Test ◇ E+M1 01 2012 S2 ◇

Hinweis: *Eine Aufgabe kann nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsgang ersichtlich ist. Der Lösungsgang muss auf dem Blatt festgehalten sein. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet. Zu einer Aufgabe gehört immer auch eine Skizze! Numerische Genauigkeit: 4 Ziffern (ab der 1. Ziffer ungleich 0).*

Vektoralgebra– und Geometrie, Determinanten

Probl. 1 Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(6,\,5)$ und dem Radius $r = 4$. Dazu kennt man den Punkt $P(-1,\,0)$. Von P aus zieht man die beiden Tangenten an den Kreis mit den Tangentialpunkten T_1 und T_2. Dabei hat T_1 eine kleinere y–Koordinate als T_2. Auf der Geraden $\overline{T_1T_2}$ liegt zwischen T_1 und T_2 ein Punkt Q, welcher durch das Streckenverhältnis $|\overline{T_1Q}| : |\overline{T_2Q}| = 2 : 1$ genau definiert ist. Die Gerade $\overline{PQ}$ schneidet den Kreis in den Punkten H_1 und H_2.

(a) Erstelle eine möglichst genaue Skizze von der Situation.

(b) Berechne nachvollziehbar numerisch die Koordinaten von T_1 und T_2.

(c) Berechne nachvollziehbar numerisch die Koordinaten von H_1 und H_2.

(d) Berechne nachvollziehbar numerisch die Werte $|\overline{PT_1}|^2$ resp. $|\overline{PT_2}|^2$ sowie $|\overline{PH_1}|\cdot|\overline{PH_2}|$. Was stellt man fest?

Probl. 2 (a) Berechne $B^{-1}(r) = \begin{pmatrix} r & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ nachvollziehbar von Hand.

(b) $A(r) = \begin{pmatrix} r & 2 & 3\,r \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Berechne $\det(A(r))$ nach Sarrus.

(c) Entscheide, für welche r die Inverse $A(r)^{-1}$ nicht existiert

(d) Es gilt: $A(1)\cdot X\cdot A^{-1}(1) + E = A(0) - A(r)\cdot X\cdot A^{-1}(1)$. Berechne X formal (ohne Zahlen zu verwenden).

(e) Berechne X in der letzten Aufgabe für $r = 2$ und $r = -3$ in Zahlen, falls dies möglich ist.

Probl. 3 Gegeben sind die Punkte $A(16; y; 0)$, $B(13; 7; 12)$, $C(2; 2; 8)$.

(a) Bestimme y so, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

(b) Untersuche, ob das eben bestimmte Dreieck auch gleichschenklig ist.

(c) Suche einen Punkt D so, dass ein Rechteck $ABCD$ entsteht.

(d) Suche einen Punkt S so, dass die Figur $ABCDS$ eine Pyramide (Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke) mit rechteckigem Grundriss wird mit dem Volumen $V = 1944$ und der Spitze S (2 Lösungen, S liegt senkrecht über der Flächenmitte.)

Probl. 4 Gegeben sind die Punkte $P_1(5;\, 0)$, $P_2(4;\, 1)$, $P_3(3.5;\, 2)$, $P_4(2;\, 6)$, $P_5(-1;\, 5)$. Die Paare $(P_1,\, P_2)$, $(P_2,\, P_3)$, $(P_3,\, P_4)$, $(P_4,\, P_5)$ definieren zusammen mit O jeweils ein Dreieck.

(a) Erstelle eine Skizze und berechne den Flächeninhalt des Gebildes.

(b) Wenn man den Punkte P_5 um $\varphi = 34.7^o$ dreht, erhält man den Punkt P_6. Erstelle die Drehmatrix D_φ numerisch.

(c) Berechne P_6 mit Hilfe von D_φ.

Probl. 5 Gegeben sind die Punkte $A(2,\, 1,\, 0)$, $B(3,\, 8,\, 0)$, $C(-1,\, -3,\, 5)$, $D(6,\, -9,\, 4)$.

(a) Stelle die vier Punkte in einer Skizze dar und ermittle, ob diese Punkte ein nicht reguläres Tetraeder bilden, oder ob alle Punkte in einer Ebene liegen (Begründung).

(b) Berechne den Oberflächeninhalt des Tetraeders, falls es existiert.

Probl. 6 Gegeben sind zwei Matrizen: $M_1 = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Eigenwerte von M_1.

(b) Berechne die Eigenvektoren von M_1 in der normierten Form (dezimal).

(c) Berechne die Eigenwerte von M_2.

(d) Berechne die Eigenvektoren von M_2 in der normierten Form (dezimal).

(e) Was stellt man fest, wenn man die Resultate von M_1 und M_2 vergleicht?

(f) Berechne $M_1 \cdot M_2$ und $M_2 \cdot M_1$. Was stellt man fest?

(g) Berechne die Eigenwerte von $M_1 \cdot M_2$. Was stellt man fest?

(h) Berechne die Eigenvektoren von $M_1 \cdot M_2$ in der normierten Form. Feststellung?

(i) Berechne die EW und EV von $M_1 \cdot M_2 \cdot M_1$. Was stellt man fest?

(j) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ definieren zusammen mit dem Ursprung O ein Parallelogramm PG. Diese Figur PG wird nun punktweise durch M_1 in eine Figur PG' abgebildet. Berechne den die Flächeninhalte F von PG sowie F' von PG' und untersuche, ob das Verhältnis $F_1' : F$ etwas mit den Eigenwerten von M_1 zu tun hat.

Viel Glück!