LU-Zerlegung

Die LU-Zerlegung, auch LR- oder Dreieckszerlegung ist ein Algorithmus zur Programmierung des Gauss-Jordan-Verfahrens. Hier wier die Idee anhand einer Untersuchung im Falle einer 3 x 3-Matrix gezeigt. Die Methode läst sich dann mühelos auf den Fall einer beliebigen n x n-Matrix erweitern.

Bedeutung von LU: L Lower, U Upper.

Hier verwendete Programmversion: *Mathematica* 5.2

1. Zur Theorie der LU-Zerlegung

Das Beispiel einer abstrakten 3 x 3-Matrix:

Konstruktion von U (dabei werden die Elementarsubstitutionen werden in Matrizenoperationen abgebildet):

Sei a1 nicht 0 (sowie weiter unten auch die Nenner nie 0 - ansonst eine Zeilenvertauschung vorgenommen werden müsste...):

```
In[1]:= Remove["Global`*"]

In[2]:= A30 = {{a1,b1,c1},{a2,b2,c2},{a3,b3,c3}};
        K31 = {{0,0,0},{0,0,0},{A30[[3]][[1]]/A30[[1]][[1]],0,0}};
        Map[MatrixForm,{A30, K31}]
```

Out[4]= $\left\{\begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{a3}{a1} & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

```
In[5]:= H13 = IdentityMatrix[3]- K31; H13 // MatrixForm
```

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a3}{a1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[6]:= U1 = H13.A30//Simplify; U1 //MatrixForm
```

Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ 0 & -\frac{a3\,b1}{a1}+b3 & -\frac{a3\,c1}{a1}+c3 \end{pmatrix}$$

```
In[7]:= K21 = {{0,0,0},{U1[[2]][[1]]/U1[[1]][[1]],0,0},{0,0,0}}; K32 // MatrixForm
```

Out[7]//MatrixForm=

K32

```
In[8]:= H12 = IdentityMatrix[3]-K21; H12 // MatrixForm
```

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a2}{a1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[9]:= U2 = H12.U1//Simplify; U2 //MatrixForm
```

Out[9]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ 0 & -\frac{a2\,b1}{a1}+b2 & -\frac{a2\,c1}{a1}+c2 \\ 0 & -\frac{a3\,b1}{a1}+b3 & -\frac{a3\,c1}{a1}+c3 \end{pmatrix}$$

Sei $-\frac{a2\,b1}{a1}+b2$ nicht 0:

```
In[10]:= K32 = {{0,0,0},{0,0,0},{0,U2[[3]][[2]]/U2[[2]][[2]],0}}; K32 // MatrixForm
```

Out[10]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\frac{a3\,b1}{a1}+b3}{-\frac{a2\,b1}{a1}+b2} & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[11]:= H23 = IdentityMatrix[3]-K32; H23 // MatrixForm
```

Out[11]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{-\frac{a3\,b1}{a1}+b3}{-\frac{a2\,b1}{a1}+b2} & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[12]:= U3 = H23.U2//Simplify; U3 //MatrixForm
```

Out[12]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ 0 & -\frac{a2\,b1}{a1}+b2 & -\frac{a2\,c1}{a1}+c2 \\ 0 & 0 & \frac{a3\,b2\,c1-a2\,b3\,c1-a3\,b1\,c2+a1\,b3\,c2+a2\,b1\,c3-a1\,b2\,c3}{a2\,b1-a1\,b2} \end{pmatrix}$$

In einem Schritt:

```
In[13]:= U3 = H23.H12.H13.A30//Simplify; U3 //MatrixForm
```

Out[13]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ 0 & -\frac{a2\,b1}{a1}+b2 & -\frac{a2\,c1}{a1}+c2 \\ 0 & 0 & \frac{a3\,b2\,c1-a2\,b3\,c1-a3\,b1\,c2+a1\,b3\,c2+a2\,b1\,c3-a1\,b2\,c3}{a2\,b1-a1\,b2} \end{pmatrix}$$

```
In[14]:= Uresult = U3;
```

Konstruktion von L mittels inverser Matrix:

L U = A ==> L = A InverseU. Daher ist die Inverse der Dreiecksmatrix U zu bestimmen.
Ansatz: U * InverseU = E. Die Berechnung von InverseU ist hier einfach. Die Sukzessive Berechnung der Elemente von InverseU zeigt rasch, dass InverseU ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix sein muss.

```
In[15]:= U = {{u11,u12,u13},{0,u22,u23},{0,0,u33}}; U // MatrixForm
```

Out[15]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} u11 & u12 & u13 \\ 0 & u22 & u23 \\ 0 & 0 & u33 \end{pmatrix}$$

```
In[16]:= InvU = {{v11,v12,v13},{0,v22,v23},{0,0,v33}}; InvU // MatrixForm
```

Out[16]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} v11 & v12 & v13 \\ 0 & v22 & v23 \\ 0 & 0 & v33 \end{pmatrix}$$

```
In[17]:= U.InvU// MatrixForm
```

Out[17]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} u11\,v11 & u11\,v12+u12\,v22 & u11\,v13+u12\,v23+u13\,v33 \\ 0 & u22\,v22 & u22\,v23+u23\,v33 \\ 0 & 0 & u33\,v33 \end{pmatrix}$$

```
In[18]:= InvU.U// MatrixForm
```

Out[18]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} u11\,v11 & u12\,v11+u22\,v12 & u13\,v11+u23\,v12+u33\,v13 \\ 0 & u22\,v22 & u23\,v22+u33\,v23 \\ 0 & 0 & u33\,v33 \end{pmatrix}$$

```
In[19]:= solv = Solve[U.InvU == IdentityMatrix[3],{v11,v12,v13,v22,v23,v33}] // Flatten
```

Out[19]=

$$\left\{v13\to-\frac{u13\,u22-u12\,u23}{u11\,u22\,u33},\ v11\to\frac{1}{u11},\ v12\to-\frac{u12}{u11\,u22},\ v22\to\frac{1}{u22},\ v23\to-\frac{u23}{u22\,u33},\ v33\to\frac{1}{u33}\right\}$$

Hier hat man ein lineares Gleichungssystem mit 6 Unbekannten, das man nach dem Rückwärtseinsetzungsverfahren rasch und problemlos lösen kann.

```
In[20]:= InvU = InvU /.solv; InvU // MatrixForm
```

Out[20]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{u11} & -\frac{u12}{u11\,u22} & -\frac{u13\,u22-u12\,u23}{u11\,u22\,u33} \\ 0 & \frac{1}{u22} & -\frac{u23}{u22\,u33} \\ 0 & 0 & \frac{1}{u33} \end{pmatrix}$$

Kontrolle:

In[21]:= **Inverse[U] // MatrixForm**

Out[21]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{u11} & -\frac{u12}{u11\,u22} & \frac{-u13\,u22+u12\,u23}{u11\,u22\,u33} \\ 0 & \frac{1}{u22} & -\frac{u23}{u22\,u33} \\ 0 & 0 & \frac{1}{u33} \end{pmatrix}$$

Ersetzung der künstlichen Koeffizienten in U durch die von A30:

In[22]:=
```
UFlat = Flatten[U];
U3Flat = Flatten[U3];
rul = Table[UFlat[[k]]->U3Flat[[k]],{k,1,Length[UFlat]}]
```

Out[24]=

$$\left\{u11 \to a1,\ u12 \to b1,\ u13 \to c1,\ 0 \to 0,\ u22 \to -\frac{a2\,b1}{a1} + b2,\ u23 \to -\frac{a2\,c1}{a1} + c2,\ 0 \to 0,\ 0 \to 0,\ u33 \to \frac{a3\,b2\,c1 - a2\,b3\,c1 - a3\,b1\,c2 + a1\,b3\,c2 + a2\,b1\,c3 - a1\,b2\,c3}{a2\,b1 - a1\,b2}\right\}$$

In[25]:= **L = A30.InvU; Lresult = L/.rul //Simplify; Lresult // MatrixForm**

Out[25]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a2}{a1} & 1 & 0 \\ \frac{a3}{a1} & \frac{a3\,b1-a1\,b3}{a2\,b1-a1\,b2} & 1 \end{pmatrix}$$

Kontrolle:

In[26]:= **Lresult.Uresult //Simplify // MatrixForm**

Out[26]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{pmatrix}$$

In[27]:= **Simplify[Lresult.Uresult] == A30**

Out[27]= True

Anwendung für die Lösung eines Gleichungssystems:

Sei A.x = (L.U).x = L.(U.x) = L.y = b .
Löse zuerst L.y = b ==> y wird bekannt (einfache Lösungsmöglichkeiten, da L Dreiecksmatrix ist).
Löse anschliessend U.x = y ==> x wird bekannt (einfache Lösungsmöglichkeiten, da U ebenfalls Dreiecksmatrix ist).

In[28]:=

0. Materialbereitstellung

In[28]:= **Remove["Global`*"]**

```
In[29]:= A3 = {{1,2,3},{1,-1,0},{-2,1,5}};
         B3 = {{3,5,1},{4,7,9},{3,2,6}};
         C3 = {{4,1,3},{5,6,5},{5,8,8}};
         Map[MatrixForm,{A3,B3,C3}]
```

Out[32]= $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}\right\}$

```
In[33]:= X31 = {{x11},{x21},{x31}};
         Y31 = {{y11},{y21},{y31}};
         B31 = {{1},{2},{3}};
         Map[MatrixForm,{X31,Y31,b31}]
```

Out[36]= $\left\{\begin{pmatrix} x11 \\ x21 \\ x31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y11 \\ y21 \\ y31 \end{pmatrix}, b31\right\}$

In[37]:=

1. LU-Zerlegung für 3 x 3 Matrizen als Modul

(Einfach lesbarer Modul ohne kompakte Programmierung, wiederholt anwendbar!)

```
In[37]:= modulLU[{{a1_,b1_,c1_},{a2_,b2_,c2_},{a3_,b3_,c3_}}]:=
         Modul[{},
         A30 = {{a1,b1,c1},{a2,b2,c2},{a3,b3,c3}};
         K31 = {{0,0,0},{0,0,0},{A30[[3]][[1]]/A30[[1]][[1]],0,0}};
         Map[MatrixForm,{A30, K31}];
         H13 = IdentityMatrix[3]- K31;
         U1 = H13.A30//Simplify;
         K21 = {{0,0,0},{U1[[2]][[1]]/U1[[1]][[1]],0,0},{0,0,0}};
         H12 = IdentityMatrix[3]-K21;
         U2 = H12.U1//Simplify;
         K32 = {{0,0,0},{0,0,0},{0,U2[[3]][[2]]/U2[[2]][[2]],0}};
         H23 = IdentityMatrix[3]-K32;
         U3 = H23.U2//Simplify;
         Uresult = U3;
         U = {{u11,u12,u13},{0,u22,u23},{0,0,u33}};
         InvU = {{v11,v12,v13},{0,v22,v23},{0,0,v33}};
         solv = Solve[U.InvU == IdentityMatrix[3],{v11,v12,v13,v22,v23,v33}] // Flatten;
         InvU = InvU /.solv;
         UFlat = Flatten[U];
         U3Flat = Flatten[U3];
         rul = Table[UFlat[[k]]->U3Flat[[k]],{k,1,Length[UFlat]}];
         L = A30.InvU; Lresult = L/.rul //Simplify;
         Print["Eingabematrix = ",A30//MatrixForm];
         solv1:= Solve[Evaluate[Flatten[Lresult.Y31]  == Flatten[B31]
         ],{y11,y21,y31}]//Flatten;
         YN31=Y31/.solv1;
         solv2:= Solve[Evaluate[Flatten[Uresult.X31]  == Flatten[YN31]
         ],{x11,x21,x31}]//Flatten;
         XN31=X31/.solv2;
         Print["U = ",Uresult//MatrixForm];
         Print["L = ",Lresult//MatrixForm];
         Print["Kontrolle: L U = ",Lresult.Uresult//MatrixForm];
         Print["Y21 = ",YN31//MatrixForm];
         Print["X21 = ",XN31//MatrixForm];]
         modulLU[A3];
```

Eingabematrix = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

U = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

L = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$

Kontrolle: L U = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Y21 = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$

X21 = $\begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ -\frac{13}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}$

Kontrolle:

```
In[39]:= Solve[A3.Flatten[X31]==Flatten[B31],Flatten[X31]]
```

Out[39]= $\left\{\left\{x11 \to \frac{5}{9},\ x21 \to -\frac{13}{9},\ x31 \to \frac{10}{9}\right\}\right\}$

Neue Anwendung des Moduls:

```
In[40]:= modulLU[B3];
```

Eingabematrix = $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

U = $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 74 \end{pmatrix}$

L = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -9 & 1 \end{pmatrix}$

Kontrolle: L U = $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Y21 = $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 8 \end{pmatrix}$

X21 = $\begin{pmatrix} \frac{41}{37} \\ -\frac{18}{37} \\ \frac{4}{37} \end{pmatrix}$

Kontrolle:

```
In[41]:= Solve[B3.Flatten[X31]==Flatten[B31],Flatten[X31]]
```

Out[41]= $\left\{\left\{x11 \to \frac{41}{37},\ x21 \to -\frac{18}{37},\ x31 \to \frac{4}{37}\right\}\right\}$

Neue Anwendung des Moduls:

In[42]:= **modulLU[C3];**

Eingabematrix = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

U = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{19}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{47}{19} \end{pmatrix}$

L = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{27}{19} & 1 \end{pmatrix}$

Kontrolle: L U = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

Y21 = $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{13}{19} \end{pmatrix}$

X21 = $\begin{pmatrix} \frac{1}{47} \\ \frac{4}{47} \\ \frac{13}{47} \end{pmatrix}$

In[43]:= **Solve[C3.Flatten[X31]==Flatten[B31],Flatten[X31]]**

Out[43]= $\left\{\left\{x11 \to \frac{1}{47}, x21 \to \frac{4}{47}, x31 \to \frac{13}{47}\right\}\right\}$