Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 08 ◇

Ausbau Matrizenrechnung: Eigenwerte und Eigenvektoren

Probl. 1 Gegeben sind:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die inverse Matrix zu B.

(b) Berechne $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$.

(c) Berechne die Eigenwerte von A.

(d) Was fällt auf, wenn man die Eigenwerte von A mit denjenigen von D vergleicht?

(e) Berechne die Eigenvektoren von A.

(f) Was fällt auf, wenn man die Eigenvektoren von A mit denjenigen von B vergleicht?

Probl. 2 Gegeben seien:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne B^{-1}.

(b) Berechne $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$.

(c) Berechne das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ von A und auch dasjenige von D, welches wir mit $P_D(\lambda)$ bezeichnen. Vergleiche $P_A(\lambda)$ mit $P_D(\lambda)$. Was stellt man fest?

(d) Berechne die Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3 von A und auch diejenigen von D. Vergleiche die Ergebnisse. Was stellt man fest?
Stellt man denselben Sachverhalt, der bei den Eigenwerten gilt, auch für die Eigenvektoren von A und D fest?
Was ist bemerkenswert an den Eigenvektoren von D?

(e) Summiere die Eigenwerte von A. Mache dasselbe für die Eigenwerte von D. Vergleiche die Ergebnisse mit dem jeweis 2. Koeffizient des charakteristischen Polynoms (derjenige von λ^2). Was stellt man fest?

(f) Berechne die Determinante von A und auch diejenige von D. Vergleiche die Werte mit dem Wert des letzten, d.h. des konstanten Koeffizienten des charakteristischen Polynoms. Was stellt man fest?

(g) Multipliziere die Eigenwerte von A. Mache das gleiche mit den Eigenwerten von D. Vergleiche die Resultate mit der Determinante der jeweiligen Matrix. Was stellt man fest?

%

Probl. 3 Gegeben ist ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt $M(4,\,3)$ und dem Radius $r = 2$. Dazu sei $P_0(0,\,0)$ ein Punkt, den wir als Pol bezeichnen.

(a) Berechne die Polare p zu P_0 sowie deren Schnittpunkte mit k_1. Skizziere alsdann die Situation.

(b) Berechne die Tangenten von P_0 aus an k_1 und dazu die Tangentenschnittpunkte mit k_1. Trage die erhaltenen Punkte in die Skizze ein.

(c) Berechne eine Gleichung für die Gerade $g_1 = \overline{P_0M}$. Berechne damit die Schnittpunkte $g_1 \cap k_1$. Trage die erhaltenen Punkte in die Skizze ein.

(d) Berechne einen Punkt P_1, so dass k_1 der Apolloniuskreis zu $\overline{P_0P_1}$ ist. Trage den erhaltenen Punkt in die Skizze ein. Was fällt an diesem Punkt besonders auf?

(e) Gegeben ist ein zweiter Kreis mit dem Mittelpunkt P_0 und dem Radius $3\,r$. Suche zu k_1 und k_2 die Potenzgerade und skizziere die Situation. Was ist das Auffallende an der Lage der Potenzgeraden?

Probl. 4 Gegeben ist eine Gerade g durch die Punkte A und B. Weiter kennt man einen Punkt Q. Berechne mit Hilfe der Parametergleichung von g und dem Richtungsvektor den Abstand von Q zu g und den Lotfusspunkt L.

$$A = A(1;3;2),\;\; B = B(4;1;3),\;\; Q = Q(7;7;7)$$

Hinweis: Benutze die Normalenebene zu g durch Q.

Probl. 5 Gegeben ist eine Ebene Φ durch ihre Koordinatengleichung. Weiter kennt man einen Punkt Q. Berechne den Abstand von Q zu Φ und den Lotfusspunkt L.

$$\Phi:\;\; 2\,x - y + 3\,z - 1 = 0,\;\; Q = Q(7;7;7)$$