Test ◇ **B1–08//09–03** ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Probl. 1 Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär sind:

$$M \cdot (E - X) \cdot M^{-1} + M - A \cdot M = A \cdot M^T - 3\,M$$

Probl. 2 Gegeben ist eine Gerade $g: \ \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechne den Abstand des Punktes $Q(3; 10; 14)$ von g.

Probl. 3 Gegeben ist eine Ebene $\Phi: \ \vec{v}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne den Abstand des Punktes $Q(3; 10; 14)$ von Φ.

(b) Berechne den Lotfusspunkt von Q auf Φ.

Probl. 4 Gegeben sind die vier Punkte $P_1(1; 1; 0)$, $P_2(-1; 2; 2)$, $P_3(-3; -2; 3)$, $P_4(1; 1; 4)$. Dadurch ist ein Streckenzug mit den Seitenvektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_3P_4}$ definiert. In P_4 wird nun der Pfeil $\frac{1}{2}\ \overrightarrow{P_1P_2}$ angefügt. Dadurch erhält man den Punkt P_5. In P_5 setzt man dann den Pfeil $\frac{1}{2}\ \overrightarrow{P_2P_3}$ an, wodurch P_6 erhalten wird. In P_6 setzt man dann den Pfeil $\frac{1}{2}\ \overrightarrow{P_3P_4}$ an, wodurch P_7 erhalten wird. Genauso verfahren wir nun von P_7 weg mit den Pfeilen $(\frac{1}{2})^2\ \overrightarrow{P_1P_2}$, $(\frac{1}{2})^2\ \overrightarrow{P_2P_3}$, $(\frac{1}{2})^2\ \overrightarrow{P_3P_4}$, womit wir P_8, P_9, P_{10} erhalten. Von P_{10} geht es nun in der selben Art mit $(\frac{1}{2})^3\ \overrightarrow{P_1P_2}$, $(\frac{1}{2})^3\ \overrightarrow{P_2P_3}$, $(\frac{1}{2})^3\ \overrightarrow{P_3P_4}$ weiter und so fort. Zu welchem Punkt gelangt man, wenn man schliesslich bis und mit den Pfeilen $(\frac{1}{2})^{99}\ \overrightarrow{P_1P_2}$, $(\frac{1}{2})^{99}\ \overrightarrow{P_2P_3}$, $(\frac{1}{2})^{99}\ \overrightarrow{P_3P_4}$ ansetzt?

Probl. 5 Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

Demonstriere damit den Gauss–Jordan–Algorithmus und finde die Lösung!

%

Probl. 6 Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechne $(B^{-1} \cdot A^{-1})^T$.

Probl. 7 Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bilde den Punkt $P_0(4;7)$ mittles M ab (Vektor $\overrightarrow{OP_0}$ abbilden). Drehe dann den Bildpunkt P_1 um $+32^o$ um den Ursprung. Bilde danach den durch die Drehung erhaltenen Bildpunkt P_2 nochmals mittels M ab. Berechne damit den Bildpunkt P_3 der gesamten Abbildung.

Probl. 8 Gegeben ist ein Dreieck durch die Punkte $P_1(1;1;0)$, $P_2(1;0;2)$, $P_3(0;2;3)$. Damit ist eine Ebene Φ definiert. Vom Ursprung aus zieht man einen Strahl g durch den Schwerpunkt S des Dreiecks. Gesucht ist ein Punkt P_4 auf g, welcher nicht auf der selben Seite von Φ wie der Ursprung liegt, sodass die durch $\triangle P_1P_2P_4$, $\triangle P_2P_3P_4$ und $\triangle P_3P_1P_4$ definierte Oberfläche einen zweimal so grossen Inhalt hat wie das Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$.

Probl. 9 Gegeben sind die Geraden

$$g_1 : \vec{v}_1(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{v}_2(t_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Stelle fest, ob die beiden Geraden windschief sind.

(b) Berechne allenfalls ihren Abstand.

Probl. 10 Gegeben ist eine Kugel mit dem Radius $r = 2$ um den Ursprung. An die Kugel wird eine Tangentialebene gelegt, welche die Achsen des Koordinatensystems in den Punkten $x_0 = a$, $y_0 = a$, $z_0 = a$ mit $a > 0$ schneidet.

(a) Berechne a.

(b) Berechne die Koordinaten des Tangentialpunktes T auf der Kugel.

(c) Berechne die Winkel zwischen der Geraden $\overline{OT}$ und den Koordinatenachsen.

Viel Glück!