**Test** ◇ **B1 03** ◇

---

**Wichtig:** Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.

**Probl. 1** (a) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum $n$–ten Glied:
$f_1(x) = e^{-x^2},\ x_0 = 0,\ n = 8$. Dabei soll die Potenzreihenentwicklungen von $e^x$ verwendet werden. (Das Vorgehen muss gut sichtbar gezeigt werden.)

(b) Berechne approximativ mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung bis zum $n$–ten Glied:
$\int\limits_{-2}^{2} f_1(x)\,dx = \,?$

(c) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum $n$–ten Glied:
$f_2(x) = \cos(x^2) + e^{x^2},\ x_0 = 0,\ n = 8$. Dabei sollen die Potenzreihenentwicklungen von $e^x$ sowie von $\cos(x)$ verwendet werden. (Das Vorgehen muss sichtbar sein.)

(d) Berechne von Hand die Potenzreihenentwicklungen bis zum $n$–ten Glied:
$f_3(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1,\ n = 6$.

(e) Berechne den Konvergenzradius der Potehnzreihen von $f_3(x),\ x_0 = 1$

(f) Berechne den Konvergenzradius der Potehnzreihevon $f_4(x) = ln(x) - \sin(x),\ x_0 = 1$.
(Es darf hier auch ein Plausibilitätsargument verwendet werden.)

(g) Berechne den Grenzwert von Hand: $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{16} + \frac{1}{81} \pm \ldots$

**Probl. 2** Gegeben sind im Raum die Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4$ mit

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OP_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne den Volumeninhalt des Tetraeders $(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

(b) Berechne den Inhalt der Oberfläche des Tetraeders $(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

(c) Berechne den Schwerpunkt des Tetraeders $(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

(d) Berechne den Abstand des Punktes $P_4$ von der Ebene $\Phi(P_1, P_2, P_3)$.

**Probl. 3** (a) Gegeben sind die Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4$ wie in der letzten Aufgabe. Durch $P_1$, $P_2$ und $P_3$ wird eine Ebene $\Phi_1$ definiert. Durch $P_4$ sowie die Richtungsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Ebene $\Phi_2$ gegeben. Entscheide mittels gut gegliederter Rechnung, ob $\Phi_1$ und $\Phi_2$ zusammenfallen, parallel sind oder sich schneiden.

(b) Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ werden in die Grundebene projiziert $\leadsto$ $\vec{a}\,'$, $\vec{b}\,'$. Allsdann wird $\vec{a}\,'$ in der Grundebene durch Rechtsdrehung senkrecht gestellt. $\vec{b}\,'$ hingegen wird nur um $12^o$ nach rechts gedreht. $\leadsto$ $\vec{a}\,''$, $\vec{b}\,''$.

i. Berechne $\vec{a}\,''$.

ii. Berechne den Winkel zwischen $\vec{a}\,''$ und $\vec{b}\,''$.

iii. Berechne $\vec{b}\,''$.

**Probl. 4** Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Löse die Matrixgleichung $A^T \cdot X \cdot B = A$. (Herleitung der Formel zeigen!)

(b) Berechne die Inverse von $A$ von Hand.

**Probl. 5** (a) Berechne die Determinante der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ von Hand.

(b) Entscheide, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

(c) Berechne die Determinante der Matrix $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ von Hand.

**Probl. 6 Zusatzaufgabe:**

Finde die Lösung von $f\,''(t) + f(t) = 0,\;\; f(0) = 2,\;\; f\,'(0) = 0.$
(Vielleicht gelingt es hier, eine Lösung zu erraten und dann das Resultat zu verifizieren.)