Übungen in Analysis 3 ◇ M2 11 ◇

Schwingungen

Probl. 1 Literaturstudium:

Rufe den Link http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/MasterIndex.html auf. Dieser Link ist auf die vom Aufruf der Übungen bekannte Art passwortgeschützt. Unter diesem Link findet sich ein weiterer Link zu Literaturangaben (Handouts). Für den Aufruf der angegebenen Seite braucht es wiederum einen Loginname. Dieser Loginname ist auf dem beim Aufruf erscheinenden Fenster angegeben. Beachte dabei die Schreibung. Das Passwort wird mündlich mitgeteilt.

Unter diesem Link findet man diverse Literaturangaben zu interessanten Themen aus der Praxis. Gehe die Liste durch und studiere die Handouts zu den Themen „Schwingungen“. Informiere dich zu diesen Themen auch im Internet zur Sache. (Wikipedia):

Achtung: Eventuell im Browser, Kommandozeile ae durch ä ersetzen:

http://de.wikipedia.org/wiki/Schwingung
http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Schwingung
http://de.wikipedia.org/wiki/Resonanz_(Physik)
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweid.pdf
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweidf.pdf

Probl. 2 Kurzprojekt:

Betrachte die Differentialgleichung mit den beigefügten Parametern:

$$m\,y''(t) + d\,y'(t) + k\,y(t) = f(t),\ \ y(0) = y_0,\ \ y\,(0) = y_0,$$

$$D = \frac{d}{2\,\sqrt{m\cdot k}},\ \ a = -\frac{d}{2\cdot m},\ \ \omega_D = \omega\cdot\sqrt{1-D^2},\ \ \omega > 0.$$

(a) Interpretiere $y(t)$ sowie die Konstanten m, d, k und auch die Funktion $f(t)$.

(b) Löse die Differentialgleichung allgemein mit Hilfe der Laplace-Transformationen.

(c) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) \equiv 0,\ \ y_0 = 0,\ \ {y_0}' = b$.

(d) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) \equiv 0,\ \ y_0 = 0,\ \ {y_0}' = 1,$ $m = 1,\ \ d = \frac{1}{2},\ \ k = 1$.

(e) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) \equiv 0,\ \ y_0 = 0,\ \ {y_0}' = 1,$ $m = 1,\ \ d = \frac{1}{2},\ \ k = -1$. Handelt es sich immer noch um eine Schwingung?

(f) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = \delta(t)$, $y_0 = {y_0}' = 0$. Sieht man eine Beziehung der hier gefundenen Lösung zur unter (c) gefundenen Lösung?

(g) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = \delta(t)$, $y_0 = {y_0}' = 0$, ${y_0}' = 1$, $m = 1$, $d = \frac{1}{2}$, $k = 1$.

(h) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = A\,\sin(\omega\,t + \varphi)$, $y_0 = {y_0}' = 0$.

(i) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = A\,\sin(\omega\,t)$, $y_0 = {y_0}' = 0$.

(j) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = A\,\sin(\omega\,t)$, $y_0 = {y_0}' = 0$, $m = 1$. Für welche Beziehung zwischen d und k wird die Lösung problematisch?

(k) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = A\,\sin(\omega\,t)$, $y_0 = {y_0}' = 0$, $m = 1$, $d = 2\,\sqrt{k}$.

(l) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = A\,\sin(\omega\,t)$, $y_0 = {y_0}' = 0$, $m = 1$. Was passiert dann für $\omega^4 + (d^2 - 2\,k)\,\omega^2 + k^2 = 0$? Wie gross ist dann ω?

(m) Setze $\omega_\epsilon = \epsilon \pm \sqrt{-\frac{d^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4kd} + k}$. In welchem Falle ist $\omega_\epsilon \in \mathbb{R}$?

(n) Löse die umgeschriebene Differentialgleichung für $f(t) \equiv 0$, $y_0 = 1$, ${y_0}' = 0$ mit $m = 1$, $q = \frac{d}{2}$, $\omega_0 = \sqrt{k}$. Löse die Gleichung allgemein und untersuche die Fälle $G = q^2 - \omega_0^2 < 0$ (schwache Dämpfung), $G = q^2 - \omega_0^2 = 0$ (aperiodischer Grenzfall) und $G = q^2 - \omega_0^2 > 0$ (starke Dämpfung).

(o) Skiziere im letzten Fall die Lösung für schwache Dämpfung, den periodischen Grenzfall und die starke Dämpfung. Wähle dazu die Parameter speziell.

(p) Skiziere im letzten Fall die Lösung für schwache Dämpfung, den periodischen Grenzwall und starke Dämpfung..Wähle dazu die Parameter speziell.

(q) Probiere eigene Parameterkombinationen aus. Wähle dazu auch $f(t) = A\,\sin(\omega\,t)$ und verwende q sowie ω_0. Probiere herauszufinden, unter welchen Bedingungen die Aplitude maximal wird (Resonanz). *Hinweis:* Probiere in der Umgebung von $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2q^2} \ldots$

(r) Löse die umgeschriebene Differentialgleichung für $f(t) = \sin(\omega\,t)$, $y_0 = 1$, ${y_0}' = 0$ mit $m = 1$, $q = \frac{d}{2}$, $\omega_0 = \sqrt{k}$. Studiere im Falle der schwachen Dämpfung (z.B. $q = 1$, $\omega_0 = 2$, d.h. $G = q^2 - \omega_0^2 < 0$) das Verhalten der Auslenkung (Amplitude) in Funktion von ω.