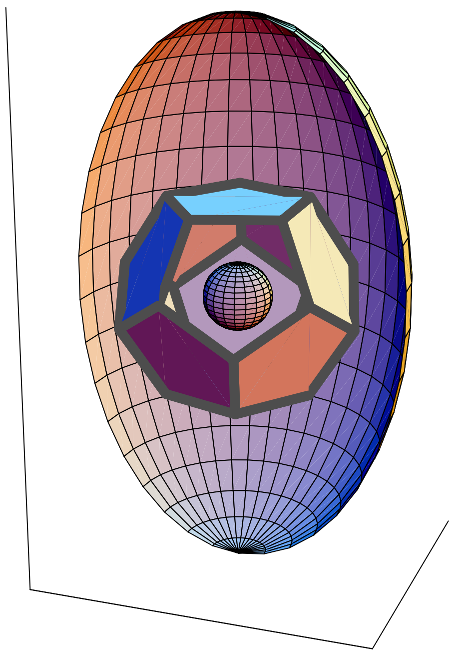
◇ Tests ◇ Tests ◇
◇ Archiv ◇
◇ 3 ◇
◇ Diplom ◇ 1989 – 2000 ◇ *Diplôme* ◇



von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel — HTA-Biel/BFH — HTI/BFH bis • *jusqu'à* 2000

Ausgabe vom 15. September 2007, Version 1.0.0 / d/f

Mit klickbaren Links • *Avec des lines cliquables*

WIR1 /2007/LaTex/ArchivTestsBis2000_3.TEX

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

• *Produit avec PCTeX sous Win XP. Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

• *L'homme a trois occasions pour apprendre:*
Premièrement par réflexion, c'est la plus noble;
deuxièmement par l'imitation, c'est la plus facile;
troisièmement par l'expérience, c'est la plus dure.

(Selon Confucius)

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

Kapitel • Chapitre 1

Einführung — Introduction

1.1 Gegenstand — Sujet

In dieser Sammlung ist eine Auswahl von Aufgaben zusammengefasst, welche in den Jahren vor 2000 verwendet worden sind.
• *Dans cette collection, un choix de problèmes est rassemblé. Il s'agit de problèmes qui ont été utilisés dans les années avant 2000.*

Klickbare Links zu Skripten: • *Liens cliquables pour les cours:*

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html (Skript–Download) • *Download cours*

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur in Papierform vorhanden. An eine gesamthafte Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.
• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale.*

1.2 Gliederung — Disposition

1.2.1 Sprachen — Langues

Bemerkung: • Remarque:

Da momentan nur noch wenige Serien auch in französischer Übersetzung vorliegen, wird im weiteren Text aus Kapazitätsgründen auf Übersetzungen verzichtet.

1.2.2 Gliederung — Disposition

---

(1) Archiv Teil 1

(2) Archiv Teil 2

(3) Archiv Teil 3

1.2.3 Ausnahmen — Exceptions

In diesem Rahmen werden nicht herausgegeben: Tests aus speziellen und weiterführenden Teile der Mathematik, Informatik–Tests, Computeralgebra–Tests, Problemstellungen zu Semesterarbeiten aus Mathematik, Physik und Informatik.

Kapitel • Chapitre 2

Serien aus dem „Archiv Teil 2“

2.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

2.2 Test: Fourieranalysis, Potenzreihen III/01

Abschrift • *Copie*

(1) Entwickle in eine Potenzreihe:

$$f(x) = (1 + k\,x)^r, \;\; |k \cdot x| < 1, \;\; r \in \mathbb{R}.$$

(2) Sei:

$$f(t) \;=\; \begin{cases} t & t \in [-\frac{\pi}{3},\; \frac{\pi}{3}] \\ 1 & t \in (\frac{\pi}{3},\; \frac{2\pi}{3}) \\ \pi - t & t \in [\frac{2\pi}{3},\; \frac{4\pi}{3}] \\ -1 & t \in (\frac{4\pi}{3},\; \frac{5\pi}{3}) \end{cases}$$

Dazu ist $f(t + 2\,\pi) = f(t)$.

(a) Entwickle f in eine Fourierreihe (Skizze!).

(b) Verschiebe den Ursprung in $P_0(2\,\pi, 0)$. Aus $f(t)$ wird dann $f_1(t')$, wobei t' die Variable im neuen KS ist. Entwickle $f_1(t')$ in eine Fourierreihe.

(c) Berechne eine Näherung für $\displaystyle\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\,\pi} f^2(t)\,dt, \;\; f^2(t) = (f(t))^2.$

(3) Sei

$$f(t) \;=\; \begin{cases} -\sin(t) & t \in [\pi,\; 2\,\pi] \\ 0 & t \notin [\pi, 2\;\pi] \end{cases}$$

Bestimme die Fouriertransformierte von $f(t)$ (Skizze!).

(4) Gegeben: Skalarfeld $\varphi(x, y, z) = x\,y + 2$, Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x\,y \\ -y^2 \\ z^3 \end{pmatrix}$,

Weg $\gamma : t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$, $t \in [1,\; 2]$.

(a) Besitzt $\vec{F}$ eine Potentialfunktion $u(x, y, z)$? (D.h. $grad(u(x, y, z)) = \vec{F}(x, y, z)$.)

(b) $\int\limits_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle = \,?$

(c) Gibt es eine Beziehung zwischen $\vec{F}$ und $grad(\varphi)$?

Viel Glück!

WIR

2.3 Test: Fourieranalysis III/02

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f_1(t) \quad = \quad \begin{cases} \sin(\frac{t}{2}) & t \in I_1 = [0,\ 2\,\pi] \\ f_1(t + 2\,n\pi) & n \in \mathbb{Z},\ \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Skizziere f_1.

(b) Entwickle f_1 in eine Fourierreihe.

(2)

$$f_2(t) \quad = \quad \begin{cases} t & t \in I_2 = [-\pi,\ \pi] \\ f_1(t + 2\,n\pi) & n \in \mathbb{Z},\ \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a_0, a_k, b_k können in einer Tabelle nachgeschlagen werden. Berechne ohne Formelsammlung die Fourierkoeffizienten A_0, A_k, A_k von $f_2(t) = (f_1(t))^2$ aus denen von $f_1(t)$.

(3) Wende auf obiges f_2 die Parsevalsche Gleichung an. Berechne damit die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

(4) $f_4(t) = (\dfrac{t}{\pi})^3 - \dfrac{t}{\pi},\ \ t \in I_2,\ \ f_2\ 2\,\pi$–periodisch.

(a) Berechne ohne Formelsammlung die Fourierreihe von f_4.

(b) Welche Zahlenreihe entsteht für $t = \dfrac{\pi}{2}$?

(5)

$$f_5(t) \quad = \quad \begin{cases} k \cdot (e^t - 1) & t \in I_5 = [0,\ ln(2)] \\ 0 & t \notin I_5 \end{cases}$$

Berechne die Fouriertransformierte von f_5 ohne Tabelle.

Viel Glück!

2.4 Test: Fourieranalysis III/03

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f_1(t) \quad = \quad \begin{cases} \sin(t) & t \in I_1 = [-\pi,\ \pi] \\ f_1(t + 2\,n\pi) & n \in \mathbb{Z},\ \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Wir gehen davon aus, dass die Fourierkoeffizienten a_k und b_k bekannt sind (Tabelle). Berechne daraus ohne Tabelle die Fourierkoeffizienten A_k und B_k von $f_2(x) = f_1^2(x)$.

(b) Benütze die Parsevalsche Gleichung und berechne damit die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^4}$.

(c) Berechne ohne Formelsammlung die Fourierreihe der $2\,\pi$–periodischen Funktion $f_3(t) = (\dfrac{t}{\pi})^3 - \dfrac{t}{\pi},\ \ t \in I_1$. Welche Zahlenreihe entsteht für $t = \dfrac{\pi}{2}$?

(2) (a) $f_4(t) = \sin(t) + \dfrac{\sin(2\,t)}{2} + \dfrac{\sin(3\,t)}{3} + \ldots$ stellt vermutlich eine Sägezahnfunktion dar. Man versuche herauszufinden, sie die Polynomschreibweise in $(0,\ 2\,\pi)$ gegebenenfalls lautet.

(b) Benutze das eben erhaltene Resultat, um das entsprechende Problem für $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\,x)}{n^2}$ in $(0,\ 2\,\pi))$ zu lösen. *Hinweis: Integration.*

(c) Berechne mit Hilfe des nun erhaltenen Resultates $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ und $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

(d) Wie lautet die komplexe Schreibweise von f_4?

(3) Berechne die Spektralfunktion (Fourier-Transformierte) von $f_5(x) = e^{-a\,|t|},\ \ a > 0$ (symmetrisch abfallender Impuls).

Viel Glück!

WIR

2.5 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung, Eigenwerttheorie mit Matrizen III/04

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f_1(x) = x^2 + x + 3\,x\,y - y^3$$

Berechne mögliche Extremwertstellen, Sattelpunkte u.s.w. und versuche, eine 3D–Skizze der Fläche zu entwerfen.

(2)

$$W = \frac{1}{2}\,R\,S^2\,(R-S) + q\,\frac{R+S}{R-S}$$

Berechne W mit samt dem Fehler von W, wenn folgnde Werte gemessen werden:

$$R = 46.245 \pm 0.035\,n, \;\; S = 45.015 \pm 0.015\,n$$

Debei ist bekannt: $q = 1.32915 \pm 0.00002\,n^2$

(3)

$$f_3(x, y, g(z)) = e^{x+y}\,\sin(\cdot y \cdot g(z)), \;\; g(z) = \sin^2(z) + z^3 - z^2 + z$$

Berechne das totale Differential von f_3!

(4) Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Es wird vermutet, dass ein Eigenwert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n < 6$ sein könnte. Berechne die allfälligen Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

Viel Glück!

WIR

2.6 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung, Fourieranalysis III/05

Abschrift • *Copie*

(1) (a)

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{6} \ \wedge \ 0 \leq z \leq 12\}, \ \ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\leadsto \int\limits_V f(x, y, z)\, dV = \ ? \ \ \text{(Skizze!)}$$

(b) In einen Körper mit rechteckigem Grundriss und $x \in [-12,\ 12]$, $y \in [-12,\ 12]$ und $z \in [0,\ 12]$ wird längs der z–Achse ein Loch mit Radius $r = 6$ gebohrt. Anschliessend wird die Menge aller Punkte mit negativer x–Koordinate weggeschnitten $\leadsto$ V. Dazu ist $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Wie gross ist $\int\limits_V f(x, y, z)\, dV$? (Skizze!)

(2)

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)\, \cos(x - y) + \frac{1}{x^2 + y^2}\, \arctan(z)$$

$$x_1 = 10 \pm 0.2, \ \ y_1 = 11 \pm 0.2, \ \ z_1 = 0.9 \pm 0.05$$

$$f(x_1, y_1, z_1) \pm \Delta f = \ ?$$

(3) (a)

$$f(t) = 2 + \frac{1}{4\,\pi}\, t \text{ für } t \in [0,\ 2\,\pi), \ \ f(t + 2\,n\,\pi) = f(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

$\leadsto$ Leite die Fourierreihe her!

(b)

$$f(t) = e^{-3\,t - t} \text{ für } t \in [0,\ 2\,\pi), \ \ f(t + 2\,n\,\pi) = f(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

$\leadsto$ Leite die Fourierreihe her!

(c)

$$f(t) = e^{-3\,t - t} \text{ für } t \in [0,\ 2\,\pi), \ \ f(t) = 0 \text{ für } t \notin [0,\ 2\,\pi]$$

$$\hat{f}(\Omega) = \ ?$$

Viel Glück!

WIR

2.7 Test: Analyse de Fourier III/06

Abschrift • *Copie*

(1) $f(t) = t,\ \ t \in [-\pi,\ \pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$.

$$f(t) = 2(\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2\,t) + \frac{1}{3}\sin(3\,t) - \ldots)$$

(a) Esquisse de $f_m(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos(k\,t) + b_k \sin(k\,t)$ pour $m = 4$?

(b) $h_2(t) = t^2,\ \ t \in [-\pi,\ \pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$. $\leadsto$ Série de Fourier?
(Calcul, méthode libre.)

(c) $h_3(t) = t^3,\ \ t \in [-\pi,\ \pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$. $\leadsto$ Série de Fourier?
(Calcul, méthode libre.)

(d) $h_4(t) = t^4,\ \ t \in [-\pi,\ \pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$. $\leadsto$ Série de Fourier?
(Calcul, méthode libre.)

(e) Appliquer le théorème de Parseval pour $h_4(t)$. $\leadsto$ Calculer une formule pour π^8.

(2) (a) $g(t) = t^2 + 2\,t + 1 = (t+1)^2,\ \ t \in [-\pi,\ \pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$. $\leadsto$ Série de Fourier?
(Calcul, méthode libre.)

(b) $f(t) = t,\ \ t \in [0,\ \pi),\ \ f(t) = \pi,\ \ t \in [\pi,\ 2\,\pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$.
$\leadsto$ Série de Fourier? (Calcul, méthode libre.)

Bonne chance!

2.8 Test: Analyse de Fourier III/07

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $f_1(x) = x^2,\ \ x \in (-\pi,\ \pi]$. Périodique $(T = 2\,\pi)$.
$\rightsquigarrow$ Série de Fourier? (Calcul, méthode libre.)

Indication: $f_0(x) = x,\ \ x \in (-\pi,\ \pi]$. *Périodique* $(T = 2\,\pi)$
$\Rightarrow\ f_0(x) = 2\,(\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2\,x) + \frac{1}{3}\sin(3\,x) - \ldots)$

(b) $f_1(x) =_{\big|_{x=0}} f(0) = \ldots\ \Rightarrow\ \pi^2 = \,?\rightsquigarrow$ Série pour π^2, approximation: 10 termes?

(2) (a) $f_2(x) = x^3,\ \ x \in (-\pi,\ \pi]$. Périodique $(T = 2\,\pi)$. $\rightsquigarrow$ Série de Fourier?
(Calcul, utiliser résultat de $f_1(x) = x^2$.)

(b) $f_3(x) = 3\,x^3 - 2\,|x| + 1,\ \ x \in [0,\ \pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$.
$\rightsquigarrow$ Série de Fourier? (Calcul, méthode libre.)

Bonne chance!

WIR

2.9 Test: Analyse de Fourier III/08

Abschrift • *Copie*

(1) $v(t) = 1 - t,\ \ t \in [0,\ 1)$. Périodique $(T = 1)$. $\rightsquigarrow$ Série de Fourier de forme complexe?
(Calcul, méthode libre, $v(t) \rightsquigarrow c_0 + \sum\limits_{n=-\infty,\ \ n\neq 0}^{\infty} c_n \cdot e^{i\,n\,\omega\,t}$.)

(2) (a) $(f(t) = 1,\ \ t \in [0,\ 1))\ \vee\ (f(t) = 4 - t,\ \ t \in [2,\ 4))$. Périodique $(T = 4)$.
$\rightsquigarrow$ Série de Fourier? (Calcul, le résultat précédent peut être util. . .)

(b) Utiliser $f(t)$ pour calculer à l'aide de la formule de Parseval une expression pour la solle suivante: $\sum\limits_{n^1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = ?$

(3) Calculer la transformée de Fourier de

$$((f(x) = 1,\ \ |x| \le a)\ \vee\ ((f(x) = 0,\ \ |x| > a))\ \wedge\ (a > 0).$$

Bonne chance!

2.10 Test: Equations différentielles, transformations de Laplace, calcul intégral dans le $\mathbb{R}^n$ III/09

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\underline{\left| \begin{array}{lcl} y' & = & y+2\,z \\ z' & = & 2\,y+z+f(t) \end{array} \right|}, \;\; y=y(t),\;\; z=z(t),\;\; y(0)=z(0)=0$$

$$f(t) \;\; = \;\; \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0\leq t<1 \\ 0 & \leq t \end{cases}$$

$$\leadsto \qquad y(t) = \,?$$

(2)

$$y''+k\cdot y'+y=\delta(t),\;\; y(0)=y'(0)=0,\;\; k\in[0,\;0.1]$$

$\leadsto$ $y(t) = ?$, esquisse?

(3)

$$\iint\limits_V \frac{1}{(4\,x-4\,y+1)^2}\,dx\,dy = \,?$$

Bord de V: $x=\sqrt{-y},\;\; x=y,\;\; x=1.$

Indication: Choisir $x=u+v,\;\; y=v-u^2.$

(4) Calculer le volume du solide qui se trouve au–dessus de la surface du cône $z^2=x^2+y^2$ et à l'extérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ et en plus à l'intérieur du cône $(z+4)^2=4(x^2+y^2)$. (Calcul sur la feuille!)

Bonne chance!

WIR

2.11 Test: Equations différentielles, transformations de Laplace, calcul intégral dans le $\mathbb{R}^n$ III/09a

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\underline{\left| \begin{array}{ccl} y' & = & y + 2\,z \\ z' & = & 2\,y + z + f(t) \end{array} \right|}, \quad y = y(t), \;\; z = z(t), \;\; y(0) = z(0) = 0$$

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \leq t \end{cases}$$

$$\leadsto \qquad y(t) = \,?$$

(2)

$$y'' + k \cdot y' + y = \delta(t), \;\; y(0) = y'(0) = 0, \;\; k \in [0,\; 0.1]$$

$\leadsto$ $y(t) = ?$, esquisse?

(3)

$$\iint\limits_V \frac{1}{(4\,x - 4\,y + 1)^2}\, dx\, dy = \,?$$

Bord de V: $x = \sqrt{-y}, \;\; x = y, \;\; x = 1.$

Indication: Choisir $x = u + v, \;\; y = v - u^2$.

(4) Calculer le volume du solide qui se trouve au–dessus de la surface du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Bonne chance!

WIR

2.12 Test: Transformations de Laplace III/10

Abschrift • *Copie*

(1) Résoudre:

$$y'' + y = t, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = -2$$

(2) (a) Résoudre:

$$y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y = t^2\, e^t = f(t), \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = -2$$

(b) Le même problème avec:

$$f(t) = \delta(t)$$

(3) Résoudre:

$$t\,y'' + 2\,y' + t\,y = 0, \;\; y(0^+) = 1, \;\; y(\pi) = 0$$

(Idéé: $y'(0^+) = C$, p.ex. $\dfrac{d}{d\,s}(Y(s)\cdot s^2 - s\cdot y(0^+) - y'(0^+)) = ?$)

Bonne chance!

2.13 Test: Laplace–Transformationen III/11

Abschrift • *Copie*

(1) Löse allgemein:

$$y'' + 3\,y' - 6\,y = -12\,x^3 + 18\,x^2 + 12\,x - 12$$

(2) Löse:

$$y'' + 4\,y' + 4\,y = \sin(t), \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0$$

(3) Löse:

$$y''' + x - 1 = (x+1)(x-1) - x^2, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(1) = \frac{1}{12}$$

Viel Glück!

2.14 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen III/12

Abschrift • *Copie*

(1) Löse allgemein:

$$y'' - y' - 2\,y = 2\,x$$

(2) Löse:

$$y^{(6)} + y^{(4)} - y^{(2)} - y = e^x \sin(t)$$

(3) Löse:

$$y' - y = x^2$$

(a) Mit Lösungsverfahren für Differentialgleichungen.

(b) Mit Potenzreihenansatz.

Viel Glück!

2.15 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen III/13

Abschrift • *Copie*

(1) Suche die allgemeine Lösung:

$$2\,y^{(4)} - 4\,y^{(2)} + 2\,y = -8 + (\sqrt{2}\,t)^2$$

(2)

$$\left|\begin{array}{lcl} \cos(4\,t) & = & \frac{1}{2}\,y'' + 2\,y + 8\,y' \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 1 \end{array}\right| \quad \text{AWP: } y(t) = \,?$$

(3) Löse:

$$\left|\begin{array}{lcl} y' - 7\,y & = & e^{7\,x} \\ y(0) & = & 0 \end{array}\right| \quad \text{AWP: } y(x) = \,?$$

(4) Löse:

$$\left|\begin{array}{lcl} y' + y & = & \sin(x) \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right| \quad \text{AWP: } y(x) = \,?$$

(5) Löse:

$$\left|\begin{array}{lcl} y''' + x - 1 & = & (x+1)(x-1) - x^2 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \\ y''(1) & = & \frac{1}{12} \end{array}\right| \quad \text{AWP / RWP: } y(x) = \,?$$

Viel Glück!

2.16 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen, Diff'rechn. im $\mathbb{R}^n$, Vektorgeom. III/14

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\left| \begin{array}{lcl} y'' - g\,y' + 8\,y & = & 4 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\,\pi) \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{array} \right|$$

Beschreibe die Lösung!

Was passiert?

(2) Gegeben ist die Ebene $\Phi: \; x - 2\,y + 4\,z - 3 = 0$. Eine Gerade g' liegt in der (x, y)–Ebene H_1 und geht durch den Ursprung. Sie schliesst mit der x–Achse den Winkel $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$ ein.

(a) Wie gross ist die Steigung in (z–Richtung bezüglich H_1) der Geraden $g \subset \Phi$, deren Projektion in H_1 die Gerade g' ist? (Skizze!)

(b) Wie gross ist die Steigung in (z–Richtung bezüglich H_1) der Geraden g, welche über dem Punkte $(1; 2) \in H_1$ Tangente ist an die Fläche $x^2 - 2\,y^2 + 4\,z - 3 = 0$? (Skizze!)

(3)

$$f(x, y) = 2\,x^2 + 3\,x\,y - 2\,y^2 + 3 - 3\,y + 4$$

(a) Extrema?

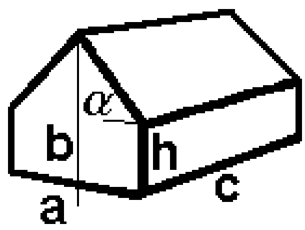
(b) Berechne die Tangentialebene in $P(x; y; f(x, y)) = (2; 3; f(2; 3))$.

(c) Liegt $(3; 2; 5)$ in der Tangentialebene?

(4) Löse: Haus mit symmetrischem Satteldach:

$V = 500\ m^3, \;\; \alpha = 45^o$

Bestimme a, b, c, h so, dass die Oberfläche minimal ist!



(a) Für den Fall $a = c$.

(b) Für den Fall, dass keine Bedingung gestellt ist.

Viel Glück!

WIR

2.17 Test: Differentialgleichungen III/15

Abschrift • *Copie*

(1) Zeichne das Richtungsfeld!

(a)
$$y' = (x+y)\,(x-y)$$

(b)
$$y' = x \cdot sgn(y) \cdot \sqrt{|y|}$$

(2)
$$y' = \frac{x}{y}$$

(a) Wo existiert die Lösung eindeutig?

(b) Richtungsfeld?

(c) Lösung?

(3) Was kann man über die Struktur der Lösungsmenge der folgenden Differentialgleichung sagen?

$$\cos(x)\,y''' - \sin(x)\,y'' + \tan(x)\,y' - e^x\,y = x^x$$

(4) Löse: Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = \sin(x)\,y + \sin(x)$.

(a) Allgemeine Lösung?

(b) Lösung des AWP's $y(1) = 1$?

(5) Löse allgemein die folgende Differentialgleichung:

$$y''' - 4\,y'' - 6\,y' = 18\,x$$

(6) Was ist die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung?

$$(x^2\,y + x\,y + x^2)\,dx + 0.5\,x^2\,dy = 0$$

(7) Löse das folgende AWP:

$$\begin{aligned} y''' - y &= e^x \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

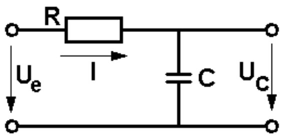
Viel Glück!

WIR

2.18 Test: Differentialgleichungen III/16

Abschrift • *Copie*

(1)



$U_e(t) = 10\,\cos(\omega\,t)\ [V]$,
$R = 10\ [k\Omega]$,
$C = 5\ [\mu F]$

$U_C = U(t) = ?$

Stelle die Differentialgleichung auf und löse sie. Einheiten weglassen.)

(2) Löse $y\,' + \dfrac{y}{x} = \sin(x)$ durch Trennung der Variablen und Variation der Konstanten.

(3) Löse $y\,' = x \cdot y - x \cdot \sqrt{y}$ *Hinweis: Substitution* $z = y^{\frac{1}{2}}$.

(4) Löse $y + (y + x) \cdot y\,' = 0$ *Hinweis: Theorie der exakten D'gl.*

(5) Suche eine Näherungslösung von $y\,' - y = \sin(x)$, $y(0) = 0$, indem du die Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots$ für y in die Gleichung einsetzest und ebenfalls die Reihe $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots$ verwendest.

(6) Löse:

(a) Löse die Schwingungsgleichung $\ddot{y} + 2\,\dot{y} + \omega_0^2\,y = 10\,\sin(\omega\,t)$. Setze $y(0) = 10$, $\dot{y}(0) = 0$. Diskutiere die 3 möglichen Fälle.

Hinweis: $m\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = \ldots,\ \ 2\,\delta = \dfrac{b}{m},\ \ \omega_0^2 = \dfrac{c}{m}\ \Rightarrow\ \ldots$

$\delta =$ *Dämpfungsfaktor,* $\omega_0 =$ *Eigenfrequenz,* $\omega_d^2 = \omega_o^2 - \delta^2 =$ *Schwingungsfrequenz.*

(b) Wie hängt die Amplitude von y vom Parameter ω ab?

Viel Glück!

WIR

2.19 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen III/17

Abschrift • *Copie*

(1)

$$y'' = \sin(y') + e^y \cos(x), \;\; y(0) = 1, \;\; y(0) = 0$$

$\rightsquigarrow$ Berechne einen Näherungswert für $y(0.1)$ nach Runge–Kutta, $\Delta x = 0.1$.

(2)

$$y' = \sin(y) + x\, e^y \cos(x)$$

$\rightsquigarrow$ Richtungsfeld?

(3)

$$y' = e^y\, y^{-2}\, x + y^2 \sin(y\, x^2)$$

$\rightsquigarrow$ Wo existiert die Lösung nicht? — Ist die Lösung nicht eindeutig?

(4)

$$y' = \frac{y}{x} + y^4 + 1$$

$\rightsquigarrow$ Berechne die allgemeine Lösung!

(5)

$$2\, y''' - 3\, y'' - 4\, y' = -2\, x + y'', \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = y''(0) = -1, \;\; y = \,?$$

(6)

$$f(t) = (t^2\, e^{2\,t}) * (\cos(2\,t) + 2\,t^3)$$

$\rightsquigarrow$ Laplace–Transformierte von $f(t)$?

(7)

$$y' - 7\,x = e^{7\,x}, \;\; y(0) = 0$$

Löse die Differentialgleichung mit Hilfe von Laplace-Transformationen!

Viel Glück!

WIR

2.20 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen III/18

Abschrift • *Copie*

(1) Transformiere mit Hilfe der Regeln:

(a)

$$f(t) = t \cdot \cos(4\,t - 7), \;\; F(s) = \,?$$

(b)

$$F(s) = \frac{2\,s + 1}{(s^2 - 1)(s + 1)}, \;\; f(t) = \,?$$

(2) Berechne die Funktion $y(t)$, die das folgende Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{array}{rcl} y' & = & z' \\ y + 2\,z & = & 2\,y + z + f(t) \end{array}$$

Dabei gilt $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. Weiter ist $f(t)$ wie folgt gegeben:

$$f(t) \;\; = \;\; \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$$

(3) Es ist bekannt, dass ein gegebenes physikalisches System durch die folgende Differentialgleichung beschrieben wird:

$$y'' + y = \delta(t), \;\; y(0) = y'(0) = 0$$

Für $t > 0$ ist das System frei von äusseren Einwirkungen. Unter Laborbedinungen muss man jedoch einsehen, dass das System nicht als Idealfall vorliegt. Daher führt man nicht das Glied $k \cdot y'$ ein, um die vorhandene Dämpfung zu beschreiben. Dabei ist $k \in [0,\ 0.1]$. Damit hat man eine veränderte Differentialgleichung gegeben:

$$y'' + k \cdot y' + y = \delta(t), \;\; y(0) = y'(0) = 0$$

(a) Löse die beiden Differentialgleichungen.

(b) Beurteile, ob k im angegebenen Bereich zu sinnvollen Resultaten führt.

(c) Vergleiche die Lösungen für $t = 2\,\pi$ an der Stelle $k = 0.1$.

(d) Was passiert für $k < 0$?

Viel Glück!

WIR

2.21 Test: Differentialgleichungen, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ III/19

Abschrift • *Copie*

(1) Skizziere das Richtungsfeld:

(a)
$$y' = x + y$$

(b)
$$y' = x^2 + y^2$$

(2)
$$\int\limits_{K_{r=2}(Origo)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dV = ?$$

Hinweis: Kugelkoordinaten: $D = -r^2 \sin(\alpha)$, $\alpha =$ *Winkel zur* z*–Achse.*

(3) Ein keilförmiger Körper ist begrenzt durch $P_1(0;0;0)$, $P_2(x_0,0,0)$, $P_3(x_0,y_0,0)$, $P_4(0,y_0,0)$, $P_5(0,0,z_0)$, $P_6(x_0,0,z_0)$. (Die Kante von P_4 nach P_5 wird gegeben durch $z = z_0 - y$.) Weiter gilt:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + z \cdot \sin(y), \quad F(x_0,x_0,z_0) = \int\limits_V f(x,y,h)\, dV$$

Suche die Extremalstellen von $F(x_0,x_0,z_0)$.

(4)
$$\begin{aligned} y' &= (\cos(x) \cdot \sinh(x)) \cdot y \\ y(1) &= 4 \end{aligned}$$

Löse die Differentialgleichungen und skizziere den Graphen.

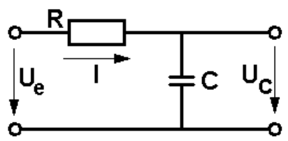
Viel Glück!

WIR

2.22 Test: Differentialgleichungen III/20

Abschrift • *Copie*

(1)



$U_e(t) = 10\,\cos(\omega\, t)\ [V]$,
$R = 5\ [k\Omega]$,
$C = 5\ [\mu F]$

$U_C = U(t) = ?$

Stelle die Differentialgleichung auf und löse sie. Einheiten weglassen.)

(2) Löse $y\,' + \dfrac{y}{x} = \sin(2\,x)$ durch Trennung der Variablen und Variation der Konstanten.

(3) Löse $y\,' = -x \cdot \sqrt{y} + x \cdot y$ *Hinweis: Substitution* $z = y^{\frac{1}{2}}$.

(4) Löse $x + y \cdot y\,' = 0$ *Hinweis: Theorie der exakten D'gl.*

(5) Suche eine Näherungslösung von $y\,' - y = \sin(x)$, $y(0) = 0$, indem du die Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots$ für y in die Gleichung einsetzest und ebenfalls die Reihe $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots$ verwendest.

(6) Löse:

(a) Löse die Schwingungsgleichung $\ddot{y} + 2\,\dot{y} + \omega_0^2\,y = 20\,\sin(\omega\,t)$. Setze $y(0) = 10$, $\dot{y}(0) = 0$. Diskutiere die 3 möglichen Fälle.

Hinweis: $m\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = \ldots,\quad 2\,\delta = \dfrac{b}{m},\quad \omega_0^2 = \dfrac{c}{m} \ \Rightarrow\ \ldots$

$\delta =$ *Dämpfungsfaktor,* $\omega_0 =$ *Eigenfrequenz,* $\omega_d^2 = \omega_o^2 - \delta^2 =$ *Schwingungsfrequenz.*

(b) Wie hängt die Amplitude von y vom Parameter ω ab?

Viel Glück!

WIR

2.23 Test: Differentialgleichungen III/21

Abschrift • *Copie*

Löse ohne Laplace–Transformationen:

(1)
$$y'' + a\,y = b\,x$$

(2)
$$y'' - y = e^x\,\sin(x)$$

(3)
$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + 2\,x + 1$$

(4)
$$y''' + y'' + y' + y = x^2 + 2\,x + 1$$

(5)
$$y' = \frac{y}{2\,\cos^2(x)}$$

(6)
$$y'''' = y + e^x + 1$$

(7) Ist die Funktionenmenge $\{x_1, y_2, y_3\} = \{\sin(x), \cos(x), x\,\cos(x)\}$ eine l.u. Lösungsmenge (Basislösungen) einer lin. D'gl. mit konstanten Koeffizienten? Falls ja, so ist eine solche D'gl. anzugeben.

Viel Glück!

2.24 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Differentialgleichungen und Laplace–Transformationen III/22

Abschrift • *Copie*

Löse ohne Laplace–Transformationen:

(1)

$$\begin{aligned} y'' + b\,y' + c\,y &= \delta(t-1) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Berechne die Lösungsfunktion für folgende Fälle und erkläre den Unterschied zwischen den Lösungen:

(a) $b = c = 1$ (b) $b = 1, \ c = -1$

(2)

$$\begin{aligned} y'' + p\,y' + z &= e^{-t} \\ z' + y &= f(t) \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 1 \\ z(0) &= -2 \end{aligned} \qquad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,t & t \in [0,\,2) \\ f(t+n\,2) & n \in \mathbb{Z}, \ t \in [0,\,2) \end{cases}$$

Untersuche, wie sich $y(t)$ und $z(t)$ verhalten für $t \to \infty$.

(3) Gegeben ist die Kurve $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t^6 \\ t^2 + t^4 \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$.

(a) Berechne die Parametergleichung der Tangente $\vec{\tau}(t)$ für den Punkt mit $t = 1$.

(b) Suche den Schnittpunkt dieser Tangente mit der (x, y)–Ebene. (Skizze).

(c) Skizziere den Graphen der Projektion der Kurve $\vec{v}(t)$ auf die (x, y)–Ebene. Bestimme allenfalls kritische Punkte wie Knoten oder Spitzen. (Rechnung!)

Viel Glück!

WIR

2.25 Test: Differentialgleichungen und Laplace–Transformationen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ III/23

Abschrift • *Copie*

Löse ohne Laplace–Transformationen:

(1) Suche die Laplace–Transformierte:

(a)

$$f(t) = t^4\, e^{-t(t-4)} + t^4 \cos(4\,(t-4) - \frac{\sin 4\,t}{t}$$

($t^4 \cos(4\,(t-4)$ mit exponentieller Dämpfung.)

(b)

$$g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \;\text{ mit } f \text{ von vorhin.}$$

(2) Suche die Laplace–Transformierte durch Rechnung:

(a)

$$f(t) = |\sin(t)|$$

(b)

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0,\,\pi] \\ |\sin(t)| & t \geq \pi \end{cases}$$

(3) Löse die folgenden AWP mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

(a)

$$\begin{aligned} y' - 7\,y &= e^{7\,x} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} y' + y &= \sin(x) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y &= t^2\,e^t \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= -2 \end{aligned}$$

(4) Gegeben ist ein keilförmiger Körper mit den Eckpunkten $(0;0;0)$, $(1;0;0)$, $(1;1;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$, $(0;1;1)$. Berechne exakt:

$$\int_V (x - y + z)\, dV$$

(5) (a) Das durch den Ursprung sowie die Punkte $(0.1, 0)$ und $(0, 2)$ gegebene rechteckige Gebiet heisst G. Berechne näherungsweise:

$$\int_G \frac{\arctan(x)}{x}\, dG$$

(b) K sei die Kugel mit dem Radius 1 und dem Zentrum im Ursprung. Berechne:

$$\int_K \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dK$$

Hinweis: $dx\, dy\, dz = D\, dr\, d\alpha\, d\beta$, $D = r^2\, \sin(\beta)$, *Kugelkoordinaten.*

Viel Glück!

2.26 Test: Differentialgleichungen, Laplace–Transformationen — équations différentielles, transformations de Laplace III/24

Abschrift • *Copie*

Löse: • *Résoudre:*

(1)

$$\begin{aligned} y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y &= t^2\,e^t \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y'' + 4\,y' + 16\,y &= 2\,\cos(4\,t) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

(3)

$$y^{(4)}(x) = 8,\ \ y(0) = y(4) = y''(0) = y''(4) = 0$$

Hinweis: Verwende Parameter $y'(0) = \alpha,\ \ y'''(0) = \beta$. Berechne $y(x, \alpha, \beta)$. Verwende dann die Randbedingungen.

• *Indication: Utiliser les paramètres $y'(0) = \alpha,\ \ y'''(0) = \beta$. Calculer $y(x, \alpha, \beta)$. Utiliser les conditions aux limites.*

(4)

$$y^{(4)} - 2\,y^{(2)} + y = t^2 - 4,\ \ y(t) = \,?$$

(Allgemeine Lösung!) • *(Solution générale!)*

(5)

$$y' = 3\,(x^2 + 1)\,y + e^{(x^3)},\ \ y(t) = \,?$$

(Allgemeine Lösung!) • *(Solution générale!)*

(6)

$$(y')^4 = \frac{1}{4\,x^2}$$

Wo existieren die Lösungen? Wo sind sie eindeutig? Hinweis: Richtungsfeld.

• *Où est–ce que les solutions existent–elles? Où est–ce qu'elles sont univoques? Indication: Champ de direction.*

Viel Glück!

WIR

2.27 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen III/25

Abschrift • *Copie*

Löse: • *Résoudre:*

(1)

$$\begin{aligned} -y''' + 3\,y'' - 3\,y' + y &= t^2\,e^t \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= -2 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y'' + 9\,y &= \cos(2\,t) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} y'' + 9\,y &= 4\,\delta(t) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} y'' + x' &= 0 \\ y' - x(t) &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

Viel Glück!

WIR

2.28 Test: z–Transformationen III/26

Abschrift • *Copie*

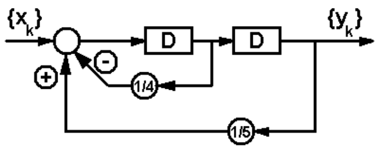
(1) Berechne $\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$ für:

(a) $Y(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$

(b) $Y(z) = \dfrac{3\,z + z^2 + 5\,z^5}{z^5}$

(c) $Y(z) = \dfrac{1+z}{z^3} + \dfrac{3\,z}{3\,z+1}$

(2) (a)



Start: Ruhezustand

i. Finde die Differenzengleichung!

ii. Berechne die Impulsantwort!

(b)

$$2\,y_{k+2} - 2\,y_{k+1} + y_k = u_{k+1} - u_k$$

i. Berechne die Transferfunktion!

ii. Untersuche, ob das System stabil ist!

(3) Die Transferfunktion eines Systems ist gegeben durch $G(z) = \dfrac{z}{8\,z^2 + 6\,z + 1}$.

(a) Entwerfe ein Blockdiagramm! (Herleitung nach mathematischen Regeln!)

(b) Berechne die Impulsantwort!

Viel Glück!

WIR

2.29 Test: Differentialgleichungen, Laplace–Transformationen, Vektoranalysis III/27

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $\vec{a}^t = (x, x^2, x^3)$ und $\vec{b}^t = (e^x, \sin(x), \cos(x))$, Berechne den nachstehenden Ausdruck auf möglichst einfache Weise:

$$\langle\vec{b}, \bigtriangledown\rangle\,\vec{a} - \bigtriangledown \times (\bigtriangledown \times \vec{b}) - \langle\vec{a}, \bigtriangledown\rangle\,\vec{b} + \vec{b} \times (\bigtriangledown \times \vec{a}) + \bigtriangleup\,\vec{a} + \vec{a} \times (\bigtriangledown \times \vec{b}) + \bigtriangledown\langle\bigtriangledown, \vec{a}\rangle$$

(2) Löse mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$\begin{aligned} 0.5\,y'' + y' + 0.5\,y &= 4.5\,e^{2x} \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

(3) Löse mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$\begin{aligned} 2\,y'' + 10\,z' + 4\,y &= 0 \\ z'' + 4\,y' + 3\,z &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \\ z(0) &= 0 \\ z'(0) &= 0 \end{aligned}$$

(4) Löse mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$R\,i + L\,\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{1}{C}\int i\,dt = \bar{U}_0\,\delta(t)$$

Angaben:
Schwingkreis, Spannungsstoss, **allw Anfangswerte sind** 0, gegeben sind $R, L, C, \bar{U}_0$.

Viel Glück!

WIR

2.30 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis, Fourieranalysis III/28

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben: $\vec{F}(x,y,z))\begin{pmatrix} -4\,y+4\,z \\ -x\,y+6\,y-8\,z \\ 4\,x-8\,y+6\,z \end{pmatrix}$, Streckenzug $\gamma:\ \overline{P_0P_1P_2P_3P_4P_5}$ mit $P_0(2;3;1)$, $P_a(1;3;1)$, $P_2(1;5;1)$, $P_3(1;3;1)$, $P_4(1;5;1)$, $P_5(1;5;3)$.

$$\int\limits_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \,?$$

(2) (a) In der (x,y)–Ebene ist eine Kurve γ gegeben, welche ein Gebiet G umschliesst:

$$\gamma:\ \varphi \longmapsto r(\varphi) = 1-\cos(\varphi),\ \ \varphi \in [0,\ 2\,\pi]$$

Berechne die Krümmung $\kappa(\varphi)$ und skizziere die Kurve.

(b) Berechne die Kurvenlänge von γ.

(c) Berechne den Flächeninhalt von G.

(d) Sei $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y-x \\ x+y \\ x^2-2\,y \end{pmatrix}$, $\vec{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x+1 \\ x \\ x-2\,y \end{pmatrix}$.

$$\text{Berechne}\quad \oint_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle \quad\text{sowie}\quad \oint_{\gamma} \langle \vec{H}, d\vec{r} \rangle.$$

(e) Über G werde ein Zylinder Z der Höhe 1 errichtet. Berechne den Fluss Φ von $\vec{H}$ durch die gesamte Oberfläche von Z.

(3) In der (x,y)–Ebene liegt eine endliche Fläche A, welche von einer Kurve γ umschlossen wird. Weiter ist ein Feld $\vec{u}$ gegeben: $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x,y,z) \\ u_2(x,y,z) \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\iint\limits_{A} \langle \text{rot}\ \vec{u}, d\vec{A} \rangle = \,?$$

Hinweis: Einfacher Ausdruck!

(4) Berechne die Fourierreihe von $f(t) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{3})$, $\ t \in [0,\ 2\,\pi)$, $\ \forall_t f(t) = f(t+2\,\pi)$.

Viel Glück!

WIR

2.31 Test: Differential und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Vektoranalysis III/29

Abschrift • *Copie*

(1) Untersuche die Kurve $f(x,y) = x\,y\,(x+y) + x = 0$ auf spezielles Verhalten und skizziere die Kurve.

(2) (a) Zeige durch Rechnung:

$$(\vec{x} \times \vec{y})' = \vec{x}\,' \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{y}\,'.$$

(b) Zeige die Formel an einem Beispiel.

(3) (a) Gegeben ist $\vec{F}(x,y,z) = c \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{e}_r,\ \ \vec{e}_r = \frac{1}{r} \cdot \vec{r},\ \ \vec{r} = \vec{r}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Berechne $div\,(\vec{F})$.

(b) $\varphi(x,y,z) = |\vec{F}(x,y,z)|$. Berechne $grad(\varphi)$.

Viel Glück!

WIR

2.32 Test: Diff'geometrie und Kurven, Vektoranalysis III/30

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben ist die Kurvenschar $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\,\sin(\frac{t}{2}) \\ t^2 \\ r\,\cos(t) \end{pmatrix}$. ($r$ ist Scharparameter.)

(a) Berechne den Geschwindigkeitsvektor allgemein.

(b) Berechne die Tangente für $r = 1$ und $t = 0$.

(c) Berechne den Mittelpunkt des Krümmungskreises und den Krümmungsradius für $r = 1$ und $t = 0$.

(d) Berechne das begleitende Dreibein für $r = 1$ und $t = 0$.

(e) Skizziere die Kurve für $r = 1$ und trage obige Resultate in die Skizze ein. *(Diese Teilaufgabe wird nur dann bewertet, wenn die verwendeten Resultate richtig sind.)*

(f) Berechne die Torsion und den Torsionsradius für $r = 1$ und $t = 0$.

(g) Sei $\vec{v}(r,t)$ der oben berechnete Geschwindigkeitsvektor. Die Menge dieser Geschwindigkeitsvektoren bilden ein Vektorfled. Beschreibe dieses Vektorfled in der Form $\vec{v} = \vec{w}(x,y,z)$. (r und t sind also zu ersetzen.)

(h) Berechne nun $rot\,(\vec{w})$ und entscheide, ob es sich um ein konservatives Feld handelt. *(Diese Teilaufgabe wird nur dann bewertet, wenn das verwendeten Resultate richtig ist.)*

(2) Gegeben ist $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{2\,(x+y)} \\ 2\,z^2 + y^2 - y + 1 \\ 2\,\sin(x\,z) \end{pmatrix}$.

Berechne $rot\,(grad(div\,(\vec{v})))$. *Die Teilresultate müssen gezeigt werden.*

(3) Sei $\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{2\,y^2} \\ 2\,z + y \\ \sin(y) \end{pmatrix}$ und $\gamma:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0,\ \pi]$.

Berechne das Kurvenintegral von $\vec{w}$ längs γ. *Die Teilresultate müssen sichtbar sein.*

Viel Glück!

WIR

2.33 Test: Komplexe Funktionen III/31

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $f(z)$ eine Möbiustransformation, $z_1 = 0,\ \ z_2 = 1+i,\ \ z_3 = 3-i,\ \ z_4 = \infty$.
Sei weiter $f(z_1) = z_2,\ \ f(z_2) = z_3,\ \ f(z_3) = z_4$.

(a) Berechne $f(z)$.

(b) Berechne das Bild der imaginären Achse unter z.

(2)

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y),\ \ z = x + i\,y,\ \ u(x,y) = \sin(x)$$

(a) Lässt sich ein $v(x,y)$ so finden, dass $f(z)$ holomorph ist?

(b) $f_1(z) = \sin(x),\ \ f_2(z) = \sin(x\cdot y),\ \ f_3(z) = \sin(x+y)$. Welche dieser Funktionen ist harmonisch?

(3) Was ist das Bild von $f(z) = ln(i\cdot\sin(z))$? Dabei ist $z = t\cdot i,\ \ t \in [0,\ 2\pi)$.

(a) Rechnung.

(b) Skizze.

(4) Sei $f(z) = z^2,\ \ f:\ G \longmapsto f(G)$. G ist ein Gebiet, $A(G)$ ist der Flächeninhalt von G, $A(f(G))$ der Flächeninhalt von $f(G)$. Berechne jeweils das Verhältnis

$$\lambda = \frac{A(f(G))}{A(G)}$$

(a) $G =$ Einheitsquadrat mit den Eckpunkten $0, 1, 1+i, i$.

(b) $G =$ Halbkreis mit $\Im(z) \geq 0$ und Kreismittelpunkt $= 0$.

(5) Sei $f(z) = z^2,\ \ G = \{z \mid z = \varphi^2\,(\cos(Fi) + i\,\sin(\varphi)\},\ \ \varphi \in]0,\ 10\,\pi[$. Berechne:

$$\int_G f(z)\,dz$$

Viel Glück!

WIR

2.34 Test: Komplexe Funktionen III/31

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d},\ \ a,b,c,d\in\mathbb{C}$$

Erkläre und begründe kurz, ob eine solche Funktion f existiert mit $f(f(f(z)) = z$.

(2)

$$f(z) = \frac{2\,z-i}{i\,z+2}$$

Suche das Bild von $\{z = i\,t \mid t\in\mathbb{R}\}$.

(3) Berechne so exakt wie möglich:

(a) $ln(i)$
(b) $\tan(i)$
(c) $\tan{}'(i)$
(d) $\cos(3\,i)$

(4) Sei $f(z) = e^z,\ \ z = i\,t,\ \ t\in[0,\ 2\,\pi),\ \ K_r(z_0) = K_1(0) =$ Einheitskreis um 0.

$$\oint_{K_1(0)} f(z)\,dz = \,?$$

Hinweis: $\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C u\,dx - \int\limits_C v\,dy\ldots$

(5) Existiert eine holomorphe Funktion $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ mit $u(x,y) = x^3$? (Begründung!)

(6) (a)

$$\oint_{K_1(z_0)} (z-z_0)^n = \,?,\ \ n\in\mathbb{Z}$$

(b) Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ holomorph, $\vec{w} = \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix}$. $\leadsto$ $rot\ \vec{w} = \,?$

(c) C sei eine einfach geschlossene Kurve in einem einfachen Gebiet. Verwende $\vec{w}$ sowie den Satz von Stockes und berechne:

$$\oint_C u\,dx - v\,dy = \,?\ \text{ sowie }\ \oint_C v\,dx + u\,dy = \,?\ \Rightarrow\ \oint_C f(z)\,dz = \,?$$

Viel Glück!

WIR

2.35 Test: Komplexe Analysis, Fourieranalysis III/33

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y),\ \ z = x + i\,y \in \mathbb{C},\ \ u(x,y) = x \cdot y$

(a) Konstruiere, falls möglich, eine Funktion $f(z)$, welche in $\mathbb{C}$ holomorph ist.

(b) Suche, falls möglich, die Fixpunkte (resp. den Fixpunkt) von f sowie das Bild der imaginären Achse.

(2) Sei $f(z) = \dfrac{3\,z+9}{3-3\,z}$.

(a) Bestimme die Fixpunkte sowie das Bild von deren arithmetischem Mittel.

(b) Bestimme $f(f(z))$ sowie $f(f(f(z)))$.

(c) Bestimme möglichst einfach $f^{-1}(z)$.

(d) Bestimme das Bild der imaginären Achse.

(3) (a) Berechne direkt und ohne Tabelle die Fourierreihe von $f(t) = \sin^6(t)$.

(b) Der Weg γ ist durch den folgenden Streckenzug gegeben: $|\gamma| = \overline{A_\gamma P_1 P_2 E_\gamma}$ mit $A_\gamma = 1,\ \ P_1 = 1+i,\ \ P_2 = -1+i,\ \ E_\gamma = -1$. Fertige von der Spur des Weges eine Skizze an und berechne

$$\int\limits_{C=|\gamma|} \frac{1}{z}\,dz.$$

Viel Glück!

2.36 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis III/34

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Berechne mit Hilfe des Satzes von Gauss:

$$\oint_A \langle \operatorname{grad} \varphi, d\vec{A}\rangle = \,?$$

(b) Überführe die Maxwell'sche Gleichung $-\oint_\gamma \langle \vec{E}, d\vec{s}\rangle = \dfrac{d}{dt} \displaystyle\iint_A \langle \vec{B}, d\vec{A}\rangle$

in die Form $rot\ \vec{E} = -\dfrac{d\,\vec{B}}{d\,t}$.

(2) (a) Suche $\vec{u}$ möglichst einfach mit $rot\ \vec{u} = \begin{pmatrix} t(x,y,z) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Sei G_1 = Kreis um den Ursprung mit Radius 1, G_2 einfach zusammenhängendes Gebiet mit glattem Rand, das den Ursprung nicht enthält, $\vec{u}$ wie oben gegeben. Berechne

$$\iint_{A=G_2} \langle \text{rot}\ \vec{u}, d\vec{A}\rangle.$$

(c) Gegeben sei eine Ellipse in Normallage (Mittelpunkt im Ursprung, achsenparallel) mit der grossen Halbachse a (auf der x–Achse) und der kleinen Halbachse b (auf der y–Achse). Parametrisiere die Kurve und berechne den Krümmungsradius in $(a; 0)$ und $(0; b)$.

(3) (a) Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes Volumen V im $\mathbb{R}^3$ mit der Oberfläche A. $\vec{r}$ ist der Ortsvektor eines Punktes auf der Oberfläche. Berechne

$$\oint_A \frac{\vec{e}_r}{r^2}\, d\vec{A}.$$

(b) Wähle V = Volumen der Kugel im den Ursprung mit Radius R. Berechne das obige Integral für diese Situation.

Viel Glück!

WIR

2.37 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis III/35

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben ist die Kurve C in Polarkoordinaten. C umschliesst das Gebiet D:

$$r(\varphi) = -1 + \cos(\varphi), \quad \varphi \in [0,\ 2\,\pi)$$

(a) Skizziere C.

(b) Berechne die Krümmung $\kappa(\varphi)$. Wo ist $\kappa = \pm\infty$?

(c) Berechne die Kurvenlänge von C.

(d) Berechne exakt den Flächeninhalt von D.

(e) Sei Sei $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y-x \\ x+y \\ x^2 - 2\,y \end{pmatrix}$, $\vec{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x+1 \\ x \\ x-2\,y \end{pmatrix}$.

$$\oint_C \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \ ? \qquad \oint_C \langle \vec{G}, d\vec{r} \rangle = \ ?$$

(f) Über G werde ein Zylinder Z der Höhe 1 errichtet. Berechne den Fluss Φ von $\vec{H}$ durch die gesamte Oberfläche von Z.

(2) Gegeben ist eine beliebige geschlossene Kurve in der (x,y)–Ebene durch die Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Verwende das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ und leite damit eine Formel her zur Berechnung des Flächeninhalts des von C eingeschlossenen Gebiets.

(b) Suche ein anderes geeignetes Vektorfeld, das zu einer andern Formel für den Inhalt der besagten Fläche führt.

(c) Verifiziere die beiden Formel im Falle der Ellipse mit den Halbachsen a und b.

(3) A sei eine beliebige geschlossene Oberfläche. Berechne den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v} = \dfrac{1}{r^3}\,\vec{r}$ durch A in den beiden unten angegebenen Fällen. $\vec{r}$ ist der Ortsvektor, welcher auf einen Punkt von A zeigt.

(a) Im Fall wo der Ursprung ausserhalb von A liegt.

(b) Im Fall wo der Ursprung innerhalb von A liegt.

Viel Glück!

WIR

2.38 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis III/36

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben ist die Kurve C in Polarkoordinaten:

$$r(\varphi) = -1 + \cos(\varphi), \;\; \varphi \in [0,\; 2\,\pi)$$

C umschliesst das Gebiet D.

(a) Skizziere C.

(b) Berechne die Krümmung $\kappa(\varphi)$. Wo ist $\kappa = \pm\infty$?

(c) Berechne die Kurvenlänge von C.

(d) Berechne exakt den Flächeninhalt von D.

(e) Sei Sei $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y-x \\ x+y \\ x^2 - 2\,y \end{pmatrix}, \;\; \vec{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x+1 \\ x \\ x-2\,y \end{pmatrix}.$

$$\oint_C \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle = \,? \qquad \oint_C \langle \vec{G}, d\vec{r}\rangle = \,?$$

(f) Über G werde ein Zylinder Z der Höhe 1 errichtet. Berechne den Fluss Φ von $\vec{H}$ durch die gesamte Oberfläche von Z.

(2) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = const., \;\; a, b, \ldots, i = \text{Parameter}.$

Sei weiter $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \;\; \vec{v} = A \cdot \vec{r}$. Somit ist $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ ein Vektorfeld.

(a) $div\ \vec{v} = \,?$

(b) $rot\ \vec{v} = \,?$

(c) Um welchen Typ Matrix muss es sich bei A handeln, damit $\vec{v}$ konservativ ist?

(d) Berechne die Potentialfunktion $\varphi(x,y,z) = \ldots$ mit $\varphi(0,0,0) = 0$.

(e) Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \;\; \gamma$ ein beliebiger Weg von $(1;3;2)$ nach $(3;5;1)$.

$$W = \int_\gamma \langle A \cdot \vec{r}, d\vec{r}\rangle = \,?$$

Viel Glück!

WIR

2.39 Test: Analys. im $\mathbb{R}^n$, kompl. Zahlen, Vektoranalysis III/37

Abschrift • *Copie*

(1) Diskutiere die algebraische Kurve $x^2 - 2\,x\,y + x^2 - y^4 = 0$.

(2) Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{f}(x,y,z) = (2\,x^2 - x\,y, y^2 + y\,x, z^2 - x)^t$.
Berechne das Oberflächenintegral über die Oberfläche S des Einheitswürfels mit den Eckpunkten $(0;0;0)$, $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$:

$$I = \int\limits_S \langle \vec{f}(x,y,z), d\vec{S}\rangle = \,?$$

(3) Seien $f(x,y,z) = 3^{-1}\,(x^3 + y^3 + z^3)$ und $g(x,y,z) = x + y + z$.
Sei S die Oberfläche der Einheitskugel um den Ursprung. Berechne das Integral

$$I = \int\limits_S f \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, dS = \,?$$

($\dfrac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ ist die Richtungsableitung, $\vec{n} \perp$ Oberfläche.)

(4) Seien $a = 1 + i$, $b = (1+i)\,2^{-0.5}$, $c = -i$. Bestimme sämtliche Lösungen der folgenden Gleichung in der Form $z_k = x + i\,y$:

$$(b + c - (x-a)^4)^2 - 4\,a\,b = 0$$

Viel Glück!

WIR

2.40 Test: Lineare Abbildungen, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Vektoranalysis III/38

Abschrift • *Copie*

(1) Eine lineare Abbildung des 3–dimensionalen Raumes in sich besitzt die Abbildungsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Man weiss, dass alle Punkte der Geraden, die durch den Origo und den Punkt $P(1/1/1)$ geht, durch diese Abbildung unverändert gelassen werden, während der Punkt $A(4/-3/2)$ in $B(-6/1/2)$ übergeführt wird. Bestimme die fehlenden Elemente der Abbildungsmatrix und berechne den Bildpunkt D von $C(18/11/36)$!

(2) Gegeben sei ein 3–dimensionales Vektorfeld $\vec{X}$:

$$\vec{X} = \vec{X}(x, y, z) = x\, z\, \vec{e}_1 + x\, \sin(y)\, \vec{e}_2 + (z + e^x)\, \vec{e}_3.$$

Berechne das Linienintegral dieses Vektorfeldes längs des lückenlosen Weges $C = C_1 \cup C_2$, wobei C_1 ein Stück Parabel $z = x^3$ mit $x \in [0,\ 1]$ ist. C_2 verläuft parallel zur y–Achse mit $y \in [0,\ \pi]$, $x = 1$, $z = 1$.

(3) Der Kaffee in einer zylinderförmigen Tasse mit Radius r wurde längere Zeit gleichmässig umgerührt. Die resultierende Kaffeeoberfläche (Querschnitt oben) ist durch ein quadratisches Polynom $y = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2$ bestimmt. In der Mitte steigt der Kaffee bis zur Höhe c, am Rand bis zur Höhe d. Um wieviel Kaffee handelt es sich? (D.h. $V = ?$)

(4) Gegeben sei die folgende Raumfläche im $\mathbb{R}^3$:

$$3\, x^2\, z - 4\, x\, y\, z - 7\, x + 4\, y = 5$$

(a) Man bestimme den einzigen Punkt der Raumfläche mit horizontaler Tangentialebene.

(b) Man bestimme die Tangentialebene in der Funktionsform $z = z(x, y)$.

(c) In dieser horizontalen Tangentialebene liegt das Dreieck, welches gegeben ist durch $A(10/0/z)$, $B(5/5/z)$ und $C(2/1/z)$. Man berechne das Volumen des Körpers der entsteht, wenn man das Dreieck rotieren lässt um die Parallele zur x–Achse in der horizontalen Tangentialebene.

Viel Glück!

WIR

2.41 Test: Grundlagen, Logik, Mengenlehre, Zahlentheorie III/39

Abschrift • *Copie*

(1) Aus einer ehemaligen Aufnahmeprüfung:

(a) Zentrisch zum Ursprung in einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Kreis (Kreislinie) mit Radius R gegeben. Mit Mittelpunkt M_2 auf der negativen x–Achse ist dazu noch ein zweiter Kreis gegeben mit Radius $r = \frac{R}{2}$. Dieser zweite Kreis geht durch den Ursprung. Durch M_2 geht weiter noch eine Gerade g senkrecht zur x–Achse. A ist die Fläche, welche gebildet wird von den Punkten des ersten grösseren Kreises ohne die Punkte links von g und ebenso ohne die Punkte des zweiten Kreises. Berechne den Flächeninhalt von A.

(b) Vereinfache von Hand:

$$((a-b)\ :\ (\frac{1}{a+b})\ :\ (\frac{a+1}{b}-\frac{b+1}{a})\ :\ (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a\cdot b}))$$

(2) $|A| = 99,\ |B| = 98,\ |C| = 97,\ |A\cap B| = 30,\ |A\cap C| = 27,\ |B\cap C| = 28,\ |A\cap B\cap C| = 26.$

(a) $G = |A\cup B\cup C| = ?$

(b) $|(A\cap B)\setminus(A\cap B\cap C)| = ?$

(3) Zeige oder widerlege: $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$.

(4) (a) Beweise oder widerlege: $\forall_{l\in\mathbb{N}}:\ k\,|\,(k^3+(k+1)^3+(k+2)^3)$.

(b) Entwickle eine Formel für die maximale Anzahl der Schnittpunkte von n Kreisen und beweise diese Formel.

(5) $a, b\in\mathbb{Z}.\qquad (a\sim b)\ \Leftrightarrow (a^2+b^2\geq a\,b) \leadsto$ Äquivalenzrelation?

(6) Betrachte $(((X\ \Rightarrow\ Z)\ \vee\ (Y\ \Rightarrow\ Z))\ \Rightarrow\ (\neg X\ \wedge\ Y\ \Rightarrow\ Z)) \equiv f(X,Y,Z)$.

(a) Wahrheitstafel von $f(X,Y,Z)$?

(b) A.n.F oder k.n.F. von $f(X,Y,Z)$? (Einfachere Variante geben!)

(7) Erstelle das Hasse–Diagramm der Menge $\{a,b,c,d\}$. In wievielen Teilmengen ist das Element a enthalten?
Kann man damit eine Formel für die verallgemeinerte Situation $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ finden?

(8) Löse folgende Kongruenzgleichungen:

(a) $16\equiv 22\cdot x\ (mod\,30)$

(b) $1\equiv 18\cdot x\ (mod\,53)$

(c) $\left|\begin{array}{rcl} [4]_{12}\cdot[x]_{12}-[y]_{12} & = & [8]_{12} \\ [2]_{12}\cdot[x]_{12}-[y]_{12} & = & [10]_{12} \end{array}\right|$ System! %

(9) $a \;\Rightarrow\; \neg\, b \;\wedge\; c \;\Rightarrow\; a \;\wedge\; b \vdash \neg c \;\leadsto$ korrekter Schluss?

(10) Vereinfache:

$$D \vee \neg\, D \wedge (A \wedge B \wedge C \vee \neg\, A \vee \neg\, B \vee \neg\, C) \wedge (D \vee D \wedge E) \wedge (D \vee E \wedge F) \vee (A \wedge \neg\, D)$$

Viel Glück!

2.42 Test: Gleichungssysteme, Vektorgeometrie III/40

Abschrift • *Copie*

(1) Löse nach Cramer:

$$\left| \begin{array}{lcl} (1-\lambda)\,x+y+1 & = & 0 \\ (1+\lambda)\,x+y+\lambda & = & 0 \end{array} \right|$$

Aufgrund der errechneten Lösungen zu erarbeiten:

(a) Skizziere dann die Kurven $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ und $\vec{v}(\lambda) = \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \end{pmatrix}$

(b) Für welche λ hat das Problem keine Lösung?

(2) Gegeben ist das Dreieck $\triangle ABC$ mit $A(-3;-9)$, $B(9;-6)$, $C(0;6)$. Durch den Schwerpunkt S wird eine Gerade parallel zu $\overline{AB}$ gezogen $\leadsto$ g. Anschliessend wird das Dreieck $\triangle ABC$ an der Achse g gespiegelt $\leadsto$ $\triangle A'B'C'$. $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ schneiden sich in $P_1, P_2, \ldots, P_6$. Diese Punkte bilden ein Sechseck. Berechne den Flächeninhalt dieses Sechsecks.

(3) (a) Gegeben sind $g_1 : \vec{r} = \vec{a} + \lambda\,\vec{b}$ und $g_2 : \vec{r} = \vec{c} + \lambda\,\vec{d}$.
Entwickle eine allgemeine Formel für den Abstand von g_1 und g_2 im Raum.

(b) Berechne den eben erwähnten Abstand für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4) (a) Φ ist gegeben durch die Punkte $(1;0;0)$, $(0;2;0)$, $(0;0;3)$. Von $P_0 = P_0(0;0;12)$ aus wird das Lot auf Φ gefällt $\leadsto$ Lotfusspunkt S. S ist auch der Schwerpunkt eines gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$ mit $A = O$ (Origo). Berechne B und C.

(b) Ein zur x–Achse paralleler Lichtstrahl trift von der positiven Seite dieser Achse her kommend in S auf Φ auf und wird dort reflektiert. Wo trifft der reflektierte Strahl anschliessend zuerst auf die Grundebene?

Viel Glück!

WIR

2.43 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, komplexe Zahlen III/41

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von A.

(b) Berechne die Spur von A.

(c) Berechne die Eigenwerte von A.

(d) Berechne die Eigenvektoren von A.

(e) Berechne, falls vorhanden, die Hauptvektoren $\vec{y}$ von A.
Hinweis: Eigenvektoren $\rightsquigarrow$ $A \cdot \vec{x} = \lambda\, \vec{x}$ oder $(A - \lambda E)\, \vec{y} = \vec{0}$.
Hauptvektoren $\rightsquigarrow$ $(A - \lambda E)^2\, \vec{x} = \vec{0}$.

(2)

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von A.

(b) Kann α so gewählt werden, dass $\mathbb{L} = \{\}$ ist? — ($\alpha = ?$)

(c) Wie gross ist z für $x = \frac{1}{8}$? (Falls lösbar.)

(3)

$$\frac{\sqrt{2}\,(z-i)^5 - \sqrt{2}}{1+i} = 1 - i$$

Leite die Lösungen her und skizziere die Lösungsmenge!

(4)

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untersuche die Abhängigkeit der Eigenwerte von k !

(5)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = X \cdot D \cdot X^{-1} \quad \text{(Diagonalisierung)}$$

(a) Berechne D und $X = (\vec{x_1} x_2)$, $\vec{x_1}$ und $\vec{x_2}$ normiert.

(b) Berechne A^{100}.

(c) Berechne $A \cdot \vec{y}(t)$, $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Viel Glück!

WIR

2.44 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Vektorgeometrie III/42

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von $A(s)$.
(b) Berechne die Spur von $A(s)$.
(c) Berechne die Eigenwerte von $A(s)$.
(d) Berechne die Eigenwerte von $A(1)$.
(e) $A(s)^{-1} = ?$
(f) Berechne die Eigenwerte von $A(3)$.
(g) Berechne die Eigenvektoren von $A(3)$.

(2)

$$B(x) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von $B(s)$.
(b) Berechne die Eigenwerte von $B(s)$.
(c) $B(s)^{-1} = ?$
(d) Berechne die Eigenwerte von $B(2)$.
(e) Berechne die Eigenvektoren von $B(2)$.
(f) $B(2) = X \cdot D \cdot X^{-1}$, $D =$ Diagonalmatrix, $X =$ Matrix der Eigenvektoren.
  i. $X, D = ?$
  ii. $X^{-1} = ?$
(g) $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B(x) \cdot \vec{y}(t) = \vec{w}(t)$ (Gerade!).
Bestimme s so, dass die Bildgerade durch den Ursprung geht.

(3)

$$A(s) \cdot \begin{pmatrix} s \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gibt es eine Lösung (s, y, z, w)?

Viel Glück!

WIR

2.45 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Vektorgeometrie III/43

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Spur der Determinante.

(b) Berechne die Eigenwerte.

(c) Berechne die Eigenvektoren.

(d) Berechne allenfalls weitere existierende Hauptvektoren.

(2) Sei $A = B + k \cdot E = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix}.$

Berechne die Eigenwerte und untersuche, wie diese von h abhängen.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Stelle A in der Form $A = U \cdot D \cdot U^{-1}$ dar (mit $\det(U) = 1$).

(b) Berechne $(A^{-1})^{100}$

(c) Berechne das Bild der Geraden $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Was fällt an diesem Resultat auf?

Viel Glück!

2.46 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Reihentheorie III/43a

---

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben ist ein Quadrat $Q_1Q_2Q_3Q_4$ mit $Q_1 = P_1$ und Halbdiagonalen der Länge 1. Der Einfachheit halber nummerieren wir die Eckpunkte weiter wir folgt:

$$Q_5 = Q_1,\ \ Q_6 = Q_2,\ \ Q_{n+4} = Q_n.$$

Auf $\overline{Q_2Q_4}$ befindet sich $\dfrac{1}{3}$ von Q_2 entfernt der Punkt P_2. P_3 wird dann durch folgende Bedingungen Konstruiert: $P_3 \in \overline{Q_3Q_1}$, $\overline{P_3P_2} \perp \overline{P_2P_1}$ — oder allgemeiner:

$$P_n \in \overline{Q_nQ_{n-2}} \ \text{ und } \ \overline{P_nP_{n-1}} \perp \overline{P_{n-1}P_{n-2}}.$$

So entsteht ein spiralartiger Streckenzug $\overline{P_1P_2P_3P_4P_5P_6\ldots P_n\ldots}$.
$\rightsquigarrow$ Was ist die Länge dieses Streckenzuges für $n \to \infty$?

(2) Berechne

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \sum\limits_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^n$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - \sin(n)}{n\,(1 - cos(n))}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\,(k+1)} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

(3) Berechne jeweils die angegebenen Ableitungen:

(a) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x) + 2\,\sin^2(x)$, $f\,'(x) = ?$

(b) $f(x) = x^4 - 4^x$, $f\,'(x) = ?$

(c) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+\cos(x)}$, $f\,'(x) = ?$

(d) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$, $f\,'(x) = ?$

(e) $f(x) = (1+x^2)^3$, $f\,'(x) = ?$, $f\,''(x) = ?$, $f\,'''(x) = ?$

(f) $f(x) = ln(x^2\cdot\sin(x))$, $f\,'(x) = ?$

(g) $f(x) = ln(-x)$, $f\,'(x) = ?$

(h) $f(x) = \arctan(e^{-x}) - ln(1+e^{2\,x})$, $f\,'(x) = ?$

(4) Sei $f(x) = x^3 - 9\,x^2 + 23\,x - 15$. Berechne Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

(5) Sei $f(x) = x\cdot\sin(x)$. Berechne Näherungswerte für Extrema und Wendepunkte, $x \in (0,\ 2\,\pi)$.

%

(6) Sei $f(x) = 2 + ln(x)$. Für $x = 1$ wird die Tangente (Gerade g) an die Kurve konstruiert. Berechne die Nullstellen von $g = g(x)$.

(7) Sei $f(x) = x - x^{\pi}$. Berechne den Steigungswinkel der Tangenten für $x = 0$ und $x = 1$.

Viel Glück!

WIR

2.47 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ III/44

Abschrift • *Copie*

(1) Zwischen $x = 0$ und $x = 3$ schliesst die Parabel $y = f(x) = 4\,x^3$ und die Gerade durch $(0;\ 0)$ und $(3;\ f(3))$ eine Fläche ein. Berechne den Flächeninhalt!

(2) Berechne den Flächeninhalt unter der Kurve $f(x) = \dfrac{2\,x}{x^4+1}$ und oberhalb der x–Achse zwischen $x = 0$ und ∞.

(3)

$$F(t) = \int\limits_0^t \left(\frac{x^3}{x} - \frac{5\,x^2}{6} - \frac{3\,x}{2} + 3\right) dx = \,?$$

(4) (a) $\int\limits_0^{\alpha} \cos^2(\varphi)\,d\varphi = \,?$ *(Verwende* $\cos(2\,\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = 2\,\cos^2(\varphi) - 1$*)*

(b) $\int\limits_0^{t} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \,?$ *(Setze* $x = r\,\cos(\varphi)$, $\dfrac{d\,x}{d\,\varphi} = \ldots$, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, *Kreis!)*

(5) Berechne exakt:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos(x) - \sin(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}\right) dx = \,?$$

(6) $\int (\ln(x))^2\,dx = \,?$ *Integriere partiell* $\int 1 \cdot (\ln(x)^2\,dx = \ldots$

(7) $\int (x^2 + 2\,x)\,e^x\,dx = \,?$ *Integriere partiell...*

(8) $\int 2\,\sin^3(x)\,\cos(x)\,dx = \int (\sin^2(x))\,(2\,\sin(x)\,\cos(x))\,dx = \,?$

(9) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \,?$ *Substituiere* $t = \sqrt{x}$, $x = \ldots$, $\dfrac{d\,x}{d\,t} = \ldots$

(10) $\int \dfrac{4\,x^2 - 7\,x + 25}{x^3 - 6\,x^2 + 3\,x + 10}\,dx = \,?$ *Partialbruchzerlegung! Betrachte den Nenner für* $x = -1\ldots$

(11) $\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \,?$ *Hinweis:* $x = r \cdot \sin(t)$, $\dfrac{d\,x}{d\,t} = \ldots$, $t = \arcsin(\dfrac{x}{t})$.

(12) $\int \dfrac{dx}{sin(x)} = \,?$

Hinweis:
$$\sin(x) = 2\,\sin(\frac{x}{2})\,\cos(\frac{x}{2}) = 2\,\frac{\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} \cdot \cos^2(\frac{x}{2})}{1} = 2\,\frac{\tan(\frac{x}{2}) \cdot \cos^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})}$$
$$= 2\,\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\tan^2(\frac{x}{2}) + 1}, \text{ \textit{substituiere} } \tan(\frac{x}{2}) = t.$$

Viel Glück!

Ende • *Fin*