Übungen in Analysis 4 ◇ M2 06 ◇

Diverse Berechnungen:

Probl. 1 Die folgende Funktion hat die Periode $T = 4$:

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & t \in [-3,\, -1) \\ 2 & t \in [-1,\, 1) \end{cases}$$

(a) Skizziere die Funktion.

(b) Entwickle f in eine Fourierreihe $\tilde{f}_n(t)$ von beliebiger Ordnung n. Berechne die Fourierkoeffizienten numerisch in einer Tabelle bis zu $n = 50$. Was stellt man fest?

(c) Stelle einen Plot her für $n = 10$ und $n = 50$.

(d) Untersuche die Gleichung $2 = f(0) = \tilde{f}(0)$. Was kann man damit anfangen?

(e) Überprüfe an dieser Funktion die Gleichung von Parseval.

(f) Versuche mit Hilfe der letzten Gleichung eine Näherungsformel zur Berechnung von π zu finden und prüfe die Genauigkeit der Berechnung für $n = 1000$.

Probl. 2 Gegeben ist die folgende Funktion:

$$f(\lambda) \quad = \quad \begin{cases} \lambda & \lambda \in [-1,\, 1) \\ 0 & \lambda \not\in [-1,\, 1) \end{cases}$$

(a) Skizziere die Funktion.

(b) Berechne die Fouriertransormierte $F(\Omega)$ von $f(\lambda)$.

(c) Benutze $F(\Omega)$ zur Berechnung von $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x\cos(x)\,\sin(x) - \sin^2(x))}{x^2}\, dx$

Probl. 3 Kleinprojekt:

Die Wärmeleitgleichung für einen unendlich langen, eindimensionalen Stab (Draht) lautet:

$$u_t(x,t) = k^2\, u_{xx}(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t \in \mathbb{R}_0^+$$

Als Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ ist gegeben:

$$u(x,0) = e^{-x^2/\beta^2}, \;\; x \in \mathbb{R}_0^+, \;\; \beta \in \mathbb{R}^+$$

Suche die Lösung $u_t(x,t)$ der Gleichung für $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$. Verwende für die Lösung eine geeignete Darstellung.