Test ◇ E+M1–08/09–03 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle lösbaren Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♠ Unlösbare Aufgaben sind zu kommentieren.
♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

Diverses aus Vektor– und Matrizenrechnung sowie Eigenwerttheorie

Probl. 1 Gegeben ist eine Gerade $g:\ \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechne den Abstand des Punktes $Q(3; 10; 14)$ von g.

Probl. 2 Gegeben ist eine Ebene $\Phi:\ \vec{v}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne den Abstand des Punktes $Q(3; 10; 14)$ von Φ.

(b) Berechne den Lotfusspunkt von Q auf Φ.

Probl. 3 Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Eigenwerte von M.

(b) Berechne die Eigenvektoren von M in der normierten Form.

(c) Stelle M dar in der Form $X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}$, wobei X aus den Eigenvektoren besteht. D_λ ist die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten in der Diagonalen.

(d) Berechne die Eigenwerte von D_λ. Was stellt man fest?

(e) Berechne die Eigenvektoren von D_λ. Was stellt man fest?

(f) Skizziere die Geraden, welche gegeben sind durch die Eigenvektoren von M und den Ursprung. Schreibe für jede Gerade eine Parametergleichung auf.

(g) Bilde die eben betrachteten Gerade mit M ab. Was stellt man fest?

(h) Bilde die eben betrachteten, durch die Eigenvektoren von M und den Ursprung gegebenen Gerade mit Hilfe von D_λ ab. Decken sich die nun erhaltenen Geraden mit den in der vorhergehenden Teilaufgabe gewonnenen Geraden?

(i) Berechne die Matrix $M \cdot M := M^2 = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} \cdot X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} = \ldots$.

(j) Berechne mit Hilfe des eben entdeckten Tricks die Matrix M^{50}.

Probl. 4 Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dazu ist A diejenige Matrix, für welche gilt: $A \cdot \vec{e}_1 = \vec{a}_1,\ \ A \cdot \vec{e}_2 = \vec{a}_2,\ \ A \cdot \vec{e}_3 = \vec{a}_3$.

(a) Berechne die Matrix A.
(b) Berechne die Eigenwerte von A.
(c) Berechne die Eigenvektoren von A.
(d) W_e sei der Einheitswürfel, gegeben durch die Basisvektoren $\vec{e}_1,\ \ \vec{e}_2,\ \ \vec{e}_3$. W_e wird durch A in einen Spat Sp abgebildet. Berechne das Volumen V_{Sp} des Spats.
(e) Berechne die Determinanten von A und von A^{-1}.
(f) Vergleiche $\det(A)$ mit V_{Sp}. Was stellt man fest?
(g) Berechne das Produkt der Eigenwerte λ_k von A.
(h) Vergleiche $\prod\limits_{k=1}^{3} \lambda_k$ mit V_{Sp}. Was stellt man fest?
(i) Berechne das Bild von $s = \sum\limits_{k=1}^{3} \vec{e}_k$ bei der Abbildung durch A.
(j) Vergleiche s mit $\sum\limits_{k=1}^{3} \vec{a}_k$. Was stellt man fest?

Probl. 5 Gegeben ist die Gerade $g:\ \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie der Punkte $P(10, -1)$.

(a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix $S(g)$ für die Geradenspiegelung an g.
(b) Spiegele damit P, d.h. berechne den Bildpunkt P_1.
(c) Konstruiere die Drehmatrix $D(\varphi)$ mit $\varphi = +10^o$.
(d) Drehe damit P_1 um O, d.h. berechne den Bildpunkt P_2.
(e) Spiegele den Punkt P_2 mittels $S(g)$ zurück, d.h. berechne den Bildpunkt P_3.
(f) P_4 sei der Punkt, welcher entsteht durch Drehung um O um $\varphi = -10^o$. Berechne P_4.
(g) Ist die Gleichung $P_3 = P_4$ mit den hier erhaltenen Resultaten richtig oder falsch?

Probl. 6 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Diese Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden zusammen mit dem Ursprung O eine Ebene Φ.

(a) Konstruiere eine Spiegelungsmatrix, mit deren Hilfe man einen Punkt P an Φ spiegeln kann.
(b) Spiegele damit den Punkt $P_0(10, 5, -3)$, d.h. berechne den Bildpunkt P_1.
(c) Konstruiere eine Projektionsmatrix, mit Hilfe welcher man einen Punkt P auf Φ projizieren kann. (Überlege dir dazu. wie man jetzt die Eigenwerte wählen muss.)
(d) Projiziere den Punkt $P(10, 10, 20)$ auf Φ, d.h. berechne den Bildpunkt Q.

Probl. 7 Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär sind:

$$M \cdot (E - X) \cdot M^{-1} + M - A \cdot M = A \cdot M^T - 2\,M$$

Viel Glück!

WIR1