Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 12 ◇

Eigenwertprobleme: Anwendungen zur Matrixkomposition

Probl. 1 Gegeben sind die Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = (\vec{x}_1)_\perp = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind die Eigenvektoren einer Matrix A. Der zu $\vec{x}_1$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_1 = 2$, der zu $\vec{x}_2$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_2 = 1$. Dazu ist noch die Vektorfunktion $\vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ gegeben mit $t \in [0,\ 2\,\pi]$. Dazu kennt man die Vektorfunktion $\vec{v}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}\,t^2 \end{pmatrix}$, $t \in [-2,\ 2]$.

(a) Konstruiere die Matrix A.

(b) Erstelle mit Hilfe eines Computers oder Taschenrechners eine Skizze von $\vec{v}_1(t)$ und ebenso von $\vec{v}_2(t) = A \cdot \vec{v}_1(t)$. Was stellt man bezüglich der oben gegebenen Eigenvektoren und Eigenwerten fest?

(c) Dreht man die damit gegebene Kurve in positiver Drehrichtung um den Urprung um den Winkel, der durch die x–Achse und $\vec{x}_1$ gegeben ist, so erhält man eine Vektorfunktion $\vec{v}_4(t)$. Daraus wiederum gewinnt man eine Vektorfunktion $\vec{v}_5(t) = A \cdot \vec{v}_4(t)$. Skizziere $\vec{v}_3(t)$, $\vec{v}_4(t)$ und $\vec{v}_5(t)$.

Probl. 2 Nun verallgemeinern wir das oben gegebene Problem etwas. Sei $\vec{x}_1 = \vec{x}_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \vec{x}_2(\varphi) = (\vec{x}_1(\varphi))_\perp$. $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind die Eigenvektoren einer Matrix $A(\varphi, \lambda)$. Der zu $\vec{x}_1(\varphi)$ gehörige Eigenwert ist λ_1 (variabel), der zu $\vec{x}_2$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_2 = 1.5$. Dazu ist wiederum die Vektorfunktion $\vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ gegeben mit $t \in [0,\ 2\,\pi]$.

(a) Konstruiere die Matrix $A(\varphi, \lambda) = A(\varphi, \lambda_1)$.

(b) Berechne $\vec{v}_2(t, \varphi, \lambda_1) = A(\varphi, \lambda_1) \cdot \vec{v}_1(t)$ und erstelle die Plots von $\vec{v}_2(t, \varphi, \lambda_1)$ für $\lambda_1 = 1 + \sqrt{\varphi}$, $\varphi \in \{\frac{2\,\pi}{9}, 2\,\frac{2\,\pi}{9}, 3\,\frac{2\,\pi}{9}, \ldots, 9\,\frac{2\,\pi}{9} = 2\,\pi\}$. Wenn man diese Kurven alle im selben Plot darstellt, so kann man feststellen, dass die Kurvenschar eine Kurve anderer Art einhüllt. Welche Kurve wird hier eingehüllt? (Das Resultat ist einfach ablesbar.)