ist $f_3(x) = \dfrac{1}{f_1(x) - f_2(x)} + x + 1$ beschränkt auf $[x_1,\ x_2$?

(c) Hat $f_3(x)$ eine Asymptote?

(4) $f(x) = \cosh(\sqrt{x+1} - 1)$

(a) $f^{-1}(x) = ?$

(b) Ist $f^{-1}(x)$ monoton?

(c) $D_{f^{-1}} = ?$ und $W_{f^{-1}} = ?$

(5)

$$r(\varphi) = |\cos(\varphi)|$$

(a) Skizziere $r(\varphi)$ in Polarkoordinaten.

(b) Ist $r(\varphi)$ gleichmässig stetig?

(6)

$$f(x) = cos(2\,x) \cdot e^x,\ \ x \in (0,\ \frac{3\,\pi}{2}]$$

(a) Skizziere $f(x)$.

(b) Bestimme Minumum und Maximum resp. Supremum und Infimum.

(7)

$$f(x) = [x],\ \ x \in [-1,\ 0] \cup [1,\ 2]$$

Setze f derart fort, dass f stetig ist in $[-1,\ 2]$ (Skizze!).
Beschreibung von f notwendig!

(8) (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan(2\,x)}\,(5\,x+\cos(x)) = ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+n}{n^2}-1\right)\left(3-\dfrac{5}{n}+\dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}\right) = ?$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. $\leadsto$ $1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}+\ldots+\dfrac{1}{n^n} \to ?$

(d) $a_n = \dfrac{6^n}{2\,n}\cdot\sin(n)-\dfrac{1}{n}\cdot\sin(n!)$. $\leadsto$ Konvergiert $\langle a_n\rangle$?

Viel Gl?ck!

2.3 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ **II/02**

Abschrift • *Copie*

(1) $f(x) = \tan(\tan(x))$

(a) Leite die 1. und 2. Ableitung mit Hilfe der Regeln her.

(b) Berechne den Steigungswinkel für $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

(c) Berechne die Gleichung der Normalen für x_0.

(d) Berechne die Nullstelle der Normalen für x_0.

(2) $f(x) = 2 + 4\,x\,(x+2) + 8\,x^2\,\ln(x) - 16\,e^{x^2}\cos(x) + \sin(\ln(\dfrac{\sqrt{x}}{\arctan(x)}))$

(a) Leite die 1. Ableitung mit Hilfe der Regeln her.

(b) $f\,'(7.5) = \,?$ (erst ableiten, anschliessend einsetzen).

(3) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

(a) Wie lässt sich $f\,'(0)$ allenfalls definieren?

Hinweis: Stelle für $x \neq 0$ die Ableitung $f\,'(x)$ dar als $\frac{g(x)}{h(x)}$. Benutze, dass für differenzierbare Funktionen $\Phi(x)$ gilt:
$\Phi(x) = \Phi(x_0) + (x - x_0)\,R(x), \;\; R(x_0) = \ldots$

Viel Glück!

WIR

2.4 Test: Grenzwerte, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/03

Abschrift • *Copie*

(1) $x = \dfrac{1}{cos^2(t)}, \ \ y = \tan(t)$

(a) $\dfrac{d\,y}{d\,x} = ?$

(b) $\dfrac{d\,y(t)}{d\,x(t)}\Big|_{t=1} = ?$

(2) $e^x = -x, \ \ x_1 = 0.5.$
Approximiere die Lösung auf 4 Stellen genau. Wieviele Schritte braucht es?

(a) Beim Newtonverfahren

(b) Beim Fixpunktverfahren

(3) Welche Funktion ist jeweils wo in I gleichmässig stetig?

(a) $f(x) = [x] - x, \ \ x \in I = [\dfrac{1}{10}, \ \dfrac{9}{11})$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \cdot \sqrt{x}, \ \ x \in I = [0, \ 1]$

(c) $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}, \ \ x \in I = [0, \ 2\,\pi]$

(d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^x}, \ \ x \in I = [-1, \ 1]$

(4) Berechne jeweils die Ableitung exakt und aus der Ableitung anschliessend den Steigungswinkel von f in rad für $x = 1$ auf 4 Stellen genau.

(a) $f(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot \arccos(\frac{1}{x})}{x}$

(b) $f(x) = x \cdot \tan(x) - \ln(\cosh(x))$

(5) Diskutiere $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x-1}.$

(6) $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow$ Berechne die Extrema, falls vorhanden.

(7) $y = e^{-x \cdot \sin(x)}, \ \ x \in [0, \ 15] \rightsquigarrow$ Berechne die Minima, Maxima, Wendepunkte und Nullstellen.

(8) Berechne $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x) - x^2}{3\,x^{\frac{2}{3}} - \sin(x) + 2\,x}.$

(9) Gegeben ist ein Kreissektor mit dem Winkel φ und dem Radius r. Diesem Sektor ist ein Rechteck einzuschreiben (Flächeninhalt A), wobei eine Rechteckseite (Basis) auf einen Sektorschenkel zu liegen kommt.

(a) Berechne die Höhe h des Rechtecks als Funktion von φ.

(b) Berechte den Flächeninhalt des inhaltsgrössten Rechtecks als Funktion von φ.

Viel Glück!

WIR

2.5 Test: Grenzwerte, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/04

Abschrift • *Copie*

(1)

(a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6}{x+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Erstelle resp. berechne:

(a) Skizze?

(b) Pole?

(c) Nullstellen?

(d) Extrema?

(2)

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x}{\sin^2(x) - \sin(x)} = \,?$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln((x+1)^{1.5}} = \,?$

(3) Berechne jeweils die 1. Ableitung:

(a) $f(x) = e^{x^2+1} \cdot \ln(x)$

(b) $f(x) = (\tan(x))^{\arctan(x)}$

(c) $f(x) = \cos^2(\sin(\cos(x))) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = \ln(\tanh(x))$

(e) $f(x) = \sqrt{(x\,\cos(x))^2 + (x\,\sin(x))^2}$

(f) $f(x) = x^{x-3}$

Viel Glück!

WIR

2.6 Test: Grenzwerte, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/05

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne die 1. Ableitung:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} + \sin(x) \cdot \cos(x) - \ln(\tan(x))$

(b) $f(x) = x^{x^x} - x^{\frac{1}{3}} + 1$

(2) Berechne die Ableitung von $y = f(x)$ aus der impliziten Gleichung $F(x, y) = 0$:

(a) $F(x, y) = 2\,x\,y - x^2 + y^2 - 4$

(b) $F(x, y) = \sin^2(x\,y) + \cos^2(x\,y)$

(3) Vermischte Aufgaben:

(a) $f(x) = x^{-2} + x^{-1}$

i. $f^{-1}(x) = ?$

ii. $(f^{-1}(x))' = ?$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\,\sin(x^2)}{x\,\sin(x)} = ?$

(4) Diskutiere die folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = e^{-x^4+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{(x-3)(x-6)}{(x-4)}$

Viel Glück!

2.7 Test: Grenzwerte, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/06

Abschrift • *Copie*

(1) Integriere von Hand: $f(x) = x^5 - 2\,x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 \;\rightsquigarrow$

(a) $\int f(x)\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_{-1}^{\frac{13}{4}} f(x)\,dx = \,?$ (Skizze!)

(2) Integriere von Hand: $f(x) = x^2 \cdot \sinh(x) \;\rightsquigarrow\; \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \,?$ (Skizze!)

(3) Berechne: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh(x)}{x^2 - 2\,x} = \,?$

(4) Diskutiere: $f(x) = \dfrac{(2\,x^4 + 4\,x + 4)(3\,x - 2)}{(x-2)}$

(5) Diskutiere: $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

Viel Glück!

2.8 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/07

Abschrift • *Copie*

(1) Die Graphen von $f_1(x) = x^2 + 2\,x - 18$ und $f_2(x) = -x^2 - x - 1$ schneiden sich (Skizze!). Zwischen den Schnittpunkten entsteht daher eine durch die Graphen eingeschlossene Fläche. Berechne den Flächeninhalt.

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x+\pi) & x \in [-2\,\pi,\ -\pi) \\ \sin(x) & x \in [-\pi,\ 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x \in [0,\ 2\,\pi) \end{cases} \qquad \int_{-2\,\pi}^{2\,\pi} f(x)\,dx = \,?$$

(3) Berechne: $\int \dfrac{x^2 - 2\,x - 1}{x^2 - 1}\,dx = \,?$

(4) Berechne: $\int \Big(\sin(x) \cdot e^x + \cos(x)\,e^x \Big)\,dx = \,?$

(5) Berechne: $\int_{\pi}^{2\,\pi} \dfrac{(\ln(x))^3 - 1}{x\,(\ln(x))^2}\,dx = \,?$

(6) Berechne: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^3\,dx = \,?$

(7) Berechne: $\int_0^1 \left(\dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}} + 6\,\dfrac{\sqrt{x-5}}{5} \right) dx = \,?$

Viel Glück!

2.9 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/08

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne exakt, falls möglich: *(Herleitung dokumentieren!)*

(a) $\int\limits_0^\infty x^{-\frac{2}{3}} - x^{-2}\,dx$

(b) $\int\limits_1^5 \sqrt{1+25\,x^2}\,dx$

(c) $\int\limits_0^\pi e^x \cdot \sin(s)\,ds$

(d) $\int\limits_0^2 (2\,x)^2\,dx$

(e) $\int\limits_1^2 \frac{t^4}{1+t^5}\,dt$

(f) $\int\limits_0^1 \frac{\arccos(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$

(2) (a) Berechne exakt den durch die Funktionen $f(x) = \sin(x) + \sin(\frac{x}{4}) + 7$ sowie $g(x) = \cos(x) - \cos(3\,x) - 4$ begrenzten Flächeninhalt über dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Man lässt die Kurve $f(x) = e^{4x} - e^{2x}$ um die x–Achse rotieren. Berechne exakt den Inhalt des entstehenden Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = 2$.

(c) Sei $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Berechne auf 4 Stellen hinter dem Komma genau die Länge der Funktionskurve zwischen $x = 0$ und $x = 4$.

(d) Über der x–Achse entsteht durch die Funktion $f(x) = |\sin(x)|$ zwischen $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{\pi}{2}$ die Fläche A. Berechne für A den Schwerpunktsabstand y_S von der x–Achse.

Viel Glück!

2.10 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/09

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne von Hand: *(Herleitung dokumentieren!)*

(a) $\int\limits_0^4 (5\,x - 2\,\sqrt{x} + \dfrac{32}{x^3})\,dx$

(b) $\int\limits_2^{10} \dfrac{3}{\sqrt{5\,x-1}}\,dx$

(c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin(2\,x))^3\,\cos(2\,x)\,dx$

(d) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,\sin(x)\,dx$

(e) $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}\,dx$

(f) $\int\limits_0^{1} \dfrac{\arccos(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$

(2) (a) Berechne exakt den von den Funktionen $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ sowie $f_2(x) = x^3$ eingeschlossenen Flächeninhalt über dem Intervall $[0,\ 1]$. (Skizze!)

(b) Man lässt die Kurven $y_1 = \dfrac{1}{2}\,x + 1$ und $y_2 = x^2 + 2$ um die x–Achse rotieren. Berechne exakt den Inhalt des entstehenden Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = 1$ und zwischen den beiden entstehenden Rotationsflächen. (Skizze!)

(c) Sei $f(x) = x^4,\ \ x \in D_f = [0,\ 1]$. f rotiert um die y–Achse. Berechne den entstehenden Rotationsvolumeninhalt. (Skizze!)

(d) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 3\,x^{\frac{2}{3}} - 10$ über dem Definitionsbereich $D_f = [8,\ 27]$. Berechne die Kurvenlänge des Graphen numerisch und, falls möglich, auch exakt. (Skizze!)

(e) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = x^2+1$ über dem Definitionsbereich $D_f = [0,\ 1]$. Berechne die Koordinaten des Schwerpunktes S der zwischen der x–Achse und dem Funktionsgraphen aufgespannten Fläche. (Skizze!)

Viel Glück!

2.11 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Reihen, Potenzreihen II/10

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Berechne $\int e^x \cdot \sin(3\,x)\,dx$ durch partielle Integration!

(b) Berechne $\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx$ durch partielle Integration!

(c) Berechne $\int (x+2) \cdot \sqrt[3]{x}\,dx$ durch Substitution! (Setze $t := \sqrt[3]{x}$)

(d) Berechne $\dfrac{d}{d\,x} \displaystyle\int \frac{\sin(x \cdot t)}{t}\,dt$.

(2) Berechne die y–Koordinate des Schwerpunktes der Fläche zwischen x–Achse und Kurve über D_f: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $D_f = [1,\ \infty)$.

(3) Bestimme die Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln(n))^2}$ *Hinweis: Benutze* $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x \cdot (\ln(x)^2)}\,dx$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - \ln(n)}{4^n - n^3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln(n)}{n^3}$ sowie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

(4) Bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5\,x + 6}$ um $x_0 = 0$.
Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Viel Glück!

WIR

2.12 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Kombinatorik, Zahlentheorie II/11

Abschrift • *Copie*

(1) Der Graph von $f(x) = \sin(x)$ wird über dem Intervall $[0,\ \pi]$ um die x–Achse rotiert. Berechne den Volumeninhalt des entstehenden Rotationskörpers.

(2) Der Graph von $f(x) = ln(x)$ wird über dem y–Intervall $[0,\ 1]$ um die y–Achse rotiert. Berechne den Volumeninhalt des entstehenden Rotationskörpers.

(3)

$$\int [(\sin(x) \cdot e^x - x \cdot \sin(x^2) + \cos(x) \cdot e^x - \frac{ln(x)}{x}]\, dx = \ ?$$

(4)

$$x + y + z = k, \ \ x, y, z \in \mathbb{N}$$

Wieviele Lösungen $(x; y; z)$ gibt es für $k = 1993$ (Jahreszahl der Prüfung).

Hinweis: Zeichne ein Beilspiel für $x, y, z, 1003$ auf der Zahlengerade und überlege dir, was das Stichwort „Teilmengen“ hier für Ideen bewirken könnte.

(5) Sporttoto: Vorherzusagen sind 13 Fussballspiele. Wieviele verschiedenen Prognosen mit genau 12 richtigen Ausgängen sind möglich?

(6) Auf wieviele Arten kann man 24 Studenten in 4–er Gruppen einteilen?

(7) Stimmt die folgende Aussage? (Eine mathematische Begründung ist notwendig!)

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} : \ \frac{k}{k+1} = \frac{1}{(k+1) \cdot k} + \frac{1}{k \cdot (k-1)} + \ldots + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1}$$

Viel Glück!

2.13 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen II/12

Abschrift • *Copie*

(1) Die Graphen der Funktionen $f_1(x) = x^2 + 2\,x - 18$ und $f_2(x) = -x^2 - x - 1$ schliessen zwischen ihren Schnittpunkten eine Fläche ein. Berechne den Flächeninhalt.
Hinweis: Fertige dazu erst eine Skizze an!

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x-\pi) & x \in [-2\,\pi, \pi) \\ e^{\pi \cdot x} & x \in [\pi, 2\,\pi) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x \in [2\,\pi, 4\,\pi] \end{cases} \qquad \int_{-2\,\pi}^{3\,\pi} f(x)\,dx = \,?$$

(3) Berechne von Hand:

$$\int_{-4}^{0} \frac{(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+2)}{(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-2)}\,dx = \,?$$

(4)

$$\int [(\sin(x) \cdot e^x - x \cdot \sin(x^2) + \cos(x) \cdot e^x - \frac{\ln(x)}{x}]\,dx = \,?$$

(5) Berechne die Summe aller Lösungen von $z^6 = e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$.

(6) Berechne und skizziere die Lösungen von $(i + \dfrac{1}{z})^4 = i$.

Viel Glück!

2.14 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie II/13

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{a} + 2\,\vec{b},\ \ \vec{v}_2 = \vec{a} - \vec{b} + 4\,\vec{c},\ \ \vec{v}_3 = \vec{a} - \vec{c},\ \ \vec{v}_4 = 2\,\vec{c} + 3\,\vec{b}$$

(a) Löse damit die Gleichung $4\,\vec{x} - 3\,\vec{v}_1 + 2\,\vec{v}_2 = -\vec{v}_3$ numerisch nach $\vec{x}$ auf.

(b) Untersuche, ob $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ linear abhängig ist (Begründung!).

(2)

$$\left| \begin{array}{rcl} \vec{a} & = & 3\,\vec{x} - 2\,\vec{y} + 5\,\vec{z} \\ \vec{b} & = & \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} \\ \vec{c} & = & \vec{x} - \vec{y} \end{array} \right|$$

(a) Drücke $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ durch $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ aus.

(b) Setze dann für $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ die Werte aus der obigen Aufgabe ein und berechne $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$.

(3) Zeige: „Die Seitenmittelpunkte eines beliebigen räumlichen Vierecks $ABCD$ bilden ein Parallelogramm".

(4) Gegeben: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ P = P(2; 4; 8).$
Berechne den Abstand des Punktes P vom Schwerpunkt S des Dreiecks $\triangle(ABC)$.

(5) Die aus der vorangegangenen Aufgabe bekannten Punkt $A,\ B,\ C$ und P liegen auf der Oberfläche einer Kugel.

(a) Berechne den Kugelmittelpunkt M sowie den Radius R.

(b) Entscheide rechnerisch, ob $O(0; 0; 0)$ im Kugelinnern liegt oder nicht.

Viel Glück!

2.15 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie II/14

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = -\vec{b} + 2\,\vec{a}, \ \ \vec{v}_2 = -\vec{a} + \vec{b}, \ \ \vec{v}_3 = \vec{a} - \vec{c}, \ \ \vec{v}_4 = 3\,\vec{c} + 4\,\vec{b}$$

(a) Löse damit die Gleichung $2\,\vec{x} - 5\,\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = -\vec{v}_3 - \vec{x}$ numerisch nach $\vec{x}$ auf.

(b) Untersuche, ob $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ linear abhängig ist (Begründung!).

(2)

$$\left| \begin{array}{lcl} \vec{a} & = & \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \\ \vec{b} & = & \vec{x} - 2\,\vec{y} + 3\,\vec{z} \\ \vec{c} & = & \vec{x} - 10\,\vec{y} \end{array} \right|$$

(a) Drücke $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ durch $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aus.

(b) Setze dann für $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ die Werte aus der obigen Aufgabe ein und berechne $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

(3) Gegeben ist ein Dreiecks $\triangle(ABC)$ mit $A(1;1)$, $B(9;2)$, $C(4;5)$.
D und E sind definiert durch $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AC}$. Zudem ist $F = \overline{BD} \cap \overline{CE}$.
In welchem Verhältnis teilt F die Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$?

(4) Gegeben ist ein Dreieck $\triangle(ABC)$ wie in der vorangegangenen Aufgabe. Durch Spiegelung am Schwerpunkt S geht $\triangle(ABC)$ in $\triangle(A'B'C')$ über. Berechne die Koordinaten von A', B' und C'.

(5) $P_1(1;1)$, $P_2(9;2)$ und $P_3(4;5)$ bestimmen einen Kreis K_1 mit dem Mittelpunkt M_1. Ebenso bestimmen $Q_1(10;2)$, $Q_2(18;3)$ und $Q_3(14;6)$ einen Kreis K_2 mit dem Mittelpunkt M_2.

(a) Berechne den Abstand $|\overline{M_1M_2}|$.

(b) Entscheide rechnerisch, ob sich die Kreise schneiden oder nicht.

Viel Glück!

WIR

2.16 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie II/15

Abschrift • *Copie*

(1) Zerlege $\vec{d}$ nach $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

(2) Berechne den Umfang des Dreiecks $\triangle(ABC)$ mit

$$A = A(-20; 9; 17),\ \ B = B(36; 1; -3),\ \ C = C(-6; 16; 3).$$

(3) Gegeben sind $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Sei $\vec{a} = -3\,\vec{r} + 3\,\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + 2\,\vec{w}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.
Bestimme t so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind!

(4) Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt E. Spiegelt man E an D, so entsteht G. Spiegelt man A an D, so entsteht F. Man kennt folgende Koordinaten: $A(10; 8; -8)$, $B(18; 12; 6)$, $C(12; -2; 0)$.
Berechne C, D, G und G!

(5) Gegeben sind $R(12; 12; -6)$ und $S(15; 6; 3)$. Welche Punkte der x–Achse haben von R den doppelt so grossen Abstand wie von S?

(6) Gegeben sind die Punkte A, B, C mit allgemeinen Koordinaten. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB}\,,\ \ \vec{b} = \overrightarrow{AC}\,,\ \ \vec{c} = \overrightarrow{BA}\,,\ \ \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\,\vec{a},\ \ \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\,\vec{c},\ \ S := \overline{AA_1} \cap \overline{CC_1}$$

(a) Skizziere die Situation.

(b) Zeige, dass S die Schwerlinien im Verhältnis $1 : 2$ teilt.
Hinweis: Lineare Unabhängigkeit verwenden.

(c) Gegeben sind $A(6; -1)$, $B(-2; 6)$, $S(3; -4)$. Berechne C!

Viel Glück!

2.17 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie II/16

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne die Winkel des Dreiecks $\triangle(ABC)$ mit Hilfe des Skalarprodukts.
$A = A(2;1;-3),\ B = B(7;-1;-1),\ C = C(-3;0;1)$.

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 7 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{a} \perp \vec{b},\ \vec{a} \perp \vec{c} \rightsquigarrow \quad a = ?,\ b = ?$

(3) Gegeben: $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix},\ P = P(16;10;-6)$.
Gesucht: Koordinatengleichung der Normalenebenen zu g durch P!

(4) Berechne den Abstand des Punktes $P(7;0;-8)$ von der Ebene $-2x + y + 2z + 6 = 0$.

(5) Gegeben: Tetraeder $ABCD$ mit $A(-3;-6;1),\ B(6;-2;0),\ C(3;2;3),\ D(0;5;2)$.

(a) Berechne die Höhe des Tetraeders von D aus.

(b) Berechne die Koordinaten des Höhenfusspunktes.

Viel Glück!

2.18 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie II/17

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben: $\triangle(ABC)$, $A = A(4;3;-5)$, $B = B(-5;-4;6)$, $C = C(3;7;-1)$.
Berechne die Winkel im Dreieck!

(2) Beweise mit Hilfe des Skalarprodukts, dass die Diagonalen im Rhombus senkrecht aufeinander stehen!

(3) Sei $A = A(2;-2;-1)$, $B = B(3;7;2)$, $\Phi: \; -2\,x + 4\,y + 5\,z - 10 = 0$.

Stelle die Koordinatengleichung der Ebene auf, welche durch A und B geht und senkrecht auf Φ steht!

(4) Berechne die Koordinaten des Punktes S, der auf $g: \; \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegt und von $A(4;2;1)$ sowie von $P(4;0;3)$ den gleichen Abstand hat.

(5) Gegeben ist ein Tetraeder $ABCD$ mit den Punkten
$A(6;-2;0)$, $B(-3;-6;1)$, $C(3;2;3)$, $D(0;5;2)$.

(a) Berechne die Höhe des Tetraeders von D aus.

(b) Berechne die Koordinaten des Höhenfusspunktes.

Viel Glück!

2.19 Test: Trigonometrie II/18

Abschrift • *Copie*

(1) Ein Beobachter steht am Fenster in einem Haus an einem See. Die Beobachtungsposition liegt 10.53 m über der Wasseroberfläche. Er sieht eine Bergspitze 34.72^o über der Horizontalen auf der andern Seeseite. Für das Spiegelbild des Bergs im See ermittelt er den entsprechenden Winkel 36.45^o unter der Horizontalen. Wie hoch liegt die Bergspitze über der Wasseroberfläche? (Skizze!)

(2) Gegeben ist eine reguläre, 5–seitige Pyramide mit der Grundkante 8 cm und der Höhe 20 cm. Berechne den Winkel zwischen Grundfläche und Seitenkante! (Skizze!)

(3) Gegeben ist ein Sehnenviereck mit $a = 5.0$, $b = 4.3$, $c = |\overline{CD}| = 5.4$, $\beta = 94^o$. Berechne den Umkreisradius! (Skizze!)

(4) $\cos(x) = -\cos(2\,x) \rightsquigarrow$ Lösungen in $[0^o,\ 360^o]$?

(5) $\sin^4(x) + \cos^4(x) = \dfrac{2}{3} \rightsquigarrow$ Lösungen in $[0^o,\ 360^o]$?

Viel Glück!

2.20 Test: Trigonometrie II/19

Abschrift • *Copie*

(1) In Mexiko steht in einer Ebene ein Vulkan. Beidseitig des Vulkans befinden sich Dörfer, zwischen denen keine direkte Sicht besteht. Um die Distanz zwischen den Kirchtürmen der beiden Dörfern zu vermessen, führen wir im ebenen Gelände zusätzliche Punkte ein. Damit erhalten wir ein konvexes Fünfeck $P_1P_2P_3P_4P_5$. P_1 bezeichnet den Kirchturm des Dorfes *Acapetl* und P_2 denjenigen des Dorfes *Bcapetl*. Indem wir das Fünfeck triangulieren erhalten wir:

$$a = \overline{P_1P_2},\ \ b = \overline{P_2P_3},\ \ b_1 = \overline{P_3P_1},\ \ c = \overline{P_3P_4},\ \ c_1 = \overline{P_4P_2},\ \ d = \overline{P_4P_5},\ \ d_1 = \overline{P_5P_3},\ \ h = \overline{P_1P_5}$$

Weiter führen wir Wikelbezeichnungen ein, wobei die Winkel nur absolut gehandhabt werden:

$$\alpha = \angle(a, b_1),\ \ \beta_1 = \angle(a, b),\ \ \beta = \angle(b, c_1),$$

$$\gamma_1 = \angle(b_1, c),\ \ \gamma = \angle(c, d_1),\ \ \delta_1 = \angle(c, d),\ \ \delta = \angle(c, c_1)$$

Messresultate:

(a) $a = 1000.00\ m$

(b) $\alpha = 28.49^o\ m$

(c) $\beta = 19.12^o\ m$

(d) $\beta_1 = 125.44^o\ m$

(e) $\gamma = 30.06^o\ m$

(f) $\gamma_1 = 131.52^o\ m$

(g) $\delta_1 = 118.35^o\ m$

Skizziere die Situation und berechne damit die Strecke $|h| = |\overline{P_1P_5}|$.
Formeln, Herleitungen, numerische Zwischenresultate gehören aufs Blatt!

(2) $2\ \sin(x) + 0.5\ \sin(2\,x) = 0 \ \rightsquigarrow$ Lösungen in $[0^o,\ 360^o]$?

(3) $\cos(x) - \tan(x) = 0 \ \rightsquigarrow$ Lösungen in $[0^o,\ 360^o]$?

Viel Glück!

2.21 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Gleichungssysteme II/20

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1)

$$\left|\begin{array}{lcl} y-z+w & = & -1 \\ x-y+z & = & 1 \\ x-y+z-w & = & 2 \\ 2\,x+y+2\,z+w & = & 0 \end{array}\right|$$

(a) Berechne die Determinanten D_0, D_x, D_y, D_z, D_w.

(b) Berechne x, y, z, w.

(2) Gegeben sind der Kreis $K:(x-2)^2+(y-1)^2=25$ und die Gerade $g_1:\ \vec{x}_1=\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. M ist der Kreismittelpunkt, $g_1\cap K=\{T_1(u_1;v_1),T_2(u_2;v_2)\mid u_1\geq u_2\}$. Weiter ist $g_n=\overline{MT_1}$, $g_2=$ Kreistangente in T_1. Setze dabei $g_n:\ \vec{x}_n=\vec{b}_0+\lambda\,\vec{b}_1$, $g_2:\ \vec{x}_2=\vec{c}_0+\lambda\,\vec{c}_1$.

(a) Berechne exakt T_1 und T_2.

(b) Berechne exakt g_n: $\vec{b}_1=\ ?$ ($\vec{b}_1$ normieren!)

(c) Berechne exakt g_2: $\vec{c}_1=\ ?$ ($\vec{c}_1$ normieren!)

(d) Berechne exakt den Inhalt des Dreiecks $\triangle(MT_1T_2)$.

(e) Berechne exakt den Abstand d von T_2 zu g_2

Exakt $\rightsquigarrow$ *keine Dezimalbrüche!*

Viel Glück!

2.22 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen, komplexe Zahlen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/21

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\left|\begin{array}{lcr} 2\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 + x_4 - x_5 & = & 4 \\ 2\,x_1 + x_2 + x_3 + 5\,x_4 + 2\,x_5 & = & 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4\,x_4 + 2\,x_5 & = & 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2\,x_4 + 2\,x_5 & = & -2 \end{array}\right|$$

(a) Gesucht ist der Lösungsraum mit Hilfe von Gauss–Jordan. (Die Schritte müssen sichtbar sein.)

(b) Wie gross ist der Rang des Systems?

(2) Gegeben: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{D}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 3 \\ x \\ 3 \end{pmatrix}$. Dabei ist D eine Drehung um die z–Achse. $\leadsto$ Berechne x.

(3) Berechne die Summe aller verschiedenen 437–ten Einheitswurzeln!
(Die Rechnung bzw. die Begründung wird bewertet!)

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $B \cdot A = ?$

(b) $(A \cdot B - 2\,E)\,\vec{u} = \vec{v} = ?$

(c) Berechne $\vec{x}$ mit $\vec{v} \times \vec{x} = \vec{u}$ und $\langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = 5$

(5)

$$\int \frac{5\,x + 12}{\sqrt{-x^2 - 7\,x}}\,dx = ?$$

(6) Beweise: $\quad \forall_{n\in\mathbb{N}} : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = +\frac{n}{n+1}$

Viel Glück!

2.23 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme II/22

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\left|\begin{array}{lcl} x + 2\,y + 3\,z & = & 4 \\ x + 4\,y + 9\,z & = & 16 \\ \lambda\,x + 6\,y + 12\,z & = & \mu \end{array}\right|$$

(a) Wie gross müsste man λ wählen, damit das System für $\mu = 20$ keine Lösung hat? (Untersuche erst, ob dieser Fall möglich ist!)

(b) Setze $\mu = 1$. Existiert jetzt ein λ, sodass das System keine Lösung hat? Berechne allenfalls λ.

(c) $x = y = 1$ sei Lösung. Berechne, falls möglich, $z,\ \lambda,\ \mu$.

(2) (a) $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OC_\lambda} = \vec{c}(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden mit O zusammen ein Tetraeder mit dem Volumen $|V| = 10$. Dazu sein $\lambda > 0$. Berechne λ!

(b) Sei M der Schwerpunkt von $\triangle(ABC_\lambda)$. Sei P definiert durch $\overrightarrow{OP} = 3\ \overrightarrow{OM}$. Berechne den Inhalt des Körpers mit den Eckpunkten $O,\ A,\ B,\ C,\ P$.

(3) Gegeben seien ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(2;-1)$ und dem Radius $r = 3$ sowie der Punkt $P(10;6)$.

(a) Von P aus werden die beiden Tangenten mit den Berührungspunkten T_1 und T_2 an den Kreis gezogen. Berechne T_1 und T_2.

(b) Berechne den Inhalt von $\triangle(PT_1T_2)$.

(c) Berechne denjenigen Punkt des Kreises, welcher dem Punkt P am nächsten liegt. (Punkt Q.)

(4) Gegeben sind die Geraden $g_1 :\ \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\quad g_2 :\ \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Dazu ist P gegeben durch $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Entscheide durch Rechnung, welche der beiden Geraden P am nächsten liegt.

(b) Berechne den kürzesten Abstand von g_1 zu g_2.

(c) Berechne den Mittelpunkt der kleinsten Kugel, die zwischen g_1 und g_2 passt.

Viel Glück!

WIR

2.24 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie, Gleichungssysteme

II/23

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Mit $A(-2;0;0)$, $B(4;2;0)$, $C(6;-1;1)$, $D(3;1;6)$ soll eine vermutlich nicht reguläre Dreieckspyramide gebildet werden. M_1 ist der Mittelpunkt von $\overline{AC}$, M_2 derjenige von $\overline{AB}$, M_3 derjenige von $\overline{BD}$ und M_4 derjenige von $\overline{CD}$.

(a) Volumeninhalt $(ABCD) = ?$

(b) Flächeninhalt $(M_1M_2M_3M_4) = ?$

(2)

$$\Phi_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne den Richtungsvektor der Schnittgeraden $s = \Phi_1 \cap \Phi_2$.

(b) Für welche $P \in s$ ist $|\overline{OP}|$ minimal?

Hinweis: Normalenvektoren!

(3)

$$\left|\begin{array}{lcl} 3\,x + y - 20\,w & = & 11 \\ 2\,x - 2\,y + z - w & = & 2 \\ x + y + 11\,z & = & 7 \\ -x - 8\,z + 16\,w & = & -1 \\ 4\,x + 2\,y + 11\,z - 20\,w & = & 18 \end{array}\right| \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = ?$$

(4) Gegeben ist ein Kreis $K : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 10^2$ sowie eine Gerade $g_1 : \vec{x} = \binom{2}{1} + t\binom{-2}{1}$ mit $g_1 \cap K = T(u,v)$, $u \geq 0$ und $\angle(g_1, \overline{MT}) = \alpha$, $M =$ Kreismittelpunkt.
Berechne den Richtungsvektor der zweiten Geraden g_2 durch T mit $\angle(g_2, \overline{MT}) = \alpha$.

(5)

$$h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Berechne die minimale Distanz zwischen h_1 und h_2.

(6) Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$ mit $P \in \overline{AB}$, $M \in \overline{BC}$, $Q \in \overline{CA}$ und $\overline{AM} \cap \overline{BQ} \cap \overline{CP} = S$. Wähle dabei $A = A(0;0)$, $B = B(b;0)$, $C = C(r;s)$.
Zudem gilt: $|\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{BP}| = 1:2$, $|\overrightarrow{BM}| : |\overrightarrow{MC}| = 1:1$, $|\overrightarrow{AQ}| : |\overrightarrow{QC}| = 1:x$
Gesucht $\rightsquigarrow$ $x = ?$ (Rechnung!)

Viel Glück!

WIR

2.25 Test: Vektorrechnung

II/24

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

Gesucht: Darstellung von $\vec{w}$ als LK von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. ($\leadsto$ $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ Basis.)

(2) Gegeben: $A(5; -6; 2)$, $B(-7; -3; 1)$, $C(x; 5; z)$, $C \in \overline{AB}$.

Gesucht: $x = ?$, $z = ?$, $\overline{AC} = ?$

(3) Gegeben: $A(3; 2)$, $B(-1; 4)$, $C(1; -3)$, $|\overline{AQ}| = |\overline{BQ}| = |\overline{CQ}|$.

Gesucht: $Q = ?$

(4) Gegeben: $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $P(0; 1)$

$S =$ Schwerkunkt von $\triangle ABC$.

Gesucht: $A = ?$, $B = ?$, $C = ?$, $S = ?$

Viel Glück!

2.26 Test: Vektorgeometrie, Vektorrechnung

II/25

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

(a) Berechne das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

(b) Berechne $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

(c) Berechne γ in rad.

(d) Berechne $\vec{a} \times \vec{b}$.

(2) Gegeben sind: $g: \ \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \ P_0 = P_0(2; -1; 3)$.
Durch P_0 wird die Ebene $\Phi \perp g$ gelegt.

(a) Berechne den Abstand von Φ zum Ursprung.

(b) Berechne den Durchstosspunkt von Φ mit der x–Achse.

(3) Gegeben ist eine Kugel K um $M(1; 1; 1)$ mit $R = 5$ sowie der Punkt $Q(10; 0; 2)$ und die Gerade $g_1: \ \vec{r}_{g_1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $P = K \cap g_1$ (diejenige Lösung mit der grössten x–Koordinate).

(b) Ein Lichtstrahl geht von Q aus und wird in P an der Tangentialebene an die Kugel reflektiert. Berechne den Winkel zwischen dem ein– und dem ausfallenden Strahl.

Viel Glück!

WIR

2.27 Test: Vektorgeometrie, Vektorrechnung

II/26

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

(a) Berechne das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

(b) Berechne $|\vec{a} - \vec{b}|$.

(c) Berechne γ in rad.

(d) Berechne $(-\vec{b}) \times (-\vec{a})$.

(2) Gegeben sind: $g: \ \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \ h: \ \vec{r}_h = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Berechne den kürzesten Abstand zwischen g und h.
Hinweis: Arbeite z.B. mit einer Hilfsebene Φ durch g.

(3) Gegeben ist eine Kugel K um $M(-1;-1;-1)$ mit $R = 5$ sowie der Punkt $Q(-10;0;-2)$ und die Gerade $g_1: \ \vec{r}_{g_1} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $P = K \cap g_1$ (diejenige Lösung mit der kleinsten x–Koordinate).

(b) Ein Lichtstrahl geht von Q aus und wird in P an der Tangentialebene an die Kugel reflektiert. Berechne den Winkel zwischen dem ein– und dem ausfallenden Strahl.

Viel Glück!

WIR

2.28 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen II/27

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) i. Berechne A^{-1} (λ beliebig, jedoch A regulär.)
ii. Berechne B^{-1} für $\lambda = 1$. (Rechnung sichtbar!)

(b) i. Löse $C \cdot \vec{x} = \vec{e}_1$ (Gauss–Jordan) für $\lambda = 1$.
ii. Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{e}_1$ (mit A^{-1}) für $\lambda = 2$.

(2) Die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ bestimmen zusammen mit dem Ursprung O den Einheitswürfel, genannt $Fig.1$. Darin ist $\overrightarrow{OP} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ sowie $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3$. Weiter gelten die Bezeichnungen $\overrightarrow{OF_1} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OF_2} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\overrightarrow{OF_3} = \vec{e}_3 + \vec{e}_1$. Dazu ist:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \ H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun die Abbildung:

$$Fig.1 \overset{G}{\longmapsto} Fig.2 \overset{H}{\longmapsto} Fig.3$$

(a) Berechne nachvollziehbar alle Eckpunkte von $Fig.3$.

(b) $Fig.3$ wird um $+\frac{\pi}{6}$ um die $\vec{e}_3$–Achse (z–Achse) gedreht. Wohin kommt das Bild von P zu liegen?

(3) B und C sind die Matrizen wie oben angegeben. Berechne λ aus $\det(B) = \det(C)$.

Viel Glück!

WIR

2.29 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen II/28

Abschrift • *Copie*

(1) Die Vektoren $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ bestimmen zusammen mit dem Ursprung O den Einheitswürfel, genannt $Fig.1$. Darin ist $\overrightarrow{OP}= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ sowie $\overrightarrow{OE_1}= \vec{e}_1,\ \ \overrightarrow{OE_2}= \vec{e}_2,\ \ \overrightarrow{OE_3}= \vec{e}_3$.
Sei nun $D_{\varphi,x}$ eine Drehmatrix für eine Drehung um den Winkel φ um die x–Achse, $D_{\varphi,y}$ eine solche Matrix entsprechend für die y–Achse u.s.w.
Wir betrachten nun die Abbildung:

$$Fig.1 \overset{D_{15^o,x}}{\longmapsto} Fig.2 \overset{D_{30^o,z}}{\longmapsto} Fig.3$$

(a) Berechne die Lage der Bilder von $E_1,\ E_2,\ E_3$ und P in $Fig.3$.

(b) Berechne die Determinante von $(D_{30^o,z} \cdot D_{15^o,x})$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \\ y^0 & y^1 & y^2 \\ z^0 & z^1 & z^2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante $\det(A^{-1} \cdot B^{-1})$. Für welche λ existiert diese Determinante nicht?

(b) Löse die Gleichung $\det(A) = \det(B)$ für die Unbekannte λ.

(c) Berechne $\det(C)$.

(3)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Löse die Gleichung $G \cdot \vec{x} = \vec{e}_2$ nach Gauss–Jordan.

(a) Für $\lambda = 1$.

(b) Für $\lambda = -1$.

Viel Glück!

WIR

2.30 Test: Nichtlineare Gleichungen, Vektorgeometrie, Vektorrechnung II/29

Abschrift • *Copie*

(1) Hat diese Gleichung Lösungen? Wenn ja, dann welche Lösungen? *Graphisch!*

$$\arcsin(x) = e^{\cos(x)}$$

(2) Löse diese Gleichung: $\log_5(7) - \log_{10}(x) = 7\, e^{\log_5(7)}$

(3) (a) Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $(1;1)$, $(5;2)$, $(4;4)$. Berechne den Schwerpunkt S_a.

(b) Gegeben ist ein konvexes Viereck mit den Eckpunkten $(1;1)$, $(5;2)$, $(4;4)$, $(1.5;3)$. Berechne den Schwerpunkt S_b.

(4) Gegeben sind die Punkte $A(1;1)$, $B(7;3)$, $C(3;0)$, $D(6;5)$. Berechne $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$.

(5) Gegeben sind die Vektoren und Beziehungen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{e} = 3\,\vec{d} - 3\,\vec{a}, \ \vec{c} = 2.5 \cdot \vec{b}$$

Löse die Gleichung $4 \cdot \vec{a} - \vec{c} + \vec{e} + (-1) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ rechnerisch und skizziere die Situation!

Viel Glück!

2.31 Test: Determinanten und Matrizen, lineare Abbildungen II/30

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) i. Berechne $\det(A)$.
ii. Berechne $\det(A^T)$.
iii. Berechne $\det(B)$.
iv. Berechne $\det(C)$.

(b) i. Berechne A^{-1}.
ii. Berechne B^{-1}.
iii. Berechne C^{-1}.

(2) Sei $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Löse $A\,\vec{x} = \vec{v}_1$ mit A von oben.

(3) Löse falls möglich $B \cdot X = C^2 = C \cdot C$ mit B und C von oben.

(4) Löse falls möglich $C\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit C von oben.

(5)

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sei $D : \vec{v}_2 \longmapsto \vec{W}_2 = D \cdot \vec{v}_2$
und $D : \vec{v}_0 \longmapsto \vec{W}_0 = D \cdot \vec{v}_0$

$\vec{v}_0$ und $\vec{v}_2$ definieren ein Parallelogramm P_v. Ebenso definieren $\vec{w}_0$ und $\vec{w}_2$ ein Parallelogramm P_w.

(a) Wie gross ist der Flächeninhalt von P_w.
(b) Wieviel mal ist der Flächeninhalt von P_w grösser oder kleiner als der von P_v?

Viel Glück!

WIR

2.32 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/31

Abschrift • *Copie*

(1) $\left| \begin{array}{rcl} 4\,x-2\,y+3\,z & = & 2 \\ 4\,x-2\,y-2\,z & = & 1 \end{array} \right|$ Was ist der Abstand der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $(0;0;0)$?

(2) $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Die folgenden Rechnungen sind von Hand auszuführen (der Weg wird bewertet):

(a) Berechne $M \cdot (B \cdot \vec{a})$.

(b) $M \cdot (B \cdot \vec{x}) = \vec{a} \;\rightsquigarrow\; \vec{x} = ?$ (Falls lösbar.)

(c) Berechne $\det(M \cdot B)$.

(d) Berechne $\det(M \cdot B^{-1})$. (Falls lösbar.)

(e) Berechne die Eigenwerte von $(M \cdot B)$.

(f) Berechne die Eigenvektoren von $(M \cdot B)$ (numerisch).

(3)

$$f(x) = 3\,x^4\,y^3 + 2\,x^2\,y^4.$$

Untersuche f auf Minima, Maxima und Sattelpunkte!
(Kreativ!)

(4) Gegeben: $f(a,b) = a^2 + b^2, \;\; a = \dfrac{2}{x^2+y^2}, \;\; b = 2\,x + y, \;\; r = \sqrt{x^2+y^2}.$

Bilde damit $F(x,y) := f(a(x,y), b(x,y))$

(a) Berechne $\dfrac{\partial F}{\partial r}$.

(b) Berechne das totale Differential $d(a(x,y) \cdot b(x,y))$ von $(a(x,y) \cdot b(x,y)$.

(5) Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius R und auf der Kreislinie verteilt vier Punkte, welche die Ecken eines konvexen Vierecks bilden. Bestimme die Viereckwinkel so, dass der Viereckumfang maximal wird!

Viel Glück!

WIR

2.33 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme II/32

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind die Punkte $A(-2;0;0)$, $B(4;2;0)$, $C(6;-1;1)$, $A(3;1;6)$.
M_1, M_2, M_3, M_4 sind die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$.

(a) Mache eine Skizze der Situation!

(b) Wie gross ist der Flächeninhalt der Figur $M_1M_2M_3M_4$, falls dieser Flächeninhalt definiert ist?

(c) Wie gross ist der Volumeninhalt des Körpers $AM_1M_2M_3M_4D$, falls dieser Volumeninhalt definiert ist?

(2)

$$\left|\begin{array}{lcl} 3\,x-20\,w+y & = & 11 \\ x+y+11\,z & = & 7 \\ 2\,x-2\,y+z-v & = & 2 \\ -x-8\,z+16\,w & = & -1 \\ 4\,x+2\,y+11\,z-20\,v & = & 18 \end{array}\right|$$

Löse dieses System nach den Regeln von Cramer.
(Die Art der Determinantenberechnung ist freigestellt, jedoch müssen die einzelnen Zwischenresultate resp. Determinanten angegeben werden.)

(3) Gegeben sind die Geraden h_1 und h_2:

$$h_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad h_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-5\\-4\\6\end{pmatrix}$$

Was ist die kürzeste Distanz zwischen h_1 und h_2?

(4) Gegeben sind die Ebenen Φ_1 und Φ_2:

$$\Phi_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \Phi_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

(a) Für welchen Punkt P der Schnittgeraden ist die Distanz zum Ursprung minimal?

(b) Wie gross ist diese Distanz?

Viel Glück!

WIR

2.34 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme II/33

Abschrift • *Copie*

(1) In einem zweidimensionalen Koordinatensystem ist durch den Streckenzug $\overline{OABCO}$ ein Viereck gegeben mit $O(0;0)$, $A(10;1)$, $B(7;5)$, $C(1;3)$. Weiter sind S_1 und S_2 durch die folgenden Gleichungen definiert: $\overrightarrow{OS_1} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OS_2} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OB}$.

(a) Berechne den Punkt $P = \overline{OS_2} \cap \overline{AS_1}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks, welches durch den Streckenzug $\overline{PABS_2P}$ festgelegt ist.

(2) Gegeben sind die Punkte $A(1;1;1)$, $B(1;6;2)$, $C(-6;5;3)$, $D(1;y;2)$ und $P(2;2;3)$. A, B, C und D sind die Eckpunkte der Grundfläche einer vermutlich nicht regulären Pyramide $Py(ABCDE)$. Dabei liegt der Eckpunkt E auf der Geraden $\overline{AP}$ derart, dass $\overline{AE} \perp \overline{EC}$ gilt.

(a) Berechne y und damit D.

(b) Berechne E.

(c) Berechne den Volumeninhalt von $Py(ABCDE)$.

(3)

$$\left|\begin{array}{lcl} x + y + 3\,z & = & \cos(\varphi) \\ x + y + 3\,z & = & \sin(\varphi) \\ x + y + z & = & 1 \end{array}\right|$$

Kann φ so gewählt werden, dass eine Lösung mit $x = 1$ existiert? Falls ja, so ist φ zu berechnen!

(4)

$$\left|\begin{array}{lcl} (1-\lambda)\,x + 2\,y + 3\,z & = & 1 \\ 1 + (1-\lambda)\,y + 3\,z & = & 2 \\ 1 + 2\,y + (1-\lambda)\,z & = & 3 \end{array}\right|$$

Kann λ so gewählt werden, dass keine Lösung existiert? Wie gross wäre andernfalls λ ?

Viel Glück!

WIR

2.35 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/34

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 i m Raum:

$$g_1 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auf g_2 rollt eine Kugel, welche an g_2 haftet. Gesucht ist der Radius R der minimalst möglichen Kugel, die beim Vorbeirollen g_1 gerade noch berührt.

(2)

$$\left| \begin{array}{lcr} x+y+z+w & = & 0 \\ x-y-z+w & = & 1 \\ x+2\,y+3\,z-2\,w & = & -1 \end{array} \right|$$

(a) $Dim(\mathbb{L}\ ) = ?$

(b) $Rang = ?$

(c) $\mathbb{L}\ = ?$ (Dabei sei w Parameter!)

(d) Geometrische Struktur von $\mathbb{L}$?

(3)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $\det(M) = ?$ (Rechnung sichtbar!)

(b) Ist M regulär?

(c) $M^T = ?$

(d) $M^{-1} = ?$ (Rechnung sichtbar!)

(e) Eigenwerte von M?

(f) Ist $(M - x\,E) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ lösbar?

(g) Bedeutung von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich M ?

%

(4) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -0.367692 & -1.11477 & 1 \\ 0.928667 & 0.700131 & 1 \end{pmatrix}$

(a) $A^T = ?$

(b) $(A^T)^{-1} = ?$ (Methode frei!)

(c) $S = (A^T)^{-1} \cdot M \cdot A^T = ?$ (Gerundet!)

(d) Was lässt sich aus dem letzten Resultat über die Eigenwerte von M ableiten?

(e) Was hat A mit den Eigenvektoren von M zu tun?

Viel Glück!

2.36 Test: Vektorgeometrie, Goniometrie II/35

Abschrift • *Copie*

(1) Bezüglich der Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuche, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis bilden.

(b) Stelle, falls möglich, $\vec{d}$ bezüglich $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

(c) Berechne die Länge von $3\,\vec{a} - 2\,\vec{b} + 4\,\vec{c} - \vec{d}$.

(2) Durch $A(3;3;3)$ und $B(5;-2;6)$ ist eine Gerade gegeben.
Bestimme den Punkt $C(18;y;z)$ so, dass $C \in g$ gilt.

(3) Gesucht ist die kleinste Zahl a, so dass $|\sin(x) + \cos(x)| \leq a$ ist.

(4) Zwei Kreise mit dem Radius r haben den Mittelpunktabstand $\frac{r}{2}$.
Berechne den Flächeninhalt einer der so entstehenden Mondsicheln.

(5) Vereinfache: $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{(\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta))}$

(6) Gegeben sind $g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_3 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Eckpunkte des entstehenden Dreiecks.

(b) Berechne den Flächeninhalt des entstehenden Dreiecks.

(c) Berechne die Innenwinkel des entstehenden Dreiecks.

(d) Entscheide rechnerisch, ob der Punkt $P(2;3)$ im Innern des Dreiecks liegt.

Viel Glück!

WIR

2.37 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/36

Abschrift • *Copie*

(1) $A = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 10 \\ 10 & 10 & 20 \end{pmatrix} \leadsto$ Stelle A in Diagonalform dar!

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^3 \\ 1 & 0 & -3\,q^2 \\ 0 & 1 & 3\,q \end{pmatrix} \leadsto$ Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren!

(3) Eine lineare Abbildung ist durch die Matrix A gegeben. Zudem weiss man:

$$\vec{0} \xmapsto{A} \vec{0}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xmapsto{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \xmapsto{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne, falls möglich, die Matrix A.

(b) Suche das Bild von $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(4) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne für A das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^3 + c_2\,\lambda^2 + c_1\,\lambda + c_0$.

(b) Berechne die Matrix $P(A) = A^3 + c_2\,A^2 + c_1\,A + c_0\,E$

Viel Glück!

WIR

2.38 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/37

Abschrift • *Copie*

(1)

$$(A\,\vec{x})^T A^{-1} - \vec{v}^{\,T} M\, A^{-1} = \vec{x}^{\,T} A,\;\; A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -9 & 3 \end{pmatrix},\;\; M = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix},\;\; \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix},\;\; \vec{x} = ?$$

(2)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Löse das Eigenwertproblem $C\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x}$.

(b) Bestimme die Fixgeraden (Skizze!).

(3)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechne B^{-1} von Hand, falls möglich.

(4) Löse das Gleichungssystem $B\,\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b}^{\,T} = (6, 9, 12, 24)$, B wie oben.

Viel Glück!

WIR

2.39 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie, Gleichungssysteme Goniometrie II/38

Abschrift • *Copie*

(1) Zeige rechnerisch: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den Seiten.

(2) Seien $A = A(1;2)$, $B = B(4;-1)$, $C = C(x;8)$.

(a) Bestimme C so, dass A, B, C auf einer Geraden liegen.

(b) Bestimme alsdann D so, dass (A,B) und (C,D) harmonische Punktepaare bilden.

(3) Seien $A = A(1;2)$, $B = B(4;-1)$, $C = C(6;8)$.

(a) Berechne den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$.

(b) Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

(c) Berechne den Umkreisradius des Dreiecks $\triangle ABC$.

(4) Löse möglichst exakt:

$$\begin{aligned} \sin^2(x) - 3\,cos^2(x) &= 0 \\ \sin(x) + 2\,sin(2\,x) &= 0 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} g:\ 10\,x + 7\,y + 16 &= 0 \\ h:\ 12\,x - 17\,y - 14 &= 0 \end{aligned}$$

Kleinster Schnittwinkel der Geraden ≥ 0 ?

(6) Seien $A = A(0;0;1)$, $B = B(2;-2;4)$, $C = C(5;1;2)$, Ebene $\Phi = \Phi(A,B,C)$.

(a) Berechne die Durchstosspunkge der Achsen durch Φ.

(b) Berechne den kürzesten Abstand von C auf $\overline{AB}$ auf zwei Stellen hinter dem Komma genau.

Viel Glück!

WIR

2.40 Test: Vektorgeometrie, Goniometrie II/39

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind die Punkte $A(0;5;2)$, $B(3;2;3)$, $C(6;-2;0)$, $B(-3;-6;1)$.

(a) Berechne im Tetraeder $ABCD$ die Länge der Höhe durch A.

(b) Bestimme den Höhenfusspunkt.

(2) Gegeben sind die Punkte A, B, C, D mit denselben Koordinaten wie in der Aufgabe oben.
M_1, M_2, M_3, M_4 seien die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. Berechne die Winkel zwischen den Kanten im Viereck $M_1M_2M_3M_4$.

(3) Bestimme die Lösungen der Gleichungen $\cos^2(x) + \cos(x) = \sin^2(x) + \sin(x)$.

(4) Gegeben sind die Geraden $g:\ 3\,x-4\,y+12=0$ und $h:\ 5\,x+12\,y-1=0$ sowie die Distanz $d=8$. Seien w_1 die Winkelhalbierende von g und h zum kleineren Winkel und w_2 die zum grösseren Winkel. Sei S der Schnittpunkt von g und h. Zu h wird im Abstand d von S eine Parallele gezogen. h_1 schneidet w_1 in P und w_2 in Q. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks SPQ.

Viel Glück!

WIR

2.41 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/40

Abschrift • *Copie*

(1) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & k \\ 1 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$ Für welche k ist $\det(M_1) = 0\,$?

(2)

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

(a) $(M_2)^{-1} = \,?$

(b) $k = 1 \leadsto$ Was ist das geometrische Bild von $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ bei $\vec{x} \longmapsto M_2 \cdot \vec{x}$

(c) Berechne die Eigenwerte von M_2.

(d) Berechne die Eigenwerte von M_2 für $k = 1$.

(e) Berechne die Eigenvektoren von M_2.

(3)

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuche, ob M_3 eine Ähnlichkeitsabbildung stiftet (Begründung!).

(b) $M_3 = U \cdot D \cdot U^T$. Konstruiere U und D.

Viel Glück!

2.42 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/41

Abschrift • *Copie*

(1) $I(x) = \int\limits_0^{x^2} \cos(x \cdot t)\, dt \qquad \Rightarrow \quad \frac{d\, I(x)}{d\, x} = \,?$

(2) $x(t) = \frac{1}{k} \int\limits_0^t f(u) \cdot \sin(k\,(t-u))\, du \qquad \Rightarrow \quad \ddot{x} + k^2 \cdot x = \,?$

(3) $f(x,y) = (2 - x\,y)\, x\, y\, e^{-x\,y} \;\rightsquigarrow\;$ Gilt $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^\infty f(x,y)\, dy\Big)\, dx = \int\limits_0^\infty \Big(\int\limits_0^1 f(x,y)\, dx\Big)\, dy$?

(4) Das Gebiet G wird begrenzt durch $y = 2,\; y = x$ und $y = \frac{1}{x}$. Berechne:

(a) $|G| = \iint\limits_G dG$

(b) $k = \frac{1}{|G|} \iint\limits_G x\, dx\, dy$

(b) $w = \iint\limits_G \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy$

(c) Was hat k für eine Bedeutung?

(5) $K_1(O) =$ Sphäre mit Radius 1 um O, $Q_0 = Q_0(5,0,0)$, $P \in K_1(O)$, $r(P) = |\overline{Q_0 P}|$.

$$\int\limits_{A = K_1(O)} \frac{1}{r(P)}\, dA = \,?$$

(6) Gegeben ist ein Körper H in der Parameterdarstellung $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} (\cos(u)+5)\sin(v) \\ (\sin(u)+5)\sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}$.

Dabei ist $u \in [0,\; 2\,\pi),\;\; v \in [0,\; \pi]$.

(a) Skizziere den Körper H.

(b) Berechne die Oberfläche von H.

(c) Berechne das Volumen von H.

Viel Glück!

WIR

2.43 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen II/42

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind die Punkte $A(7;5;-2)$, $B(11;6;6)$, $C(3;13;6)$, $D(16;4;12)$, $E(9;11;-2)$. Berechne die Punkte auf der Geraden $h(D,E)$, die von $g_1(A,B)$ und $g_2(A,C)$ den gleichen Abstand haben.

(2) (a)

$$M(\varphi)=\begin{pmatrix}1-\sin(\varphi) & 1 & 1+\cos(\varphi)\\ 1 & 1 & 1\\ 1+\cos(\varphi) & 1 & 1+\sin(\varphi)\end{pmatrix}$$

Bestimme φ so, dass M regulär ist.

(b)

$$D=\frac{1}{\begin{vmatrix}x & x^2\\ z & z^2\end{vmatrix}}\cdot\begin{vmatrix}\lambda-1 & x & x^2\\ \lambda-1 & y & y^2\\ \lambda-1 & z & z^2\end{vmatrix}$$

i. Wann ist $D=0$?

ii. Wann existiert D nicht?

(c)

$$A=\begin{pmatrix}x^2 & x & 0\\ 0 & y & 1\\ z^2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(3) Gegeben ist ein Würfel, der bestimmt ist durch die Eckpunkte $O(0;0;0)$, $R(1;0;0)$, $P(0;1;0)$, $Q(0;0;1)$. Weitere verwendete Eckpunkte sind $S(1;0;1)$, $U(1;1;0)$, $T(1;1;1)$.
Wir verwenden die Geraden: $g_1=g(O,S)$, $g_2=g(Q,R)$, $g_3=g(O,U)$, $g_4=g(R,P)$. Damit erhalten wir die Seitenmittelpunkte $N=g_1\cap g_2$ und $M=g_3\cap g_4$. Dazu ist $g_5=g(T,M)$.

(a) Skizziere die Situation.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle(RMN)$

(c) Berechne die Abstände von g_1 und g_2 zu g_5.

Viel Glück!

2.44 Test: Nichtlineare Gleichungen, Reihen, Zahlentheorie II/48

Abschrift • *Copie*

(1) Untersuche die Konvergenz: $\langle a_n \rangle = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots]$

(2) Untersuche die Konvergenz: $\langle n_n \rangle = [\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \ldots]$

(3) Durch den Ursprung gehen 6 Geraden $g_0, g_{30}, g_{60}, \ldots, g_{150}$, welche um $0^o, 30^o, 60^o, 90^o, 120^o$ und 150^o gegen die positive x–Achse geneigt sind.
Im 1. Quadranten befindet sich auf g_{30} der Punkt P_1 mit dem Abstand vom Urspurng $|\overline{OP_1}| = 2$. Von P_1 wird im Gegenuhrzeigersinn auf g_{60} das Lot gefällt. Der Lotfusspunkt ist P_2. Ebenso wird von P_2 im Gegenuhrzeigersinn auf g_{90} das Lot gefällt. Der Lotfusspunkt ist P_3 und so fort. So entsteht die Punktfolge $[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots]$. Berechne den Grenzwert der Länge des spiraligen Streckenzuges $\lim\limits_{n\to\infty} |\overline{P_1 P_2 P_3 \ldots P_n}|$ (Skizze!).

(4) Die Dezimalzahldivision für $\frac{1}{a} = x \in \mathbb{R}$ soll mit Hilfe des Newton–Verfahrens durchgeführt werden. Beispiel: $a = 3 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{3}$. Dazu definieren wir: $f(x) = \frac{1}{x} - a$. Für die Nullstelle von $f(x)$ gilt dann: $\frac{1}{x} - a = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = a \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{a}$.

(a) Berechne nach dem genannten Verfahren eine Rekursionsformel $x_{n+1} = h(x_n)$

(b) Wähle $a = 3$ und $x_1 = 0.5$. Nach wievielen Schritten ist das Resultat auf 3 Stellen exakt?

(c) Was ist die Bedeutung dieses Verfahrens für die Programmierung der Division auf einem Rechner?

(5)

$$a_n = a_1 + d\,(n-1) = 7 + 3\,(n-1)$$

(a) Berechne eine Formel für die Summenfolge s_n.

(b) Beweise die Formel für s_n mit Hilfe vollständiger Induktion.

(6) Löse:

$$8\,x^2 + 2\,x - 1 \equiv 6\,x - 5 \; mod(10)$$

Viel Glück!

WIR

2.45 Test: Komplexe Zahlen u. Funktionen, Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten, lineare Abbildungen II/44

Abschrift • *Copie*

(1) Komplexe Zahlen und Funktionen

(a) Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $z = x + i\,y$. Sei weiter $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.
Berechne formal $\triangle f$. *Hinweis: Cauchy–Riemann.*

(b) Berechne exakt $(-i)^{1-i}$.

(c) Löse vollständig und exakt $\sin(\pi \cdot t + i \cdot t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

(d) Skizziere alle Lösungen von $(z+2)^3 = 1 + i$.

(e) Sei $f(z) = \dfrac{a\,z + b}{c\,z + d} = w$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ (Möbiustransformation). Sei weiter
$f:\ -1 \longmapsto 1$, $f:\ 1 \longmapsto -1$, $f:\ -i \longmapsto 0$. $\leadsto$ Bestimme f.

(f) Untersuche, ob $f(z) = \dfrac{z}{|z|^2}$ holomorph ist!

(2) Gleichungssysteme,Matrizen, Determinanten, lineare Abbildungen

(a)
$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
i. Berechne von Hand $M^{-1} = ?$ (Rechnung kommentieren!)

ii. Für welche α existiert M^{-1} nicht?

(b) $A \cdot X = A^T \cdot B^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma \neq 0$. $\leadsto$ $X = ?$

(c) $\left| \begin{array}{rcl} 2\,x + 4\,y + 6\,z & = & 12 \\ 3\,x + 3\,y - 2\,z & = & -9 \\ x + 3\,y + 7\,z & = & 16 \end{array} \right|$ Löse das Gleichungssystem. (Zeige dabei das Gauss–Verfahren.)

(d) $\left| \begin{array}{rcl} 2\,x + 4\,y + 6\,z & = & 12 \\ x + 3\,y - 2\,z & = & 16 \\ x + y + 8\,z & = & 0 \end{array} \right|$ Was ist die Dimension des Lösungsraumes $\mathbb{L}$?

(e) $\mathcal{A} : \vec{x} \longmapsto \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \vec{x} \leadsto$ Suche eine mögliche Matrix A mit $\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{v} = A \cdot \vec{x}$

(f) Eine lineare Abbildung stiftet die Zuordnungen $0 \longmapsto 0$,
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Berechne eine mögliche Matrix, die das Gewünschte leistet und bestimme damit das Bild von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Viel Glück!

WIR

2.46 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Reihen, Potenzreihen II/45

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

i. Entscheide die Konvergenz (mit Begründung)!

ii. Berechne, falls möglich, S explizit. *(Hinweis:* $\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \ldots$*)*

(b) Jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks F_1 mit der Seitenlänge 1 wird in 3 gleich lange Teile geteilt. Jeweils über dem mittleren Teil wird wieder ein gleichseitiges Dreieck errichtet und die Berührungskannte zwischen altem und neuem Dreieck anschliessend weggelassen. Zu den 3 ursprünglich gegebenen Strecken kommen so 3 mal $(3-1) = 2$ neue hinzu. Dadurch entsteht eine Figur F_2. In der nun vorhandenen Situation verfahren wir wieder gleich: Jede der vorhandenen Seiten wird dreigeteilt, neue Dreiecke werden errichtet und die gemeinsamen Kanten weggelassen. Damit gelangen wir zu F_3. Dieses Verfahren wird nun wiederholt „in alle Ewigkeit“ (Iteration). Es entsteht somit eine Folge von Figuren $[F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n \ldots]$. Berechne allgemein den Umfang U_n der Figur F_n und damit den Grenzwert $U = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

(2) Potenzreihen:

(a) Bestimme das Taylorpolynom (Näherungspolynom) für $f(x) = e^x \cdot \sqrt{1+x^3}$ vom Grad 7 zum Zentrum $x_0 = 0$ ($\leadsto$ $p_7(x)$). Vergleiche anschliessend $p_7(0.1)$ mit $f(0.1)$ numerisch.

(b) Bestimme aus der Potenzreihe für $g(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$ (Tabelle!) diejenige von $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin(a\,t)}{t}\,dt$ und berechne den Konvergenzradius der entstehenden Reihe.

(3) Differentialrechnung mit mehreren Variablen:

(a) Gegeben ist $w = \varphi(x, y, z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{-1}{r}$.

i. Berechne $grad(\varphi)$ für $r \neq 0$.

ii. Beschreibe die Niveauflächen sowie $|grad(\varphi)|$ für $r = 1$.

iii. Sei $f(x, y) = \varphi(x, y, 0)$. Berechne für $P_0(1; 0)$ die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Gegeben ist $f(x, y) = \frac{1}{2}\,x^2 - 4\,x\,y + 9\,y^2 + 3\,x - 14\,x + \frac{1}{2}$.

Berechne die Lage allfälliger Extrema!

Viel Glück!

WIR

2.47 Test: Nichtlineare Gleichungen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Schaltalgebra, Kombinatorik, Zahlentheorie II/46

Abschrift • *Copie*

(1) Die Kurve der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D_f = [0,\ x_0]$ wird um die x-Achse rotiert. Dabei entsteht das Volumen V_2. Um dieses Volumen wird über dem gleichen Definitionsbereich ein x–achsenparalleler Zylinder gestülpt, welcher das Volumen V_1 besitzt.
Berechne $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(2) Erkläre den Satz von Stone und seine Konsequenzen für die Schaltalgebra.

(3) Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x + y + z = 1994$ in $\mathbb{N}$? (1994 = Prüfungsjahr.)

(4) Beweise oder widerlege: $\forall_{n\in\mathbb{N},\ n\geq 2} : \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)\cdot n} = \dfrac{n^2+n}{(n+1)^2}$.

(5) In einer Klasse mit 20 Studenten sollen Arbeitsgruppen zu je 4 Studenten gebildet werden. Wieviele Arbeitsgruppen sind möglich?

(6) Löse die Gleichung $x^3 = \sin(x),\ \ x > 0,$ numerich wie folgt: Start mit $x_1 = 0.5$.

(a) Newton.Methode.

(b) Regula falsi, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$, falls möglich.

(c) Fixpunktverfahren, falls möglich.

Nach wievielen Schritten hat man jeweils eine Genauigkeit von 4 Stellen hinter dem Komma erreicht?

Viel Glück!

WIR

2.48 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/47

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, $f_3(x) = \sqrt{f_2(x)}$ mit vorläufig unbekanntem a, b, c. $f(x)$ ist wie folgt zusammengesetzt: $f(x) = f_1(x)$ für $x \in [0 = x_0,\ 1 = x_1]$. Danach ist $f(x) = f_2(x)$ mit $f_1(1) = f_2(1)$ und $f_1{}'(1) = f_2{}'(1)$. Weiter rechts nach einem vorläufig nicht bekannten Wert x_2 ist $f(x) = f_3(x)$ mit $f_3(x_2) = f_2(x_2)$ und $f_3{}'(x_2) = f_2{}'(x_2)$.

(a) Untersuche, ob das damit erhaltene Gleichungssystem überbestimmt ist. (Falls ja, so lasse man die letzte Bedingung Fallen u.s.w.)

(b) Berechne $f(x)$ und bestimme die erste Nullstelle x_3 von f auf der positiven x–Achse.

(c) Wir lassen die Kurve f um die x–Achse rotieren. Berechne das Volumen des Rotationskörpers zwischen 0 und x_3.

(2) $f(x) = (x-1)^2$, $h(x) = 2\,f(x)$, $I = [0,\ 1]$.
Zwischen f und h entsteht über I eine Fläche A.

(a) Skizziere die Situation.

(b) Berechne den Schwerpunkt von A mittels Integration.

(3) $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$ wird über $I = [0,\ x_1]$ um die x–Achse rotiert. Berechne das Verhältnis von Volumen zu Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers als Funktion von x_1.

Viel Glück!

WIR

2.49 Test: Nichtlineare Gleichungen, lineare Ungleichungen II/48

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • Important:

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein! Graphen bitte beachten! Genauigkeit: 6 Stellen hinter dem Komma.
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille! Tenir compte d'un graphe. Exactitude: 6 places apres le point décimal.*
Bei numerischen Methoden: Nur die zu 0 nächstgelegene Lösung angeben! • *Méthodes numériques: Donner seulement la solution la plus proche de* 0.

(1) $\frac{1}{10}\,e^{-\frac{x^2}{4}} = x \;\Rightarrow\; x = ?$ $\quad\leadsto$ Iteration! • *Itération!*

(2) $-x^5 + x^3 + 20 = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$ $\quad\leadsto$ Tangentenmethode! • *Méthode de la tangente!*

(3) $2\,\cos(x) + \sin(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$ $\quad\leadsto$ Sekantenmethode! • *Méthode de la sécante!*

(4) $x^4 + \frac{1}{3}\,x^3 + 2\,x^2 - 3 = x \;\Rightarrow\; x = ?$ $\quad\leadsto$ Methode frei! • *Méthode libre!*

(5) Lineare Programmierung: • *Programmation linéaire:*

$$\left|\begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ y & \geq & -\frac{1}{4}\,x + 2 \\ 4\,x + 2\,y & \geq & 12 \\ 2\,x + 4\,y & \geq & 12 \\ z & = & x + y \to Min \end{array}\right|$$

(6) Lineare Programmierung: • *Programmation linéaire:* %

$$\left|\begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x + y & \leq & 5 \\ x + y & \geq & 1 \\ x & \geq & \frac{1}{4}\,y \\ x & \leq & \frac{3}{2}\,y \\ a)\ z & = & 2\,x + y \to Max \\ b)\ z & = & 2\,x + y \to Min \end{array}\right|$$

(7) Zusatz: Lineare Programmierung: • *Supplément: Programmation linéaire:*

$$\left|\begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x+y & = & 80 \\ 4\,x+6\,y & \leq & 420 \\ 7\,x & \leq & 350 \\ z & = & 2\,x+5\,y \rightarrow Min \end{array}\right|$$

(8) Zusatz: Lineare Programmierung: • *Supplément: Programmation linéaire:*

$$\left|\begin{array}{lcl} x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\ 2\,x_1+4\,x_2+x_4 & \leq & 20 \\ x_1+x_2+5\,x_3+x_4 & \leq & 30 \\ x_2+x_3+x_4 & \leq & 10 \\ z & = & 2\,x_1+x_2+3\,x_3+x_4 \rightarrow \text{Max} \end{array}\right|$$

Viel Glück!

2.50 Test: Nichtlineare Gleichungen, lineare Ungleichungen II/49

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • Important:

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein! Graphen bitte beachten! Genauigkeit: 6 Stellen hinter dem Komma.
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille! Tenir compte d'un graphe. Exactitude: 6 places apres le point décimal.*
Bei numerischen Methoden: Nur die zu 0 nächstgelegene Lösung angeben! • *Méthodes numériques: Donner seulement la solution la plus proche de* 0.

(1) $\frac{1}{20}\,e^{-\frac{x^2}{2}} = x \;\Rightarrow\; x = ?$ $\leadsto$ Iteration! • *Itération!*

(2) $x^5 - x^3 + 10 = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$ $\leadsto$ Tangentenmethode! • *Méthode de la tangente!*

(3) $\cos(x) - 2\,\sin(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$ $\leadsto$ Sekantenmethode! • *Méthode de la sécante!*

(4) $x^4 + 2\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$ $\leadsto$ Methode frei! • *Méthode libre!*

(5) Lineare Programmierung: • *Programmation linéaire:*

$$\left|\begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ 6\,x + 2\,y & \geq & 18 \\ 2\,x + 4\,y & \geq & 16 \\ y & \geq & -\frac{1}{4}\,x + 3 \\ z & = & 3\,x + 2\,y \to Min \end{array}\right|$$

(6) Lineare Programmierung: • *Programmation linéaire:* %

$$\left|\begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x + y & \leq & 6 \\ x + y & \geq & 2 \\ y & \leq & 2\,x \\ y & \geq & \frac{1}{2}\,x \\ a)\ z & = & x + 2\,y \to Max \\ b)\ z & = & x + 2\,y \to Min \end{array}\right|$$

(7) Zusatz: Lineare Programmierung: • *Supplément: Programmation linéaire:*

$$\left| \begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x+y & = & 100 \\ x+3\,y & \leq & 240 \\ 4\,x & \leq & 320 \\ z & = & x+2\,y \rightarrow Min \end{array} \right|$$

(8) Zusatz: Lineare Programmierung: • *Supplément: Programmation linéaire:*

$$\left| \begin{array}{lcl} x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 & \leq & 30 \\ x_2+x_3+x_4 & \leq & 10 \\ 2\,x_1+4\,x_2+x_3 & \leq & 20 \\ z & = & 2\,x_1+x_2+x_3+3\,x_4 \rightarrow Max \end{array} \right|$$

Viel Glück!

2.51 Test: Reihen II/50

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne die Summen der folgenden Reihen:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+2)}$

(2) Wo konvergiert die folgende Reihe absolut? — Wo divergiert sie?

$$\frac{x-2}{1} + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{n} + \ldots$$

(3) Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3\,n-1}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n!)^3}$

(b) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} + \ldots$ (c) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \ldots$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^p},\;\; p \in \mathbb{N}$ (d) $1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + + \ldots$

Viel Glück!

2.52 Test: Reihen, Potenzreihen II/51

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne die Summen der folgenden Reihen, falls möglich:

(a) $\sum_{k=0}^{n} (2\,k+1)$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{(-n)}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n+3)}$

(2) Untersuche die Konvergenz sowie die absolute Konvergenz der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3}}{4\,n-2}$

(b) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} + \ldots$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{n}) \cdot \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \cdot \cos(n)$

(d) $x+1+\frac{(x+1)^3}{2}+\frac{(x+1)^5}{3}+\frac{(x+1)^7}{4}+\frac{(x+1)^9}{5}+\ldots$

(3) Ermittle die Anzahl Häufungspunkte von $\sin(\frac{1}{\sqrt[3]{2\,n\,\pi+1}-1} + \frac{-n\,\pi}{2}\,(-1)^{3\,n})$.

(4) Sei $f(x) = e^x$, $\quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$.

(a) Konvergenzradius von $g(x)$?

(b) Was lässt sich zu $g'(x)$ sagen? (Kriterien!)

(c) $g(0) = ?$ $\qquad g(1) = ?$

(d) Was gilt zwischen $g(x)$ und $g'(x)$ für eine Beziehung?

(e) $\int_0^x g(t)\,dt = ?$

(f) Was gilt für eine Beziehung zwischen $g(x)$ und $\int_0^x g(t)\,dt$?

Viel Glück!

WIR

2.53 Test: Reihen, Potenzreihen II/52

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x} \cdot e^x$.

(a) Entwickle diese Funktion in eine Potenzreihe bis zu einem Rest der Ordnung 6 um das Zentrum $x_0 = 0$.

(b) Sei $f_6(x)$ die Reihe ohne den Rest. Berechne damit $\int\limits_{-0.1}^{0.2} f_6(x)\,dx$.

(2) Sei $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ und $f_1(x) = \dfrac{d\,\sin(x)}{d\,x} - 1$.

(a) Entwickle $f_1(x)$ in eine Potenzreihe bis zu einem Rest der Ordnung 6 um das Zentrum $x_0 = 0$.

(b) Ersetze x durch $(12 - 6\,z)^{0.5}$ und vereinfache den Ausdruck.

(c) Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe von f_1.

(3) Sei $f(x) = (2 - x)^r\, \ln(x)$.

(a) Entwickle $f(x)$ in eine Potenzreihe bis zu einem Rest höchstens der Ordung 6 um das Zentrum $x_0 = 1$.

(b) Welcher Fehler entsteht für $r = 0$ und $x \in [0.5,\ 1.5]$ höchstens?

(c) Welcher Fehler entsteht für $r = \pi$ und $x \in [0.5,\ 1.5]$ höchstens?

Viel Glück!

2.54 Test: Kombinatorik, Potenzreihen, Vektorgeometrie II/53

Abschrift • *Copie*

(1) Entwickle in eine Potenzreihe unter Benutzung der Potenzreihen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

(a) $f_1(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

(b) $f_2(x) = \sin(\cos(x))$

(2) Bilde die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a(n) \cdot b(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{n} \cdot e^x \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x} \cdot e^{-n}$.

(a) Konvergiert diese Reihe?

(b) Falls ja, was ist dann der Konvergenzbereich?

(3) Gegeben ist ein Dreieck $A(1; -1)$, $B(3; 6)$, $C(4; -3)$. Durch die Seitenmittelpunkte wird ein Kreis gelegt. Berechne diesen Kreis auf 6 Stellen genau:

(a) Radius?

(b) Mittelpunkt?

(4) Mit Hilfe der Zeichen $\{+, -, 0, 1\}$ werden immer neue 7–stellige Zeichenfolgen kombiniert, wobei das mittlere Zeichen immer eine 1 ist. Alle so entstandenen Zeichenfolgen werden fortlaufend hintereinander geschrieben. Wieviele mögliche, auf diese Weise entstehenden Zeichenketten gibt es? (Es genügt eine „wissenschaftliche Zahlendarstellung“ $a \cdot 10^b$ anzugeben.)

Viel Glück!

WIR

2.55 Test: Reihen, Potenzreihen, Differentialgleichungen II/54

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $y' = y^2 - x^2 + \sin(x-y) \rightsquigarrow$ Richtungsfeld?

(b) $y' = \dfrac{\tan(x-y)}{y} \cdot x + x \cdot y \rightsquigarrow$ Richtungsfeld?

(2) Berechne die ersten 8 Glieder der Potenzreihe:

(a)
$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(-x) - \sin(-2\,x), \;\; x_0 = 0$$

(b)
$$f(x) = (x^3 - 2\,x^2 + x - 1)(\sin(x) - \cos(x)), \;\; x_0 = 0$$

(3) Bestimme den Konvergenzbereich:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n + x^{n-1})\,\frac{(n-1)}{n!}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{(n! + (2n)!)}$$

(4) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n})}{(\sqrt{n} - n \cdot \sqrt[3]{n})} \cdot e^n$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n) - \ln(2\,n)}{e^n - n^2}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{n + \sqrt{n}}$$

Viel Glück!

WIR

2.56 Test: Reihen, Potenzreihen, Differentialgleichungen II/55

Abschrift • *Copie*

(1) ⊘ Entwickle die folgenden Funktionen je in eine Potenzreihe bis Restglieder von $O[x^7]$.
⊘ Berechne, falls möglich, den Konvergenzradius.

(a)
$$f(x) = \frac{e^{-x} + \sin(x)}{2}, \;\; x_0 = 0$$

(b)
$$f(x) = x^3 - 2\,x^2 + 8\,x - 1 - ln(\frac{x}{2}), \;\; x_0 = 1$$

(c)
$$f(x) = (\cos(x)) \cdot (\sin(x))$$

(2) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren (Begründung notwendig!):

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\,n+3})^n}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$$

(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3\,n+1})^7$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3\,n+1})^{\frac{1}{n}}$$

(3) Skizziere das Richtungsfeld:

$$y\,' = -\frac{x\,\sin(y)}{y\,\sin(x)} + \sin(x \cdot y)$$

Hinweis: Genügend viele Linienelemente!

Viel Glück!

WIR

2.57 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, nichtlineare Gleichungen, Fehlerrechnung II/56

Abschrift • *Copie*

(1) Löse die Gleichung $e^{-x} + 4 - \frac{1}{2} \cdot x = 0$ numerisch auf 6 Stellen genau wenn möglich mit der Fixpunktmethode. Start: $x_1 = 1$.

(2) Gegeben sind die Messpunkte auf einem hypothetischen Funktionsgraphen:

$$(1.00/2.83), (2.00/3.21), (3.50/1.96/), (4.00/2.42), (5.00/1.06), (6.50/4.25)$$

(a) Approximiere die Funktion durch ein Polynom.

(b) Berechne damit das Integral zwischen 2.00 und 6.00.

(c) Berechne die Steigung des Graphen bei $x = 1.5$.

(d) Was müsste man wissen, um die Genauigkeit der Approximation zu beurteilen?

(3) Bestimme die Extremwertstellen der folgenden Funktion und beurteile, um welche Art Extremum es sich jeweils handelt:

$$f(x, y, z) = x, y + 2\,x^2 + y^2 + x + 1$$

(4) Berechne das totale Differential der folgenden Funktion:

$$f(x, y, z) = \cos(x\,y) + y\,e^x - 3\,ln(y - z) + z$$

(5) Suche eine einfache Annäherung von $f(x) = (1 + x)^n$, $x << 1$ und berechne damit $(1.000'000'000'041)^{163}$.

(6) Gegeben: $\Phi(x, y, z, w) = a\,\cos(x\,y) \cdot (1 - \sin(x)) + \frac{y\,z^2}{w} - b\,\frac{y^2}{w^2}$. Folgende Werte sind bekannt:

$x = 0.8652 \pm 0.0020$ $\quad a = 2$
$y = 3.000 \pm 0.001$ $\quad b = 3$
$z = 0.469 \pm 0.004$
$w = 1.002 \pm 0.001$

Berechne den Funktionswert mit dem absoluten Messfehler!

Viel Glück!

WIR

2.58 Test: Lineare Abbildungen und Matrizen, Differentialgeometrie und Kurven, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Gleichungssysteme II/57

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • Important:

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!*

(1) $x^2\,(2-y) = y^2\,(2+y) \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(2) $x^2 - 2\,x\,y + x^2 - y^3 = \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(3) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 5\,t\cdot\cos(t)+\cos(10\,t) \\ 5\,t\cdot\sin(t)+\sin(10\,t) \\ t \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Tangente, Normalebene für $t = \dfrac{\pi}{2}$!
• *Tangente, plan normal pour* $t = \dfrac{\pi}{2}$*!*

(4)

$$\begin{array}{rcl} w + x - y + 2\,z + 2 & = & 0 \\ 2\,y - 2\,x - 2\,w - 4\,z - 4 & = & 0 \end{array}$$

Lösungsmenge • *Ensemble des solutions*
$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} = ?$

(5) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Lineare Abbildung • *Application linéaire* $\begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 9 \end{pmatrix} \longmapsto ?$

(6) $\vec{x}\,' = A\cdot\vec{x}+\vec{b},\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Bild der Geraden • *Image de la droite* $y = 4\,x+1$?

%

(7) Geg.: • **Donné:** $KS(\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}) \xmapsto{f_1} \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\} \xmapsto{f_2} \{\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}''\} \xmapsto{f_3} \{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$

KS = Koordinatensystem • KS = *système de coordonnées*

f_1 = Verschiebung um $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ • f_1 = *déplacement de* $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

f_2 = Drehung um $\alpha = +\dfrac{\pi}{2}$ • f_1 = *rotation avec* $\alpha = +\dfrac{\pi}{2}$

$f_3 \rightsquigarrow \ \vec{e}_1{}'' \longmapsto \vec{e}_1{}''' = -\vec{e}_1{}''$

<u>Fragen:</u> • <u>*Problèmes:*</u>

a) $P = (4;5) \longmapsto \,?$ Im neuen System $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$?
• *Dans le nouveau système* $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$*?*

b) $\{(x,y) \mid y = \dfrac{1}{2}\,x+3\} \longmapsto \,?$

Viel Glück!

WIR

2.59 Test: Lineare Abbildungen und Matrizen, Differentialgeometrie und Kurven, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Gleichungssysteme II/58

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • **Important:**

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!*

(1) $4\,x^2\,(2+y) = y^2\,(2-y) \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(2) $x^3 + 2\,x\,y - x^2 - y^2 = \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(3) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 10\,t\cdot\sin(t) - \cos(10\,t) \\ 10\,t\cdot\cos(t) + \sin(10\,t) \\ t \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Tangente, Normalebene für $t = \pi$!
• *Tangente, plan normal pour $t = \pi$!*

(4)

$$\begin{aligned} w + x + 4\,y - z + 4 &= 0 \\ 4\,z - 4\,x + 4\,w - 16\,y - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungsmenge • *Ensemble des solutions* $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} = ?$

(5) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Lineare Abbildung • *Application linéaire* $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix} \longmapsto ?$

(6) $\vec{x}\,' = A\cdot\vec{x} + \vec{b},\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Bild der Geraden • *Image de la droite* $y = 3\,x - 1$?

%

(7) Geg.: • **Donné:** $KS(\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}) \xmapsto{f_1} \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\} \xmapsto{f_2} \{\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}''\} \xmapsto{f_3} \{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$

$KS =$ Koordinatensystem • $KS =$ *système de coordonnées*

$f_1 =$ Verschiebung um $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ • $f_1 =$ *déplacement de* $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$f_2 =$ Drehung um $\alpha = +\frac{3\pi}{2}$ • $f_1 =$ *rotation avec* $\alpha = +\frac{3\pi}{2}$

$f_3 \rightsquigarrow \ \vec{e}_2{}'' \longmapsto \vec{e}_2{}''' = -\vec{e}_2{}''$

<u>Fragen:</u> • <u>*Problèmes:*</u>

a) $P = (5;2) \longmapsto ?$ Im neuen System $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$?
• *Dans le nouveau système* $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$*?*

b) $\{(x,y) \mid y = 2\,x+1\} \longmapsto ?$

Viel Glück!

WIR

2.60 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/59

Abschrift • *Copie*

(1) Eine Fläche A entsteht durch zwei Kreise mit dem Radius R, wobei jeder Kreis seinen Mittelpunkt auf der Peripherie des andern hat. Wenn wir die beiden Kreisflächen mit K_1 und K_2 bezeichen, so ist $A = (K_1 \cup K_2) \setminus K_1$. Über A wird ein Zylinder der Höhe 1 errichtet. Berechne den Inhalt von A sowie das Zylindervolumen.
Hinweis: Berechne A in Polarkoordinaten ($\leadsto \quad r = r(\varphi)$) mit Zentrum = Mittelpunkt O von K_1. Wenn E der von O am weitesten entfernte Punkt von K_2 ist, so kann die Kreislinie von K_2 als Thaleskreis über $\overline{OE}$ gesehen werden. Diese Tatsache kann man gewinnbringend ausnützen.

(2) Wir betrachten den „Bienenkorb" $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ über der Grundebene, d.h. für $z \geq 0$.

(a) Berechne den Volumeninhalt des „Bienenkorbs".

(b) Berechne den Oberflächeninhalt ohne den Grundflächenanteil.

(3) Gegeben ist die Ebene $\Phi : \; x+2\,y+3\,z = 6$ sowie die Funktion $f(x, y, z) = 3\,x+2\,y+z$. Der Urspung zusammen mit den Durchstosspunkten der Achsen durch Φ bilden die Eckpunkte eines Körpers H. (Tetraeder). Berechne das Volumenintegral $\int\limits_H f(x, y, z)\, dV$.

Viel Glück!

WIR

2.61 Test: Differential und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Differentialgleichungen II/60

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $y' = e^{-(x+y)} + \sin(x) + \cos(y),\ \ (x,y) \in D = [0,\ 2\pi] \times [0,\ 2\pi] \rightsquigarrow$ Richtungsfeld?

(b) $y' = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{y^2}{x^3} \rightsquigarrow$ Vollständige Lösung?

(2) Körper $K = K(OP_1P_2P_3),\ \ P_1 = (1;0;0),\ \ P_2 = (;3;0),\ \ P_3 = (0;0;2)$. (Skizze!) Berechne den Abstand des Schwerpunktes von K von der (y,z)–Ebene!

(3) Gegeben ist eine zum Ursprung zentrische Hohlkugel H mit dem inneren Radius 1 und dem äusseren Radius 2. (Skizze!) Berechne folgendes Integral:

$$\iiint\limits_H \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \,?$$

(4) A ist die Oberfläche einer Halbkugel K_H, welche ihr Kugelzentrum im Ursprung hat und deren Punkte keine negativen z–Koordinaten besitzen. Zudem ist $f(P) = \vartheta,\ \ \vartheta =$ Winkel zwischen dem Radius durch P und der z–Achse. (Skizze!) Berechne:

$$\iint\limits_{K_H} f\,dA$$

(5) Auf der (x,y)–Ebene senkrecht steht ein Zylinder Z, dessen Achse die z–Achse ist. Z hat die Höhe 25 und den Radius 10. Eine Schnittebene Φ steht senkrecht auf der (y,z)–Ebene und geht durch die Punkte $P_1(0,-10,0)$ und $P_2(0,10,25)$. Φ schneidet die obere Hälfte des Zylinders weg. Das verbleibende Volumen heisst Z_1.
Eine durch die z–Achse gehende Ebene Ψ_1 bildet mit der x–Achse den Winkel $+45^o$ und eine weitere durch die z–Achse gehende Ebene Ψ_2 bildet mit der x–Achse den Winkel $+90^o$ (Skizze!) Ψ_1 und Ψ_2 schliessen demnach einen Winkel von 45^o ein und schneiden in diesem Winkel ein kuchenstückartiges Volumen aus Z_1 aus. Dadurch entsteht der Körper Z_2. A sei die von Z an Z_2 verbleibende gerundeten äussere Mantelfläche mit dem Radius 10!
Weiter ist $f(x,y,z) = y \cdot z$. Berechne:

$$\iint\limits_A f\,dA$$

Viel Glück!

WIR

2.62 Test: Equations différentielles, analyse vectorielle II/61

Abschrift • *Copie*

(1) (a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,x \cdot \cos(y)\,dx \right) dy = \,?$$

(b) f est harmonique $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{d^2 f}{d\,y^2} \;:=\; \triangle f = 0.$
Est–ce que $f(x,y) = e^{-x}\,\cos(x)$ est harmonique?

(c)

$$f(x,y,z) = \sin(x,y,z),\;\; \frac{\partial}{\partial x} \triangle\, f = \,? \qquad (\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

(d)

$$w(x,y,z) = x^2\,e^{y\,z} + y\ln(z) \;\Rightarrow\; dw = \,?$$

(2) (a) Donné: Cylindre $Z(R,h)$, $r =$ rayon, $h =$ hauteur.

$$r = 20\,mm \pm 0.02\,mm,\;\; h = 40\,mm \pm 0.02\,mm$$

Estimer l'erreur max. du volume V par la différentielle!

(b)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4 \;\Rightarrow\; \frac{d\,y}{d\,x} = \,?$$

(c)

$$f(x,y) = x^2 \cdot ln(y),\;\; P(5;1) = P_0,\;\; \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Derivée directionnelle de f au point P_0 en direction de $\vec{v}$?

(3) (a) $f(x,y) = (x^2 + 3\,y^2)\,e^{-(x^2+y^2}$. Chercher les minimums et les maximums!
(b) $f(x,y,z) = 4\,x^2{+}y^2{+}z^2$. Trouver les extrémums de f sous la contrainte $x{+}2\,y{-}z = 1$!

(4) Chercher la solution:

(a)

$$y\,' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

(b)

$$y\,' + 2\,y = 3\,x,\;\; y(1) = 1$$

(c)

$$y\,'' + 2\,y\,' + y = 3\,e^{-x}$$

(d)

$$y\,'' + 4\,y\,' + 5\,y = 0$$

%

(5)

$$y' = \sin(x + 2\,y), \;\; x, y \in [2, \; 2]$$

(a) Champ de direction?

(b) Solution sous la contrainte $y(0) = 0$? (Esquisse!)

Bonne chance!

2.63 Test: Eigenwerttheorie mit Matrizen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/62

Abschrift • *Copie*

(1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Eigenwerte?

(b) Eigenvektoren?

(c) Bild von $\triangle ABC$, $A(0;0;0)$, $B(-1;1;1)$, $C(1;1;1)$, unter M?

(d) Flächeninhalt des Bilddreiecks?

(e) $(M^{-1})^{100} = ?$

(2) $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Entwickle mit Hilfe des Satzes von Caley–Hamilton eine explizite Formel für A^{-1}.

(3) Ein Volumen ist begrenzt durch $z = 3\,x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$ und $z + y = 6$. Berechne den Inhalt!

(4)

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

Hinweis: Geeignetes Koordinatensystem!

(5)

$$f(x,y) = h \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right) \text{ mit } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

G ist das Gebiet in der Grundebene mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elliptisches Sinusoid). Berechne

$$\iint_G |f(x,y)|\, dG.$$

Hinweis: Subst. $x = a \cdot u$, $y = b \cdot v$, im entstehenden Integral Polarkoordinaten verwenden.

Viel Glück!

WIR

2.64 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung II/63

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Berechne $\int\limits_{-1}^{2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$ *(Hinweis: Potenzreihe!)*

(2) Gegeben: Eckpunkte $O(0;0;0)$, $P_1(2;0;0)$, $P_2(0;2;0)$, $P_3(0;0;2)$ einer Pyramide H.
Berechne $\int\limits_{V=H} x^2+x^2+z^2\,dV.$

(3) Gegeben: Kugel $K=K_r(O)$, $O(0;0;0)$, $r=4$. Berechne $\int\limits_{V=K} x^2+x^2+z^2\,dV.$

(4) Gegeben: $z = f(x,y) = 4x^2-y^2 \geq 0.$ $\leadsto$ f bestimmt ein Volumen V zwischen der Grundebene und der Funktionsfläche mit nicht negativem z. Berechne den Inhalt von V.

(5) Berechne die allfälligen Extrema von $f(x,y,z)=x^2\cdot\sin(x+y)+y+\cos(z)$.

(6) Gegeben: $f(s,\alpha,\beta,\gamma)=\dfrac{s\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)}{\cos(\gamma)}+\dfrac{\sqrt{s^2-2}\cdot\cos(\gamma)}{\sin(\alpha)}.$
Dazu sind folgende Messwerte bekannt:

$$\begin{array}{rclcrcl} s &=& 40.07\pm 0.01 & \qquad & \beta &=& 44.15^o\pm 0.02^o \\ \alpha &=& 20.02^o\pm 0.02^o & & \gamma &=& 30.00^o\pm 0.02^o \end{array}$$

$$f(x,\alpha,\beta,\gamma)=\,?\,\pm\,?$$

Viel Glück!

2.65 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung II/64

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Das im 2. Quadranten liegende achsenparallele Gebiet G wird bestimmt durch den Ursprung sowie die Punkte $(-0.1; 0)$ und $(0; 2)$. Berechne $\int\limits_G \dfrac{\arctan(x)}{x}\, dG$.

(2) Ein in achsenparalleler Lage sich befindlicher Keil H ist gegeben durch die Eckpunkte $O(0; 0; 0)$, $P_1(1; 0; 0)$, $P_2(1; 1; 0)$, $P_3(0; 1; 0)$, $P_4(0; 1; 1)$ und $P_5(0; 0; 1)$. (Skizze!) Berechne $\int\limits_{V=H} x + y + z\, dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K = K_r(O)$, $O(0; 0; 0)$, $r = 1$. Berechne $\int\limits_{V=K} \dfrac{e^{-(x^2+x^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+x^2+z^2}}\, dV$.

Hinweis: Kugelkoordinaten verwenden! $\rightsquigarrow$ $dx\, dy\, dz = D \cdot dr\, d\varphi\, d\alpha$, $D = r^w \cdot \sin(\alpha)$. *$\alpha$ ist der Winkel ab der positiven z–Achse, φ der jenige ab der positiven x–Achse.*

(4) Gegeben: $f(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \dfrac{(-1)}{y^2 - 1}$, $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, $y \in [-0.6, 0.6]$.

(a) Extrema?

(b) $x = 0.114 \pm 0.001$, $y = 0.521 \pm 0.002 \Rightarrow f(x, y) = ? \pm ?$

Viel Glück!

2.66 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung II/65

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Das im 1. Quadranten liegende achsenparallele Gebiet G wird bestimmt durch den Ursprung sowie die Punkte $(0; 0.1)$ und $(0; 3)$. Berechne $\int\limits_G \frac{\tan(x)}{x}\, dG$.

(2) Ein in achsenparalleler Lage sich befindlicher Keil H ist gegeben durch die Eckpunkte $O(0; 0; 0)$, $P_1(1; 0; 0)$, $P_2(1; 1; 0)$, $P_3(0; 1; 0)$, $P_4(0; 1; 1)$ und $P_5(0; 0; 1)$. (Skizze!) Berechne $\int\limits_{V=H} x - y + z\, dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K = K_r(O)$, $O(0; 0; 0)$, $r = 1$. Berechne $\int\limits_{V=K} \frac{-e^{(x^2+x^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+x^2+z^2}}\, dV$.

Hinweis: Kugelkoordinaten verwenden! $\leadsto$ $dx\, dy\, dz = D \cdot dr\, d\varphi\, d\alpha$, $D = r^w \cdot \sin(\alpha)$. *$\alpha$ ist der Winkel ab der positiven z–Achse, φ der jenige ab der positiven x–Achse.*

(4) Gegeben: $f(x, y) = -\sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \frac{(1)}{y^2 - 2}$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-0.6, 0.6]$.

(a) Extrema?

(b) $x = 0.114 \pm 0.002$, $y = 0.512 \pm 0.001 \Rightarrow f(x, y) = ? \pm ?$

Viel Glück!

2.67 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/66

Abschrift • *Copie*

(1) $K = K_r(O) =$ Kugel um den Urspung O mit Radius r. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

$$\int\limits_{V=K} f(x, y, z)\, dV = \,?$$

(2) Ein in achsenparalleler Lage sich befindlicher Keil H ist gegeben durch die Eckpunkte $O(0; 0; 0)$, $P_1(3; 0; 0)$, $P_2(3; 1; 0)$, $P_3(0; 1; 0)$, $P_4(0; 1; 2)$ und $P_5(0; 0; 2)$. (Skizze!)
$f(x, y, z) = z^2 - x - y \quad \leadsto$ Berechne $\int\limits_{V=H} f(x, y, z)\, dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K = K_R(O)$, $O(0; 0; 0)$, $R = 4$. Berechne $\int\limits_{V=K} \frac{e^{-\pi\,(x^2+x^2+z^2)}}{4\,\pi\,\sqrt{x^2+x^2+z^2}}\, dV$.

(4) Das im 1. Quadranten liegende achsenparallele Gebiet G wird bestimmt durch den Ursprung sowie die Punkte $(0; 0.1)$ und $(0; 2)$. Berechne approximativ $\int\limits_{G} \left(\frac{\arctan(x)}{x}\right) dG$.

Viel Glück!

2.68 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/67

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $\displaystyle \frac{d}{d\,x}\int\limits_0^{x^3+1} \sin(x\cdot t+1)\,dt = \,?$

(b) $\displaystyle \frac{d}{d\,t}\int\limits_0^{t} g(\sin(x))\cdot sin(k\cdot t+1)\,dx = \,?$ (g analytisch)

(2) $K = K_{R_1,R_2}(O) =$ Hohlkugel um O mit Innenradius R_1 und Aussenradius R_2. Berechne:

$$\int\limits_{V=K} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \,?$$

(3) Das dreieckige Gebiet G ist definiert durch die Eckpunkte $P_1(1;0)$, $P_2(1;1)$, $P_3(0;1)$. Berechne:

$$\iint\limits_G \frac{y^2}{x^2}\,dG = \,?$$

(4) Ein Papierband der Breite $2\,R$ ist mit seiner Mittellinie der Länge nach an die y–Achse geklebt und um diese Achse über seine Länge gleichmässig um den Winkel π vergreht. Die Länge der Mittelline misst $\frac{k\,\pi}{2}$, $k\in\mathbb{N}$. Das Band ist somit skizzierbar mit $y\in[-\frac{k\,\pi}{4},\ \frac{k\,\pi}{4}]$.

(a) Skizziere das Band!

(b) Untersuche, ob die Parametrisierung

$$\vec{v} = \vec{v}(t,r) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(t) \\ k\cdot t \\ r\cdot\sin(t)\end{pmatrix},\ \ t\in[-\frac{k\,\pi}{4},\ \frac{k\,\pi}{4}],\ \ r\in[-R,\ R]$$

das Band richtig beschreibt. (Falls dies nicht der Fall ist, so ist die notwendige Korrektur anzugeben.)

(c) Berechne die einseitige Oberfläche des Bandes und vergleiche die erhaltene Grösse mit der Grösse eines Rechteckstreifens der Länge $\frac{k\,\pi}{2}$ und der Breite $2\,R$.

(d) Berechne die Kurvenlänge einer äusseren Längskante. Was ist bezüglich Herstellung des Papierstreifens zu bemerken, wenn man das Resultat mit der Länge der Mittellinie vergleicht?

Viel Glück!

WIR

2.69 Test: Fourieranalysis, Vektoranalysis II/68

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} t & t \in [0\ a] \\ 0 & t \not\in [0\ a] \end{cases}$$

Bestimme die Fouriertransformierte $\hat{f}(\Omega)$ durch Berechnung.
Achtung: Für $\hat{f}(\Omega) = \hat{f}(0)$ ist eine spezielle Abklärung notwendig.

(2)

$$g(t) \quad = \quad \begin{cases} t+1 & t \in [-1,\ 1) \\ 0 & t \in [1,\ 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimme die Fouriertransformierte von $\hat{g}(\Omega)$.
Die Verwendung von Tabellen ist erlaubt.

(b) Bestimme den Definitionsbereich von $\hat{g}(\Omega)$ sowie den Grenzwert für $\Omega \to 0$.

(3) Sei $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x\,x \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$. Berechne $\int\limits_C \langle \vec{v}, d\vec{r}\rangle$ ($d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$) längs der Kurve

$$C = \{\begin{pmatrix} \sin(t) \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,\ 2\,\pi]\}.$$

Hinweis: Verlege die Betrachtung in den $\mathbb{R}^3$ und kläre ab, ob es sich bei $\vec{v}$ um ein konservatives Feld handelt. Dann könnte eine Potentialfunktion weiterhelfen...

(4) Sei $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2\,x\,y \\ z \end{pmatrix}$. Untersuche, ob und wo allenfalls das Feld $\vec{F}$ Quellen resp. Senken hat. Berechne dann den Fluss von $\vec{F}$ durch die Oberfläche des Einheitswürfels W,

$$W = \{(x;y;z) \mid 0 \leq x,y,z \leq 1\}.$$

(5) Das Gebiet G ist von der Kurve C umschlossen.

$$C = \{(x;y) \mid x = \cos(t),\ \ y = \sin(t)\cdot\cos(t),\ \ t \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\}.$$

Berechne mit Hilfe des Satzes von Green den Inhalt von G.

Viel Glück!

WIR

2.70 Test: Fourieranalysis, Potenzreihen II/69

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Entwickle $f_1(x) = e^{x^2} + e^x$ in eine Potenzreihe bis zum 6. Glied um $x_0 = 0$.

(b) Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe von f_1? (Begründung!)

(c) Berechne mit Hilfe der Potenzreihe von f_1 eine Näherung von $\int\limits_0^2 f_1(x)\,dx$.

(2) (a) Skizziere die Funktion

$$f_2(t) \quad = \quad \begin{cases} |t| + t & t \in (-\pi,\ \pi] \\ f_2(t + 2\,n\pi) & n \in \mathbb{Z},\ \ t + 2\,n\pi \in (-\pi,\ \pi] \end{cases}$$

(b) Entwickle $f_2(t)$ in eine Fourierreihe!

(c) Kann man $f_2(t)$ in eine Potenzreihe entwickeln? — Wie sieht eine solche Entwicklung aus? — Begründung!

(3)

$$g(t) \quad = \quad \begin{cases} e^{-a\,t} & t \in [0,\ \infty) \\ 0 & t \notin [0,\ \infty) \end{cases}$$

Berechne die Fouriertransformierte von $g(t)$.

(4) Erkläre das Phänomen von Gibbs!

Viel Glück!

WIR

Ende • *Fin*