Übungen und Selbststudium in Mathematik ◇ A1 02 ◇

Das Problem der Streckungen, Translationen (Verschiebungen) und Drehungen von Punkten und Vektoren:

Einen Vektor um einen Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ strecken heisst, dass man den zugehörigen Pfeil oder den damit gegebenen Ortsvektor um diesen Faktor zu strecken hat. So ist $-3\,\vec{v}$ dann 3 mal so lang wie $\vec{v}$ und entgegengesetzt gerichtet.

Eine Verschiebung oder Translation eines Vektors $\vec{v}$ um einen Vektor $\vec{a}$ bedeutet, dass man mit der Vektoraddition $\vec{w} = \vec{v} + \vec{a}$ einen neuen Vektor $\vec{w}$ bestimmt. Dabei werden die Koordinaten von $\vec{v}$ und $\vec{a}$ addiert.

In der Ebene kann man einen Punkt oder einen Ortsvektor eindeutig mit einen gegebenen Winkel um den Ursprung drehen. Im Raum ist das aber anders: Eine Drehung im Raum muss durch eine Drehachse festgelegt werden. Eine Achse ist durch zwei Punkte gegeben.

Probl. 1 Drehungen: Wir projizieren den dreidimensionalen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ in eine der drei Grundebenen und erhalten dort im Zweidimensionalen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Diese Vektoren kann man z.B. um den Ursprung drehen. Erst studieren wir die Drehungen an einfachsten Beispielen:

(a) Drehen wir $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ um 30^o oder $\frac{\pi}{6}$ im Gegenuhrzeigersinn, so erhalten wir den Vektor $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.866025 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. Drehen wir hingegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ um diesen Winkel, so finden wir $\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.866025 \end{pmatrix}$. Drehen wir die Summe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so erhalten wir die Summe $\begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1/2 \\ 1/2 + \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

(b) Allgemein ist das Resultat einer Drehung des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ um α der Vektor $\begin{pmatrix} \cos(\alpha)\,x - sin(\alpha)\,y \\ \sin(\alpha)\,x + cos(\alpha)\,y \end{pmatrix}$

(c) Drehen wir daher die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ um 30^o oder $\frac{\pi}{6}$ im Gegenuhrzeigersinn, so erhalten wir näherungsweise die Vektoren $\begin{pmatrix} -0.767949 \\ 5.33013 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.33013 \\ 7.69615 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1.26795 \\ 6.19615 \end{pmatrix}$

Probl. 2 Aufgabe: Mache dir von der Sache eine Skizze (Kontrolle!). Ist alles so richtig?

Probl. 3 Drehe den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um die z–Achse um 60^o, das Resultat dann um die x–Achse um 45^o und das neue Resultat wieder um die z–Achse um -60^o. Was bekommt man? Kontrolliere das Resultat mit Hilfe einer Skizze (Selbstkontrolle ist in der Praxis wichtig!).

Probl. 4 Halte in einer Zusammenfassung deine Erkenntnisse über Drehungen fest.

Probl. 5 Suche im Werk „Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik" in den Teilen 1.1 bis 1.3 Anwendungen für deinen Beruf, die dir persönlich wichtig sind und halte diese in einer Zusammenfassung fest.