Test (Übung) ◇ B2 01Üb ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte. („Exakt“ heisst „ohne Dezimalbrüche“ im Resultat.) Wichtig: Immer eine Skizze.

Probl. 1 Eine Kraft von 30 N in Richtung $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ soll in drei Komponenten zerlegt werden, die parallell zu den Richtungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind. Berechne die Länge der Zerlegungskomponenten.

Probl. 2 In welchem Winkel schneiden sich die Ebenen
$\Phi:\ 2\,x + 3\,y - z = 2$ und $\Psi:\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Probl. 3 Spiegle den Punkt $P(4;4;6)$ an der Ebene $\Phi:\ 2\,x + 3\,y - z = 2$. Das ergibt den Punkt P'. Welchen Abstand von der Geraden $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat der Punkt P'?

Probl. 4 Die Kugel $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$ schneidet die (x,y)–Ebene in einem Punkt P mit der x–Koordinate 2. g sei die Schnittgerade der Tangentialebene an die Kugel in P mit der (x,y)–Ebene. Berechne die Schnittpunkte von g mit den Achsen.

Probl. 5 $\kappa:\ \vec{v}(u) = \begin{pmatrix} u \\ u \\ -u^2 + 9 \end{pmatrix}$, $u \in [-3, 3]$, ist eine Kurve im $\mathbb{R}^3$.

(a) Skizziere die Kurve.

(b) Berechne für einen beliebigen Punkt die Richtung des Tangentenvektors $\vec{v}$.

(c) Berechne die Kurvenlänge.

(d) Berechne für jeden Punkt der Kurve ein „begleitendes Dreibein“. Damit sind drei Vektoren gemeint: Der Tangentenvektor $\vec{a}$ (normiert auf 1), ein dazu senkrechter Vektor $\vec{b}$ (normiert auf 1), und ein Vektor $\vec{c}$, der zu den vorherigen beiden senkrecht ist (normiert auf 1). Achtung: Für $\vec{b}$ bestehen Freiheiten. Nütze sie aus!

(e) Bilde mit Hilfe der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ einen Kreis $\vec{\kappa}(\varphi) = \vec{b}\,\sin(\varphi) + \vec{c}\,\cos(\varphi)$ für jeden Punkt der Kurve (abhängig von u). So entsteht ein Schlauch. Berechne die Oberfläche des Schlauchs. (Diese Aufgabe könnte etwas Arbeit geben! Zum Üben ist das aber gut!)