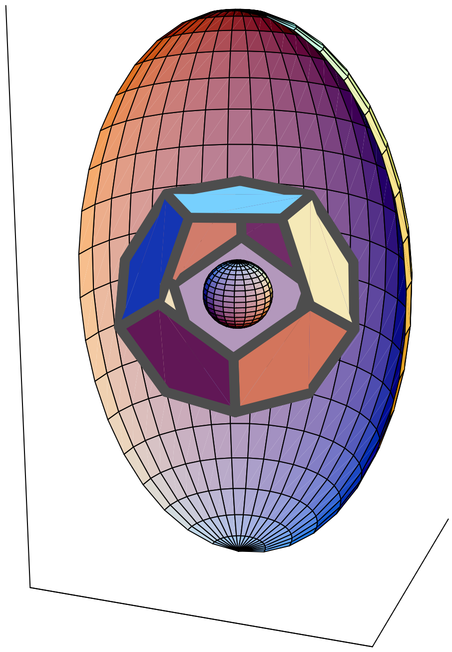
Aufgaben ◇ Modulprüfungen ◇ Vordiplome
◇ Elektro + Maschinenbau ◇
◇ Analysis ◇



von

Rolf Wirz

Alt-Ingenieurschule Biel — HTA-Biel — BFH/Dep. TI/ AHB

Ausgabe vom 2. Dezember 2007, Version 1.0.0 / d

WIR1 /2007/LaTex/UemAna2_16.tex

Vordiplomaufgaben und Modulprüfungsaufgaben aus den Jahren 1999 – 2006 aus diversen Abteilungen (Fachbereichen)
Produziert mit PCTeX unter Win XP.
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

Bei einer Prüfüungsvorbereitung ist Ausgeglichenheit ist angesagt. Wer nicht ausgeglichen ist, neigt stark auf eine Seite. Er kann daher kippen und darauf stürzen. Dann ist die Prüfung schon vor der Prüfung vorbei. Der Aufwand hat sich nicht gelohnt. Das kannst du vermeiden, indem du dir dein Zentrum bewusst machst, um das du die Schranken deiner Ausgeglichenheit definieren sollst. . .

PhW

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

©2007
Die Urheberrechte für das verwendete graphische Material gehören dem Autor.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel • Chapitre 1

Prüfungsvorbereitung

Übungen in Analysis: Prüfungsvorbereitung ◇ E+M 2 16 ◇

Die folgenden Aufgaben entstammen ehemaligen Modulprüfungen oder Vordiplomen.

1.1 19 Aufgaben mit Lösungen (Lösungen: separate Datei)

Probl. A (1) **(15 Punkte)**

Gegeben ist $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}\, e^{(\frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{2})}$, $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Diese Funktion f kann man auch als Funktion $h(r,\varphi)$ auffassen. Es gilt dann $h(r,\varphi) = \sqrt{r^2}\, e^{(\frac{-\sqrt{r^2}}{2})}$, $\sqrt{r^2} = |r|$. Daher können wir die Funktionsfläche (Graph) in $\mathbb{R}^2$ auch als Rotationsfläche verstehen.

(a) Skizziere den Graphen für $x, y \in [-2, 2]$ oder $r \in [0, 2]$. (Wenn r statt x, y benutzt wird, zeigt der Graph eine Rotationsfläche. Dann werden die Ecken abgeschnitten, was hier nichts ausmacht.)

(b) Untersuche die Frage, was bei $x = y = r = 0$ für eine Situation passiert: Hat man eine Spitze oder hat man eine gewöhnliche Tangente in Richtung x sowie y (oder alternativ in Richtung r)? (Bestimme zur Beantwortung der Frage die Ableitungen und davon den Grenzwert für x, y resp. $r \to 0$.)

(c) Bestimme die maximale Höhe der Fläche für $r \in [0, 2]$.

(d) Bestimme den Gradienten der Funktion für $x = y = 1$.

(e) Bestimme approximativ den Flächeninhalt über der Region $[1 \le x \le 2] \times [1 \le y \le 2]$.

Probl. A (2) **(12 Punkte)**

(a) Berechne von Hand die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2\,y(x) + y''(x) = \cos(x)$$

und erläutere dabei die Lösungsmethode.

(b) Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2\,y(x) - y'(x) + y''(x) = \cos(x).$$

(c) Berechne die spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$2\,y(x) - y'(x) + y''(x) = \cos(x)$$

mit den Randbedingungen $y(0) = 0,\;\; y'(0) = 0$.

(d) Skizziere die eben gefundene spezielle Lösung für $x \in [0, 12]$.

(e) Berechne approximativ den Funktionswert der gefundenen speziellen Lösung bei $x \approx 2.75558$.

Probl. A (3) **(12 Punkte)**

(a) Bestimme die Potenzreihenentwicklungen $p_s(x)$ von $\sin(x)$ und $p_c(x)$ von $\cos(x)$ bis und mit zu den Gliedern der Ordnung 10 (Polynome vom Grad ≤ 10). *Das Zentrum der Entwicklung für alle Teilaufgaben ist $x_0 = 0$.*

(b) Bestimme graphisch approximativ das Intervall auf der x–Achse mit Zentrum 0, in dem $|p_s(x) - \sin(x)| \leq 0.01$ gilt.

(c) Differenziere $p_s(x)$ nach x. Wie weicht das Resultat von $p_c(x)$ ab und wieso?

(d) Bestimme mit Hilfe von $p_s(x)$ und $p_c(x)$ die Potenzreihenentwicklung $p_{s+c}(x)$ von $\sin(x) + \cos(x)$ bis und mit zu Gliedern der Ordnung 10. Bestimme ebenfalls die Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ bis und mit zu Gliedern der Ordnung 10. Vergleiche das Resultat mit $p_{s+c}(x)$. Was kann man daraus ersehen?

(e) In der Nähe von $x = 0$ ist $\frac{p_s(x)}{x}$ eine Näherungsformel für $\frac{\sin(x)}{x}$. Skizziere die beiden Funktionen in einem Diagramm mit dem Ausschnitt $x \in [-1, 1]$ und $y \in [0, 1]$. Kann man die beiden Kurven im Diagramm unterscheiden?

(f) Ermittle aus den Resultaten eine Näherungsformel für eine Stammfunktion von $\frac{\sin(x)}{x}$, welche für $x \in [-1, 1]$ anwendbar sein soll.

Probl. A (4) Die folgenden beiden elementaren Aufgaben sind unabhängig. **(Je 6 Punkte)**

(a) Ein Brückenbogen hat die schöne Form einer Sinuslinie $f(x) = sin(x), \;\; x \in [0, \pi]$. Berechne den Flächeninhalt des grössten Trapezes, das man zwischen diese Sinuslinie und die x–Achse einpassen kann und ebenso den Inhalt der Fläche zwischen Trapez und Sinuslinie.

(b) Ein Feuerwehrmagazin hat eine Höhe von 10 m. Darin werden die Schläuche zum Trocknen aufgehängt. Der Grundriss ist $4 \times 4 \; m^2$. Die Eingangstür vorne hat eine Höhe von 2.50 m. Nun will man eine Leiter maximaler Länge bestellen, welche von vorne gerade noch zur Tür hinein geschoben und hochgestellt werden kann. Wie lang darf diese Leiter höchstens sein? (Der Weg von vorne verläuft rechtwinklig zur Wand mit der Tür und ist gerade genügend breit, sodass die Leiter bequem transportiert werden kann.)

Probl. A (5) **(18 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

(a) $f(x) = x^2 + 0.5\,\sin(x)$
  - i. $f'(x) = \,?$
  - ii. $f'(x)|_{x=1} = \,?$
  - iii. $f'(x)|_{x=1} =$ Steigung der Kurve $\Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha = \,?$
  - iv. $f''(x)|_{x=1} = \,?$

(b) $f(x) = \left(\sqrt[4]{\left(x^{3/4} - 3\right)^3} \right)^5 \rightsquigarrow \;\; f'(x) = \,?$

(c) $f(x) = -4\,x^2 \sin\left(2 - 3\,x^2\right) \rightsquigarrow \;\; f'(x) = \,?$

(d) $f(x) = \dfrac{x\;ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1-x} \rightsquigarrow \;\; f'(x) = \,?$

(e) $f(x) = 4\,e^{-x}\cos\left(2 - e^x\right) \rightsquigarrow \;\; f'(x) = \,?$

(f) $f(x) = x^2 + a\,\sin(x) + \dfrac{2}{x} \rightsquigarrow \;\; \int\limits_1^{e^2} f(x)\,dx = \,?$

Probl. A (6) **(12 Punkte)**

Gegeben sind zwei Kurve durch $f_1(x) = x^5$ und $f_2(x) = x^{1/5}$ über dem Intervall $I = [0, 1]$. f_1 und f_2 schliessen über I eine Fläche A_0 ein. Die damit gegebene Figur sei ebenfalls mit A_0 bezeichnet.

(a) Skizziere die Figur A_0.

(b) Zwischen die beiden gegebenen Kurven f_1 und f_2 wird nun eine dritte Kurve $f_3(x) = x^a$ gelegt mit $a > 0$.
Bestimme a so, dass f_3 die Figur A_0 in zwei inhaltsgleiche Teilfiguren A_1 (oben) und A_2 (unten) zerlegt. (Zeichne darauf f_3 in der Skizze ein.)

(c) Wie in der letzten Teilaufgabe wird nun zwischen die beiden gegebenen Kurven f_1 und f_2 eine weitere Kurve $f_4(x) = x^a$ gelegt mit $a > 0$.
Bestimme diesmal a so, dass f_4 die Figur A_0 in zwei Teilfiguren A_3 (oben) und A_4 (unten) zerlegt, deren Flächeninhalte sich wie $\frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$ verhalten (goldener Schnitt). (Zeichne darauf f_4 ebenfalls in die Skizze ein.)

Probl. A (7) **(15 Punkte)**

Gegeben sind zwei Funktionen $f(x) = e^{-x}\left(x^2 - 1\right)$ und $p(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Bestimme die Parameter a, b, c von p so, dass $p(x)$ dieselben Nullestellen hat wie $f(x)$. Zudem soll $p(x)$ für $x = -1$ die gleiche Tangentensteigung haben wie $f(x)$. (Skizziere jetzt die beiden Kurven!)

(b) Bestimme das Verhältnis der beiden Flächeninhalte A_f und A_p zwischen der x–Achse und den Kurven $f(x)$ bzw. $p(x)$ bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$.

(c) Anhand der Skizze könnte man glauben, dass die Kurve $f(x)$ für $x = 0$ einen Wendepunkt hat. Untersuche, ob diese Vermutung stimmt. (Das Resultat ist zu belegen.)

(d) Die Parabel $p(x)$ wird um die x–Achse rotiert. Berechne das Rotationsvolumen bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$.

(e) Berechne numerisch anngenähert die Bogenlängen von f und p bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$. Was ist das Verhältnis der grösseren zur kleineren Länge?

Probl. A (8) **(15 Punkte)**

Die Funktion $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + dx + e}$ soll als Näherungsmodell der geometrischen Form eines Hügels dienen. Die Hügelkurve soll nun so in ein Koordinatensystem eingepasst werden, dass bei $x = -2$ und bei $x = 2$ je eine Nullstelle liegt und die Kurve dazu bei $x = 0$ ein Maximum besitzt. Bei $x = -1$ gibt es ferner eine Tangente mit der Steigung 1. Bei $x = 1$ hat die Tangente die Steigung -1. Zudem ist $f(0) = 2$.

(a) Berechne die Parameter a, b, c, d, e.
Hinweis: Man kann die Rechnung enorm vereinfachen, wenn man berücksichtigt, dass die gegebenen Werte auf eine gerade Funktion führen müssen und daher gewisse Parameter 0 sein müssen!
Skizziere die Kurve!

(b) Berechne jetzt die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$.

(c) Stelle die Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe mit dem Mittelpunkt $x = 0$ dar.
Hinweis: Wenn man die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$ betrachtet, so kann man darin als wesentlicher Teil eine geometrische Reihe entdecken.

(d) Berechne mit Hilfe des Hinweises in der letzten Teilaufgabe den Konvergenzradius der gewonnenen Potenzreihe.

(e) Verwende als Näherung nur das Taylorpolynom vom Grade 4. Was sind dann die gemachten Fehler an der Stelle $x = 0.5$ und $x = 0.9$?

Probl. A (9) **(8 Punkte)**

Zusatz: (Falls eine der regulären Aufgaben nicht gelöst werden kann.)

(a) Suche die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \arctan(x)$ mit $x_0 = 0$. Verwende nur die Glieder bis $n = 10$. Ausgehend von der Tatsache, dass $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1, \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ ist, kann man mit dem gewonnenen Taylorpolynom die Zahl π annähern. Berechne diese Näherung und entscheide, wieviele Stellen mit den Taschenrechner so exakt berechnet werden können.

(b) (Wird hier weggelassen. Obige Aufgabe „Ein Feuerwehrmagazin hat eine Höhe von 10 m…“ ist ähnlich.)

Probl. A (10) **(12 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

(a) $f(x) = -2\,\dfrac{6\,x^3 + 5\,x^2 - 6\,x^1 + x^0}{-x^2 + 2x + 1}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=0} = \,?$

iii. $f'(x)|_{x=0} =$ Steigung der Kurve $\Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha = \,?$

iv. Etwaige reelle Lösungen: $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \,?$

(b) $f(x) = (\sin(x)\,e^x - \cos(e^{-x})) - \dfrac{x^3}{x+1}$

i. $f'(x)|_{x=1.0} = \,?$

ii. $f''(x) = \,?$

iii. $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = \,?$

Probl. A (11) **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Kurve von $f(t) = -2\,e^{-t^2} + 1$ und im 4. Quadranten auf dieser Kurve ein Punkt $P = (x; y)$, d.h. $t = x$, $f(t) = y$. Wie gross muss x sein, damit das durch $(x; y)$, $(0; 0)$, $(-x; f(-x))$ gegebene Dreieck maximalen Inhalt $A(x)$ hat? (Der Inhalt wird als positiv erklärt.)

(a) Skizziere $A(x)$.

(b) Berechne $A'(x)$ und verwende den Newton-Algorithmus um den Punkt $P = (x; y)$ im 4. Quadranten zu finden, für den $A(x)$ maximal wird (Frage mit der nächsten Frage verbunden!).

(c) Man starte den Newton-Algorithmus mit $x_1 = 0,5$. Nach wievielen Schritten ändert sich der Wert an der 3. Stelle hinter dem Dezimalpunkt nicht mehr?

Probl. A (12) **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionskurven von $f_1(x) = a\,(x+3)(x+2)(x-4)$ sowie $f_2(x) = b+x^2$. An der Stelle $x = -2$ sollen die beiden Kurven einen gemeinsamen Punkt S_1 sowie auch eine gemeinsame Tangente haben. (Mache eine Skizze.)

(a) Berechne a und b.

(b) Berechne einen zweiten Schnittpunkt S_2 der beiden Kurven ($|x_2| \to min.$).

(c) Durch den Wendepunkt W von f_1 sowie durch S_1 und S_2 wird eine Polynomkurve $f_3(x)$ gelegt, sodass die Tangenten von f_2 und f_3 in S_2 übereinstimmen. Berechne die Steigung von f_3 in S_2. ($pgrad \to min.$)

Probl. A (13) **(12 Punkte)**

Gegeben sind 5 Punkte in einem Koordinatensystem:

$$P_1 = (3; -6), P_2 = (-3; -6), P_3 = (-3; 5), P_4 = (0; 6), P_5 = (3; 4)$$

Durch die Punkte soll ein nicht degenerierter Kegelschnitt gelegt werden (Ellipse, Parabel oder Hyperbel). Für die Kegelschnittgleichung soll folgender Ansatz gemacht werden:

$$f(x, y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0, \;\; f = 1$$

(a) Berechne die Parameter a, b, c, d, e und setze diese in $f(x, y)$ ein.

(b) Berechne aus $f(x, y) = 0$ die Funktionen $y_k(x)$ (vermutlich zwei Möglichkeiten $k = 1$ und $k = 2$).

(c) Skizziere die Kurven $y_k(x)$.

(d) Berechne im Falle einer Ellipse $u = x_{max}$, im Falle der Hyperbel $u = x_{min}$ des höher liegenden Hyperbelasts.

(e) Entscheide exakt, ob $u > -0.5$ richtig ist!

Probl. A (14) **(12 Punkte)**

Zusatz:

(a) $a_n = n^4, \;\; n \in \mathbb{N}$

i. $\Rightarrow \; b_n = a_{n+1} - a_n = ?$

ii. $c_n = b_{n+1} - b_n = ?$

iii. $c_{9'000} = ?$

(b) In Nasewo–Schilda steht ein 105 Meter hoher Turm mit einem quadratischen Grundriss von 8 mal 8 Metern. Auf einer Seite ist ein Eingang angebracht, welcher so breit wie der Turm, aber nur 4 Meter hoch ist. Vor dem Turm ist der Marktplatz. Dieser verläuft exakt horizontal, fast 250 Meter weit in alle Richtungen. Im Turm soll nun an der hintern Wand der grösste ebene Spiegel der Welt aufgestellt werden, so breit wie die Wand wohlverstanden. Wie hoch kann dieser Spiegel maximal sein, wenn er durch den Eingang geschoben werden muss und rechteckig sein soll?

Probl. A (15) **(12 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

(a) $f(x) = 6\,x^3 + 5\,x^2 - 6\,x^1 + x^0 - \dfrac{2}{x^2}$

i. $f'(x) = ?$

ii. $f'(x)|_{x=1} = ?$

iii. $f'(x)|_{x=1} = $ *Steigung der Kurve* $\Rightarrow$ *Steigungswinkel* $\alpha = ?$

iv. $\alpha = \dfrac{\pi}{6} \;\; \Rightarrow \;\; x \approx ?$

v. $f''(x) = ?$

(b) $f(x) = (e^x + \cos(x))^x + \dfrac{((\sin(\frac{x}{3} - 3))^2)}{(ln(x) - x^2)}$

i. $f'(x) = ?$

ii. $f'(x)|_{x=1.0} = ?$

Probl. A (16) **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ in einem Koordinatensystem mit folgenden Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ (0;0) & (1;1) & (2;0) & (3;1) & (4;-1) & (6;0) & (7;3) \end{pmatrix}$$

P_1, P_2, P_3 sind durch eine Polynomkurve 3. Grades $f_1(x)$ verbunden. Ebenso P_3, P_4, P_5 durch $f_2(x)$ und P_5, P_6, P_7 durch $f_3(x)$. In den Punkten P_3 und P_5 stimmen die Tangenten der benachbarten Kurven überein. In P_1 ist die Tangentensteigung der Kurve gleich 0.

(a) Berechne die drei Polynomkurven $f_1(x), f_2(x)$ und $f_3(x)$.
($f_1(x) = a_1\,x^3 + b_1\,x^2 + c_1\,x + d_1 = ?$ u.s.w..)

(b) Berechne die Steigungen in P_3, P_5 und P_7.

Probl. A (17) **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktionskurve C von $f(x) = e^x$. Durch die Punkte $Q_1(-1; f(-1))$ und $Q_2(1; f(1))$ wird die Sehne s gezogen. Diese Sehne wird soweit parallel nach unten veschoben, bis sie zur Tangente t wird. (Mache eine Skizze.)

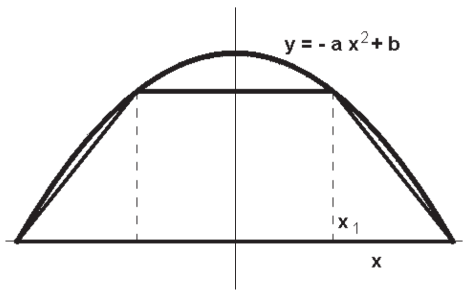
(a) Berechne den Berührungspunkt $T(x_0; t(x_0))$ von t an C $(t(x_0) = f(x_0))$.

(b) Berechne den Schnittpunkt A von t mit der x–Achse.

(c) Sei n die Normale zu t in T. Berechne den Schnittpunkt B von n mit der x–Achse.

(d) Berechne den Inhalt des Dreiecks $\triangle ABT$.

Probl. A (18) **(12 Punkte)**



In Ixtown steht eine Stadtbahnbrücke mit parabelförmigen Brückenbögen. Unter einem solchen Parabelbogen soll eine trapezförmige Halle für die Computergrufti–Messe gebaut werden. Die Wänden und Decke der Halle sind ebene Flächen. Stirnseitig ist die Halle vertikal bündig zur Brücke und verglast. (Vgl. nebenstehende Skizze). Für die Parabel nehmen wir folgende Funktion an:

$$y = f(x) = -a\, x^2 + b$$

Die gemessenen Werte für a und b sind aus der Bogenhöhe 20 $Meter$ und der Bogenbreite auf Bodenniveau 40 $Meter$ zu bestimmen.

(a) $a,\ b\ = ?$

(b) Berechne die x–Koordinate x_1 des rechten oberen Punktes des Trapezes, so dass die einfallende Lichtmenge maximal ist ($\rightsquigarrow$ grösstmöglicher Stirnflächeninhalt, $\rightsquigarrow$ $x_1 = ?$ Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(c) Berechne näherungsweise das ungenutzte Restvolumen zwischen Brücke und Halle im Bogen, in dem die Halle steht. (Die Brückenbreite s ist gleich 20 $Meter$.)

Probl. A (19) **(12 Punkte)**

Zusatz:

(a) $a_1 = 1,\ \ a_2 = -1,\ \ a_3 = 2,\ \ a_4 = 12,\ \ a_n = \alpha\, n^3 + \beta\, n^2 + \gamma\, n + \delta$

i. $a_5 = \,?$

ii. $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \,?$

iii. $s_{100} \approx \,?$

iv. $\dfrac{s_{1000}}{s_{999}} \approx \,?$

(b) $b_1 = 1,\ \ a_n = (n+1)(b_{n-1} - 1) \rightsquigarrow\ \ b_{50} \approx \,?$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^2 - e}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}} \cdot \dfrac{\cos(n^2) + n^2 - 2\,n + 2}{3\,n^3 + 4\,n^2 + 2\,n - 1} \cdot (n+1) = \,?$

1.2 27 Aufgaben ohne Lösungen

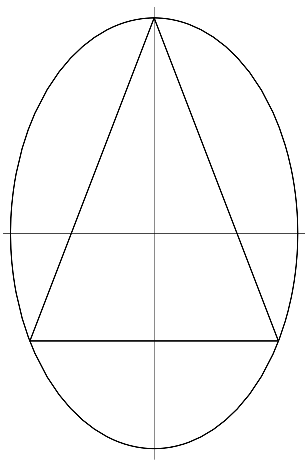
Probl. B (1) **(12 Punkte)**

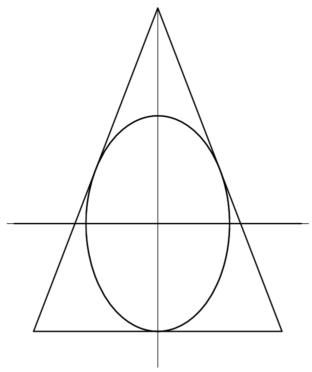
Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $s = 12$ und der Höhe $h = 18$.

(a) Um dieses Dreieck soll zuerst eine Ellipse mit den Halbachsen a und b so gelegt werden, dass die Basis des Dreiecks parallel zur kleineren Achse zu liegen kommt. a und b sollen so gewählt werden, dass der Flächeninhalt A_1 der Ellipse minimal wird. Berechnen Sie dieses A_1.

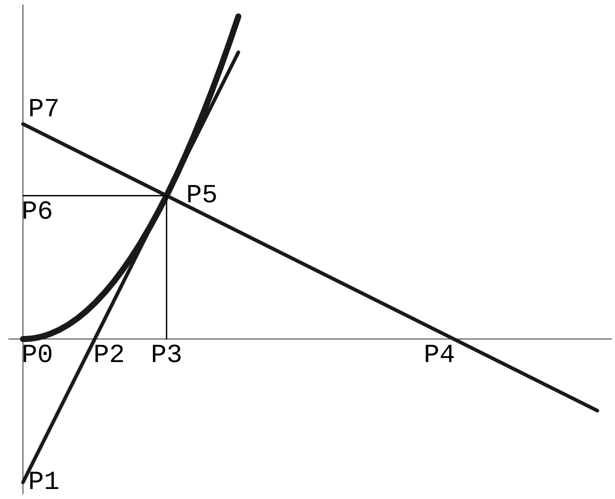
(b) Anschliessend soll in das Dreieck eine Ellipse mit den Halbachsen c und d so eingeschrieben werden, dass wieder die Basis parallel zur kleineren Achse ist und dass der Flächeninhalt A_2 maximal wird. Berechnen Sie A_2.

(c) Wie gross ist $A_1 : A_2$?





Probl. B (2)



Die Skizze zeigt eine Funktion $f(x) = a\,x^n,\ \ n \in \mathbb{N},\ \ x \geq 0$. In $P_5(x_0, y = a\,x_0^n)$ sind die Tangente und die Normale gegeben. Die damit entstehenden Punkte $P_0 \ldots P_7$ definieren Dreiecksflächen resp. Flächen, deren eine Begrenzungslinie der „Parabelbogen“ ist.
Die Flächen werden wie folgt benannt (mache eine Skizze!):
$(P_0P_5P_6P_0) \rightsquigarrow A_1$, $(P_0P_3P_5P_0) \rightsquigarrow A_2$, $(P_0P_1P_2P_0) \rightsquigarrow A_3$,
$(P_2P_3P_5P_2) \rightsquigarrow A_4$, $(P_6P_5P_7P_6) \rightsquigarrow A_5$, $(P_3P_4P_5P_3) \rightsquigarrow A_6$.

Berechnen Sie die folgenden Verhältnisse der Flächeninhalte. Untersuchen Sie wie n gewählt werden muss, damit das jeweilige Verhältnis unabhängig ist von x_0. Untersuchen Sie auch den Einfluss von a.

(a) $A_1 : A_2$

(b) $A_4 : A_2$

(c) $A_4 : A_3$

(d) $A_4 : A_5$

(e) $A_4 : A_6$

(f) $(A_4 \cdot A_4) : (A_5 \cdot A_6)$

Probl. B (3) **(12 Punkte)**

Zur Funktion $p(x) = -x + 1$ suchen wir über dem Intervall $[0, 1]$ eine andere Funktion $f(x) = \cos(\omega\,x) + h$ derart, dass $\int\limits_0^1 (f(x) - p(x))^2\,dx$ minimal ist und $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt.

(a) Berechnen Sie das Integral von Hand

(b) Berechnen Sie h und ω. (Eine numerische Näherung genügt.)

(c) Skizzieren Sie die Graphen von $p(x)$ und der gefundenen Funktion $f(x)$ im selben Diagramm.

Probl. B (4) **(12 Punkte)**

Ein ebener Kreiszylinder mit dem Radius $R = 4$ ist derart in ein Koordinatensystem einer „Lehren–Bohrmaschine“ gestellt, dass die z–Achse die Zylinderachse ist. Die ebene Grundfläche befindet sich auf der Höhe $z = -5$ und die ebene Deckfläche auf der Höhe $z = 5$.
Der in der Bohrmaschine eingespannte Bohrer hat einen Durchmesser von $d = 2$. Seine Achse ist parallel zur y–Achse und hat von der Zylinderachse einen senkrechten Abstand von $a = 2$. (Aus der Situation folgt, dass dieser Abstand a exakt in x–Richtung gemessen ist.) Es gilt $z = 2$.

(a) Machen Sie sich eine räumliche Skizze von der Situation.

(b) Berechnen Sie approximativ das Volumen des entstehenden Abfalls beim Ausbohren des Loches. Wieviel Prozent des ursprünglichen Volumens wird Abfall?

Probl. B (5) **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = z := x^4 + y^2$. Durch $|grad(f)| = 1$ wird in der Grundebene eine Kurve C definiert.

(a) Berechnen Sie die Kurve C als Vektorfunktion und skizzieren Sie C. Skizzieren Sie auch $z = f(x, y)$ resp. $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y) \ \wedge \ (x, y) \in C\}$ für $x \geq 0, \ y \geq 0$.

(b) Bestimmen Sie C für $x \geq 0, \ y \geq 0$ als Funktion $y = h(x)$ und ermitteln Sie dort den Definitionsbereich von h.

(c) Berechne Sie die Extremalstellen von $z = f(x, y)$ für $(x, y) \in C$ resp. $y = h(x)$ mit Hilfe der Methode von Lagrange.

Probl. B (6) **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen $g(z) = \dfrac{1}{a+z}$ und $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. Um $f(x)$ rasch von Hand in eine Potenzreihe zu entwickeln und dabei die infolge der Quotientenregel anfallenden grossen Ausdrücke für die Koeffizienten zu vermeiden, gehen wir wie folgt vor:
Entwickelt man $g(z)$ sowie e^x in eine Potenzreihe, so findet man:

$$g(z) = \frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} - \frac{z^3}{a^4} + \frac{z^4}{a^5} - \frac{z^5}{a^6} + \frac{z^6}{a^7} - \frac{z^7}{a^8} + \frac{z^8}{a^9} - \frac{z^9}{a^{10}} + \frac{z^{10}}{a^{11}} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{3628800} + \ldots$$

Setzt man nun $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{x}{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \ldots) - 1} = \dfrac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \ldots} = \dfrac{1}{1+z}$,

so ist $a = 1$ und $z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \ldots$

(a) Berechnen Sie *von Hand* die ersten vier Koeffizienten B_k in der Potenzreihenentwicklung von
$f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \ldots} := B_0 + \dfrac{B_1}{1!}\,x + \dfrac{B_2}{2!}\,x^2 + \ldots$
der Reihe nach aus der Gleichung
$$1 = (1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \ldots) \cdot (B_0 + \frac{B_1}{1!}\,x + \frac{B_2}{2!}\,x^2 + \ldots).$$
Bemerkung: Die Zahlen B_k heissen **Bernoullische Zahlen.**

(b) Berechnen Sie damit eine Näherungsformel für $\int\limits_0^{x^n} \dfrac{t}{e^t - 1}\,dt, \qquad (x^n \leq 1).$

(c) Berechnen Sie den Konvergenzradius von $g(z)$ sowie von e^x. Was lässt sich daraus für den Konvergenzradius von $f(x)$ folgern?
Hinweis: $g(z)$ hat mit einer geometrischen Reihe zu tun!

Probl. B (7) **(12 Punkte)**

Ein vollkommen biegsamer, schwerer und an zwei Punkten aufgehängter Faden, der sich im Gleichgewicht befindet, nimmt die Form einer Kettenlinie an, welche durch die Funktion $f(x) = a\,\cosh(\dfrac{x}{a})$ beschrieben wird. Sei $P(x) := (x, f(x))$ und $a = 2$.

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-1, 1]$.

(b) Berechnen Sie den Krümmungsradius der Kurve für $x = 0$ und für $x = 1$.

(c) Berechnen Sie den Krümmungsmittelpunkt M für $x = 1$. Zeichnen Sie M in den Graphen ein. (M liegt auf der Normalen n zur Tangente t. Die Normale schneidet die x–Achse in S)

(d) Berechnen Sie für $x = 1$ die Streckenlängen $|\overline{MP}|$ und $|\overline{PS}|$. Ist zum Resultat etwas zu bemerken?

Probl. B (8) **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto 5\,(x^2 - 2\,x - 15)$ und $g: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$. Die Graphen beider Funktionen schneiden einander in zwei Punkten auf der x–Achse. Im rechten Schnittpunkt fallen ausserdem die Tangenten an die beiden Kurven zusammen.

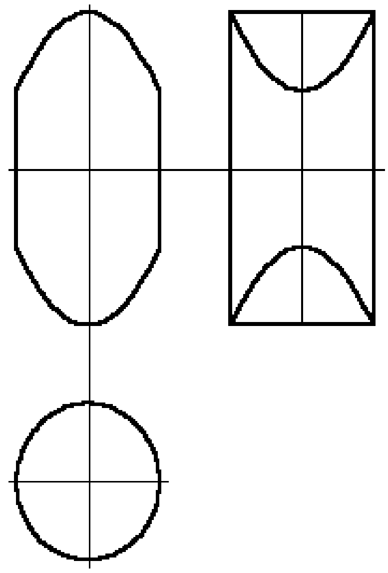
(a) Berechne a, b und c exakt. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

(b) Zeichne die Graphen der beiden Kurven im Intervall $[-4, 6]$.

(c) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den beiden Kurven eingeschlossen wird.

Probl. B (9) **(12 Punkte)**

Ein rotationssymmetrischer Schwimmkörper, der ausser an den beiden Deckflächen die Form eines Zylinders hat, ist derart in ein Koordinatensystem gestellt, dass die z–Achse gleich der Rotationsachse ist. Der Zylinderradius ist gleich 5 und die beiden Deckflächen des Körpers werden durch die Funktion $z = f_d(x, y) = -x^2 + 50$ und $z = f_g(x, y) = -f_d(x, y)$ gegeben. (Vgl. Skizze mit Grundriss, Aufriss und Seitenriss.)



(a) Berechne das Volumen des Körpers exakt. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

(b) Berechne die Oberfläche des Körpers. (Wenn eine exakte Berechnung nicht möglich ist, genügt auch eine numerische Näherung. Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

Zusatzaufgabe (kann weggelassen werden): **(6 Punkte)**

(c) Der Körper wird axial zur x–Achse zylindrisch durchbohrt. Es entsteht ein Loch mit dem Durchmesser 5. Berechne das Restvolumen des Körpers. (Wenn eine exakte Berechnung nicht möglich ist, genügt auch eine numerische Näherung. Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

Probl. B (10) **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen $f(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $g(x) = 2 - f(x)$.

(a) Skizziere $f(x)$ und $g(x)$ und bezeichne $f(x)$ mit dem sonst üblichen Namen.

(b) Die Funktion $g(x)$ soll im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ durch $u(x) = a \cdot \cos(x) + b$ approximiert werden. Bestimme die Parameter a und b so, dass $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - u(x))^2\, dx$ minimal wird.
(Der Lösungsweg muss dokumentiert sein. Numerische Werte genügen.)

(c) $u(0) = ?$, $u(-\dfrac{\pi}{2}) = ?$, $u(\dfrac{\pi}{2}) = ?$

Probl. B (11) **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktione $f(x)$, die einen Kreisbogen mit Radius $r = 1$ sowie Kreismittelpunkt $(x_M/y_M) = (0/1)$ beschreibt und durch den Punkt $P(0/2)$ geht. Weiter ist die Funktion $g(x) = k \cdot \cos(\alpha\, x + \beta) + c$ gegeben. k, α, β und c sind Parameter.

Die Parameter k, α, β und c sind so zu bestimmen, dass die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in P möglichst gut zueinander passen. Damit ist gemeint, dass die folgenden Kriterien erfüllt sein müssen: Die Graphen von f und g fallen im Punkte P zusammen, haben in P eine gemeinsame Tangente und auch dieselbe Krümmung.

Durch diese drei Bedingungen kann man drei Parameter als Funktion des vierten Parameters bestimmen.

(a) Bestimme k, β und c als Funktion von α. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

(b) Bestimme anschliessend die Potenzreihenentwicklungen von f und von $g = g_\alpha$. (Die Reihen können mit Hilfe von Tabellenbüchern gefunden werden. Die Angabe von Gliedern bis zur Ordnung 10 genügen.)

(c) Entscheide anhand der nun vorliegenden Potenzreihenentwicklung von $g_\alpha(x) - f(x)$, was mit $|g_\alpha(x) - f(x)|$ passiert, wenn α gegen 0 strebt.

(d) Berechne damit $\lim\limits_{\alpha \to 0} g_\alpha(x)$ und skizziere in diesem Falle f und g_α.

(e) Beschreibe den Einfluss von α auf das Annäherungsverhalten von $g_\alpha(x)$ an $f(x)$

Probl. B (12) **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = 3\,x^2 - 5\,x\,y + 4\,y^2 - y + x - 1$ im Gebiet G, $G = I \times I = [-1,1] \times [-1,1]$.

(a) Berechne die Extrema oder Sattelpunkte im Innern und auf dem Rand.

(b) Durch den Rand ∂G von G lassen sich vier Geraden legen. Untersuche, in welchen Punkten P_i auf diesen vier Geraden die maximale Richtungsableitung lokale Extrema hat. (Untersuche dazu die Länge des Gradienten.) Entscheide, ob die gefundenen Extrema Minima oder Maxima sind.

(c) Skizziere G mit den berechneten Extrema von f. Zeichne ebenfalls die berechneten Punkte P_i ein. Verbinde je zwei sich entsprechende Punkte auf gegenüberliegenden Geraden und kontrolliere, ob sich die Verbindungsgeraden in einem ausgezeichneten Punkt kreuzen. Was stellt man fest? Ist etwas bemerkenswert?

(d) Bestimme, in welchen Punkten der Geraden $y = -\dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1}{4}$ in der Grundebene $f(x,y)$ extremal wird. (Die Punkte auf dem Rand sind auch in die Betrachtung einzubeziehen.)

Probl. B (13) **(12 Punkte)**

Ein in der Tropenzone geplantes Stadion hat nach dem Vorbild einer römischen Arena die Form eines Zylinders mit einem Durchmesser von 250 Metern und einer Mantelhöhe von 25 Metern. Um die heutzutage gefürchtete UV–Strahlung abzuhalten wird vorgeschlagen, das Bauwerk zeltartig mit Hilfe eines bis zum Boden reichenden Rotationsparaboloides zu überdachen, wobei dieses geplante Zelt den oberen Zylinderrand berührt. (Skizziere die Situation!)

(a) Berechne den Zeltradius und die Zelthöhe, wenn der umbaute Raum minimal werden soll.

(b) Berechne im Falle des minimalen Volumens die Mantellänge vom Boden bis zum obersten Punkt des Zeltes numerisch.

(c) Berechne den Zeltradius und die Zelthöhe, wenn die Zeltoberfläche minimal werden soll. (Falls diese Aufgabe auf den ersten Blick zu schwierig erscheinen mag, so versuche man zuerst, die Oberfläche des einfachst möglichen Rotationsparaboloids zu berechnen. Für die Integration können Hilfsmittel wie Tabellen etc. verwendet werden.)

Probl. B (14) **(12 Punkte)**

(a) Berechnen Sie von $f(x,y) = x^4 - 2\,x^2 + (2\,x^2 - 1)\,y^2$ die Extrema unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Sei $G = [-1,1] \times [-1,1]$. Zu $f(x)$ wird eine Konstante c addiert, so dass das Integral $\int\limits_G f(x,y)\,dG = 0$ wird. Wie gross muss c gewählt werden?

Hinweis: Für $y > 0$ kann z.B. y^2 geeignet substituiert werden. (Es gibt mehr als eine Möglichkeit ...)

Probl. B (15) **(12 Punkte)**

Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $P_1(2/3)$, $P_2(7,2)$ und $P_3(5/6)$. Im Innern befindet sich ein Punkt $P(x,y)$, der zu P_i einen Abstand d_i hat $(i = 1,2,3)$.

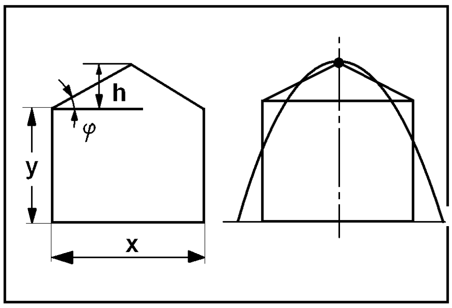
(a) Berechne $P(x,y)$ so, dass die Summe der Abstandquadrate $\sum\limits_{i=1}^{3} d_i^2$ minimal wird.

(b) Entscheide mit Begründung, ob es sich bei P um einen der folgenden Punkte handelt: Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt oder Inkreismittelpunkt.

(c) Begründe den vorhin gefundenen Sachverhalt allgemein.

Probl. B (16) **(12 Punkte)**

Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Hauses. Der Umfang $u = 40\,m$ ist gegeben. x, y, h sind unbekannt.



(a) Berechne x, y, h so, dass der Flächeninhalt A maximal wird. Berechne auch A_{max}.

(b) Bestimme die Funktionsgleichung der eingezeichneten Parabel durch die Dachspitze, wenn die Parabel mit der x–Achse ebenfalls den Flächeninhalt A_{max} umschliesst.

Probl. B (17) **(12 Punkte)**

Die grösste Nullstelle $x_0(\lambda)$ von $y(x,\lambda) = x^3 + 2\,(\lambda^2+1)\,x + 2\sqrt{6}\,\lambda = 0,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$ soll berechnet werden.

(a) Zeige, dass $y(x,\lambda) = y_\lambda(x)$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ genau eine Nullstelle hat.
Hinweis: Untersuche die Ableitung $y_x{}'(x,\lambda)$.

(b) Bestimme die grösste Nullstelle von $x_0(\lambda)$.
Hinweis: Es muss gelten: $y_0(x_0(\lambda),\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; y_\lambda{}' + y_x{}' \cdot x_\lambda{}' = 0$ (Kettenregel)
$\Rightarrow\; x_\lambda{}' = \ldots = 0$ (Extremum!)
Setze das so berechnete λ in $y(x,\lambda)$ ein ...
verifiziere, dass tatsächlich die grösste und nicht die kleinste Nullstelle gefunden worden ist.

Probl. B (18) **(12 Punkte)**

Für das Integral $\int\limits_0^1 \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2}\,dx$ ist keine elementare Stammfunktion bekannt. Um trotzdem zu einer Abschätzung zu kommen, gehen wir wie folgt vor:

(a) Benütze die Potenzreihenentwicklung für den Cosinus für $x_0 = 0$, um den Integranden wie folgt zu approximieren:

$$f(x) = \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2} \approx \sum_{k=0}^{10} a_k\,x^k$$

(b) Versuche, für die Approximation von $f(x),\ \ x \in [0,1]$, den Fehler abzuschätzen.

(c) Verwende das gewonnene Resultat, um $\int\limits_0^1 \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2}\,dx$ zu approximieren.

(d) Versuche, für $\int\limits_0^1 \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2}\,dx$ den Fehler abzuschätzen.

Probl. B (19) Begriff „Krümmungskries“: Selbststudium **(12 Punkte)**

Im Graphen von $f(x) = x^2$ wird im Punkt $x = 0$ der Krümmungskreis eingezeichnet (Krümmungsradius ρ). P_0 sei ein Punkt auf der Kreisperipherie, $P_0 \neq (0,0)$. Eine Kreistangente in P_0 mit dem Steigungswinkel φ, die nicht parallel zu einer Koordinatenachse liegt, schneidet die parabel in zwei Punkten P_1, P_2.

(a) Bestimme P_1 und P_2 für $\varphi = \frac{\pi}{6}$. (Numerisches Resultat genügt.)

(b) Bestimme den Inhalt A der Fläche zwischen der Parabel und der Tangente (zwischen den Punkten P_1 und P_2).

(c) Entscheide, ob $A < 3$ gilt oder nicht.

Probl. B (20) **(12 Punkte)**

Ein Gebiet D stellt die Oberfläche eines Sees dar, welche in einem xy–Koordinatensystem plaziert wird (x und y in km). die Tiefe in Metern unterhalb des Punktes (x, y) ist gegeben durch

$$z = f(x, y) = 300 - x^2 - 2\,y^2$$

(a) Ein Boot befindet sich im Punkt $(10, 10)$ (d.h. am Ufer).
In welcher Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1(x,y) \\ a_2(x,y) \end{pmatrix} = \vec{a}(10,10) = \begin{pmatrix} a_1(10,10) \\ a_2(10,10) \end{pmatrix}$ muss es fahren, damit die *Tiefe möglichst rasch abnimmt?*

(b) Bestimme $\vec{a}(x, y) = \begin{pmatrix} a_1(x,y) \\ a_2(x,y) \end{pmatrix}$ für einen beliebigen Punkt (x, y).

(c) Der Kapitän wählt den Kurs so, dass in jedem Punkt die Richtung identisch ist mit der Richtung der stärksten Tiefenzunahme resp. Tiefenabnahme.
$\rightsquigarrow \dfrac{d\,x(t)}{d\,t} = a_1(x, y), \ \dfrac{d\,y(t)}{d\,t} = a_2(x, y)$. Bestimme die Parameterdarstellung der Fahrtkurve, wenn das Schiff sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $(10, 10)$ befunden hat.

Hinweise: Normiere den Richtungsvektor nicht. Benütze folgende bekannte Tatsache: $(h(x) + c)' = (a \cdot e^{k \cdot x} + c)' = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x} = k \cdot h(x)$.

(d) Berechne näherungsweise die Länge der Fahrtkurve vom Punkt $(10, 10)$ bis zum Punkt mit der grössten Tiefe.

Probl. B (21) **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u'(x) - \tan(x) \cdot u(x) &= -\sin(x) \\ x \cdot v'(x) &= v(x) + 4\,x \end{aligned}$$

(a) Suchen Sie diejenige spezielle Lösung $u_0(x)$ der ersten Gleichung, die durch den Ursprung geht.

(b) Berechnen Sie diejenige spezielle Lösung $v_0(x)$ der zweiten Gleichung, die die Bedingung $v_0(\pi) = u_0(\pi)$ erfüllt.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert der Steigung $\lim\limits_{x \to \infty} v_0{}'(x)$ sowie das Minimum resp. das Infimum der Steigung.

Probl. B (22) Ausblick auf andere Semester **(12 Punkte)**

Ein harmonischer Oszillator (z.B. eine Masse an einer Feder) wird durch die Gleichung

$$m\,y''(t) + \mu\,y\,(t) + k\,y(t) = F(t)$$

beschrieben. $F(t)$ ist die äussere Anregung, μ die Dämpfung. Um das Problem der Resonanz zu studieren, setzen wir $m = 1, \ \mu = 0, \ k = 1$ und für die äussere Anregung $F(t) = \sin(\omega_0\,t)$. Für $t = 0$ befinde sich das System im Ruhezustand.

(a) Bestimmen Sie für den beschriebenen Fall mit Hilfe der Laplace–Transformationen die Lösung in Abhängigkeit vom Parameter ω_0.

(b) Bestimmen Sie bei der gefundenen Lösung die Grösse ω_0 für den Resonanzfall.

(c) Bestimmen Sie die Stossantwort zur Zeit $t = 0$ bei einer Dämpfung $\mu = 1$.
($m = 1, \ k = 1$ wie vorher.)

Probl. B (23) Ausblick auf andere Semester **(12 Punkte)**

In einem diskreten Zeitsystem soll die Impulsantwort $\{y_k\} = \{(-1)^k - 2^k\}$ $(k \geq 0)$ sein.

(a) Bestimmen Sie die die Transferfunktion $G(z)$.

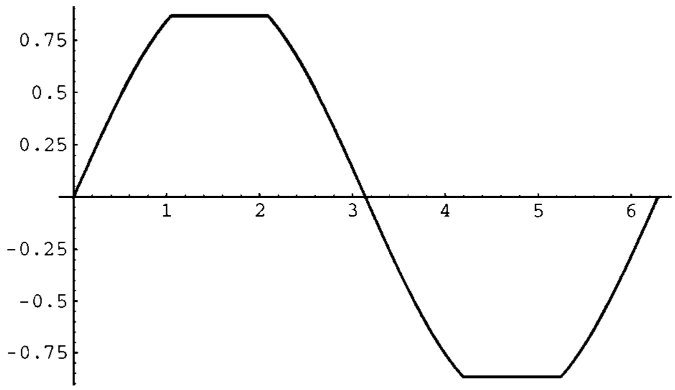
(b) Entwerfen Sie zu $G(z)$ ein Blockdiagramm.

(c) Bestimmen Sie die zugehörige Differenzengleichung.

(d) Bestimmen Sie zu $G(z)$ die Schrittantwort.

Probl. B (24) Ausblick auf andere Semester **(12 Punkte)**

Die in der Figur über eine Periode gezeigte Funktion *nbsin*(t) heisst unter *„neuer Bieler Sinus“*. In den Intervallen $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ und $(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ ist sie oben resp. unten horizontal abgeschnitten. Der neue Bieler Sinus lässt sich zusammensetzen aus der Funktion $\sin(t)$ sowie einer 2π–periodischen Hilfsfunktion $h(t)$, die 0 ist, ausser auf den folgenden Intervallen: Auf $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ ist sie gleich $(\sin(t) - \sin(\frac{\pi}{3}))$ und auf dem Intervall $(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ ist sie gleich $(\sin(t) + \sin(\frac{\pi}{3}))$.



(a) Skizzieren Sie $h(t)$.

(b) Entwickeln Sie $h(t)$ in eine Fourierreihe, indem Sie die Fourierkoeffizienten $a_0/2$, a_n und b_n bestimmen. (Falls die Koeffizienten nicht ständig gleich 0 sind, genügen die ersten vier, d.h. $n = 4$. Das gibt die Reihe $h_4(t)$.)

(c) Berechnen Sie numerisch die Abweichung $|h_4(t) - h(t)|$ an der Übergangsstelle $t = \frac{\pi}{3}$.

(d) Geben Sie in einer Gleichung die Beziehung zwischen *nbsin*(t), $\sin(t)$ und $h(t)$.

(e) Berechnen Sie aus dieser Gleichung die Fourierkoeffizienten von *nbsin*(t) bis zu $n = 4$.

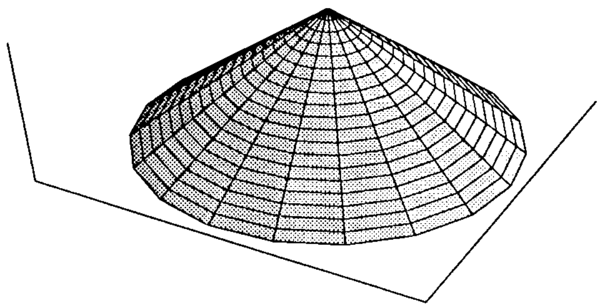
Probl. B (25) Ausblick auf andere Semester **(12 Punkte)**

(a) Sei $\vec{u} = f(x, y, z) \cdot \vec{c}$. ($\vec{c}$ ist ein beliebiger, geeignet gewählter konstanter Vektor, f eine skalare Funktion.) Leiten Sie damit mit Hilfe des Divergenzsatzes folgende Gleichung her:

$$\int\!\!\int_S f \cdot \vec{n}\, dS = \int\!\!\int\!\!\int_Q (\bigtriangledown f)\, dV$$

(Der Nachweis für eine Komponente genügt.)

(b)



In einem See wird eine kegelförmige Tauchkapsel mit dem Grundkreisradius R und der Höhe H so versenkt, dass die Rotationsachse senkrecht steht. Die Tiefe des Kapselbodens ab Wasseroberfläche sei z_0. Da der Druck p in der Tiefe z unter der Wasseroberfläche dem Gewicht der Wassersäule über der Einheitsfläche entspricht, gilt für p die Formel: $p = k \cdot z \quad (k = const.)$. Die auf ein Flächenelement $d\vec{S}$ wirkende Kraft berechnet sich bekanntlich nach der Formel $d\vec{F} = -p \cdot d\vec{S} = -p \cdot \vec{n} \cdot dS$. Damit kann die gesamte auf die Kapsel wirkende Auftriebskraft $-\int\!\!\int_S p \cdot \vec{n}\, dS$ nach der im ersten Teil der Aufgabe hergeleiteten Gleichung berechnet werden. In einem geeignet gewählten Masssystem ist $R = 1, \;\; H = 3$. Berechnen Sie damit $\vec{F}$ als Funktion von z_0. (Lassen Sie die Normierungskonstante k als Parameter stehen.) Spielt bei dieser Rechnung die Körperform eine Rolle? (Vergleichen Sie das Resultat mit dem *Gesetz von Archimedes*!)

Probl. B (26) Ausblick auf andere Semester **(12 Punkte)**

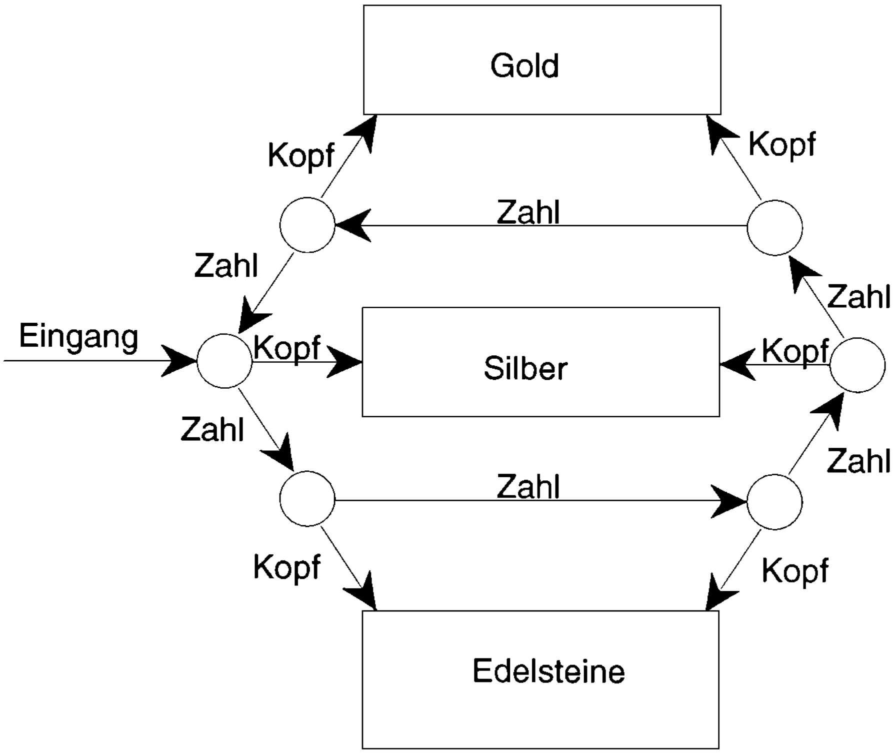
Untersuchen Sie das folgende Differentialgleichungssystem als System mit Eingang $f(t)$ und Ausgang $y(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} - x - 5\,y &= f(x) \\ \dot{y} + x + k\,y &= 0 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die die Transferfunktion $G(s)$.

(b) Untersuchen Sie, in welchem Bereich für k das System stabil ist.

Probl. B (27) Ausblick auf andere Semester **(12 Punkte)**



Sie betreten einen Labyrinth bei „Eingang“ (vgl. Skizze). Sie dürfen sich nur in Pfeilrichtung bewegen. Bei jeder Verzweigung entscheiden Sie mit einem Münzwurf (ideale Münze), welchen Gang Sie betreten. Das geht solange, bis Sie entweder bei den Edelsteinen, beim Silber oder beim Gold angelangt sind. Beachten Sie, dass Sie dazu vielleicht mehrere Durchgänge benötigen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen Sie

(a) zu den Edelsteinen?

(b) zum Silber?

(c) zum Gold?

(Die Idee zu dieser Aufgabe ist einer Mittellehrerprüfung der Universität Basel entnommen.)

1.3 Hinweise zur Prüfungsvorbereitung

Lade die folgenden Dateien herunter:

`http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/infoHTML.html#LT`

(==> Links zur Lerntechnik)

`http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/RepetitionsplanVD.pdf`

(==> Vorschlag für einen Repetitionsplan)

Damit bleibt nur noch zu wünschen: Viel Glück!

Kapitel • Chapitre 2

Anhang: Lösungen

Hinweis: Die Lösungen sind aus Praktikabilitätsgründen mit *Mathematica* produziert worden. In den bald 20 Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Vorteil dieses Verfahrens: Die Files mit dem reinen *Mathematica*–Source-Code in lassen sich damit sehr klein halten. Daher sind sie sehr einfach über Internet transportierbar. Es entstehen keine grossen Download–Zeiten und die Kosten des Speicherplatzes bei einem Provider übersteigen die gesetzten Grenzen nicht, denn die entstehenden File–Sammlungen haben beschränkte Grösse. Die abgearbeiteten Files mit dem Output mit Postscript-Graphiken sind allgemein sehr „schwer", können aber jederzeit mit dem *Mathematica*–Programm aus dem Source-Code wieder erstellt werden. Dafür sind die mittels „Output beladenen Files" erzeugten PDF-Files wieder klein, was sie transportabel macht.
Für den auf den folgenden Seiten wiedergegebene Output (bei der Alternativausgabe mittels des unten angegebenen klickbaren URL's via Internet abrufbar) sind daher die Seiten unabhängig nummeriert.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/LEMAna2_16.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/LEMAna2_16.nb

Kapitel • Chapitre 3

Tipps zur Vorbereitung der Modulprüfung

Hinweise zur Prüfungsvorbereitung sind zu finden unter:

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/InfoHTML.html#LT.

Hinweise zu einem Repeditionsplan sind zu finden unter:

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/RepetitionsplanVD.pdf.

Viel Glück!