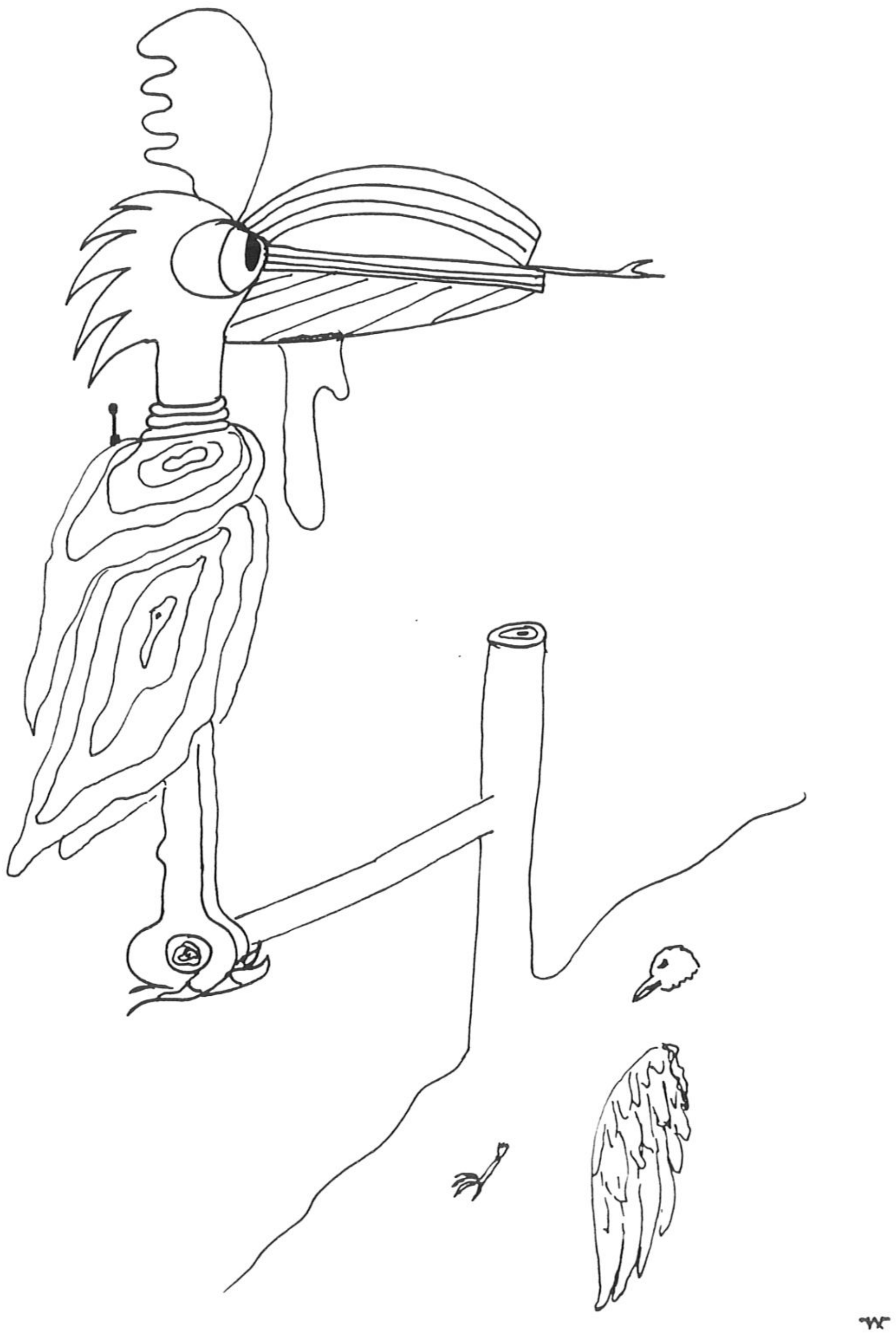
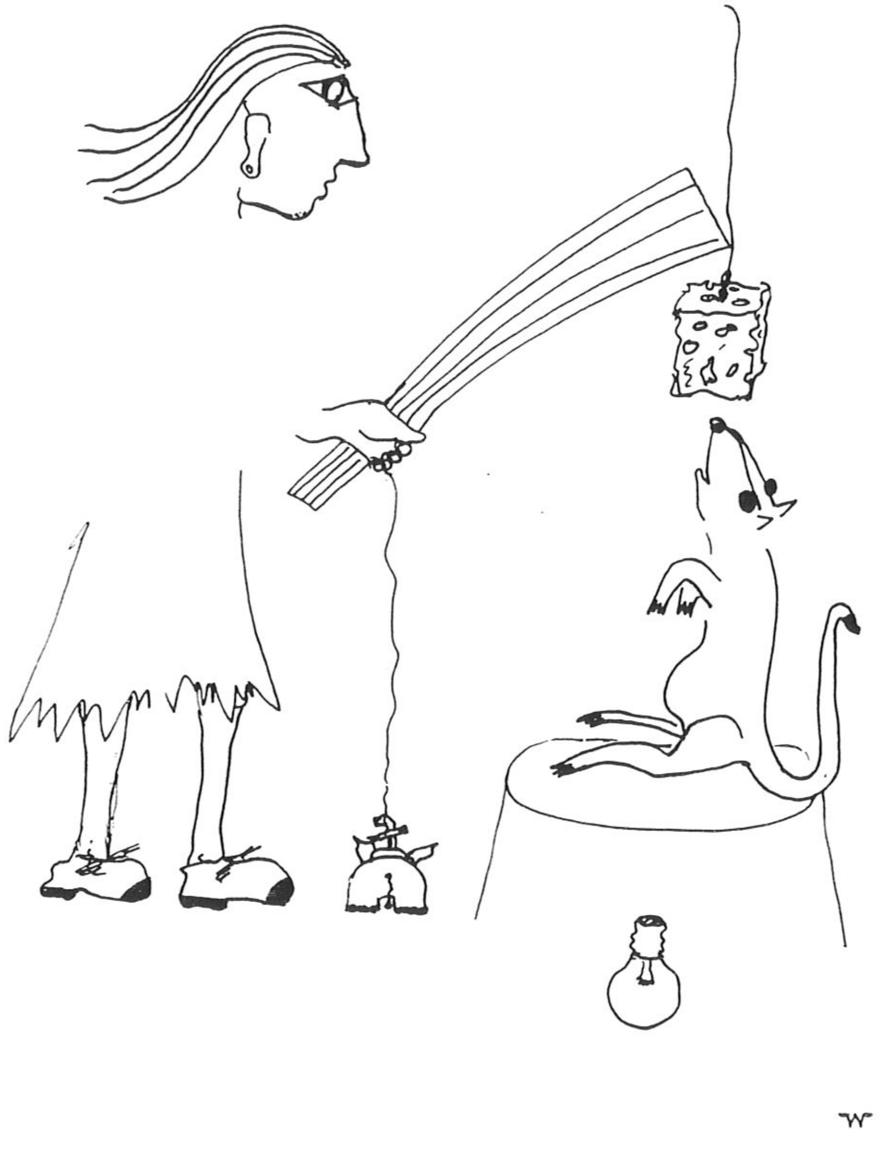


Warnung vor dem künstlich
intelligenten Vogel



Wie man aus einer Maus
einen Elefanten macht

Thema des Kapitels: Kegelschnitte und projektive Gruppe ISB, WIR90

---

1. ...

Das Kapitel ist noch in Bearbeitung!

Fortsetzung: Rückseite

x. ...

Das Kapitel ist noch in Bearbeitung!

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 14 / 1 **Klasse: ....**

Thema des Kapitels: Lineare Optimierung ISB, WIR90

---

1. *Bei einem Fabrikationsprozess durchlaufen die Teile A und B nacheinander die Maschinen I, II und III. Dabei entsteht folgender Zeitaufwand:*

Maschine	Herstellungszeit pro Stk. (Min.) Teil A	Teil B	Täglich mögliche Einsatzzeit der Maschine (Min.)
I	5	4	400
II	3	6	420
III	6	-	360
Gewinn pro Stk.	1.50	2.-	(Zeit beliebig auf die Produktion verteilbar.)

Wieviele Stücke von A und von B müssen täglich produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?

2. *Lösen Sie die folgenden Maximum- resp. Minimumprobleme:*

2.1.
$$\begin{aligned} 2x + 5y &\le 20 \\ 2x + y &\le 8 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \\ z = x + y &\rightarrow \text{max.} \end{aligned}$$

2.2.
$$\begin{aligned} 3x + y &\ge 9 \\ x + 2y &\ge 8 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \\ z = 3x + 2y &\rightarrow \text{min.} \end{aligned}$$

2.3.
$$\begin{aligned} x + y &\le 70 \\ y &\ge (4/3)x \\ y &\le 6x \\ z = 4x + 2y &\rightarrow \text{max.} \end{aligned}$$

2.4.
$$\begin{aligned} x + y &= 100 \\ x + 3y &\le 240 \\ 4x &\ge 320 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \\ z = x + 2y &\rightarrow \text{min.} \end{aligned}$$

3. *Zeigen Sie, dass ein Gebiet, das ein lineares Ungleichungssystem erfüllt, im 2-dimensionalen Fall immer eine konvexe Polyedermenge ist, die begrenzt oder unbegrenzt sein kann. (Hinweis: erst den Fall mit 2 Ungleichungen studieren. Zeigen, dass bei jeweils einer weiteren Ungleichung die Konvexität erhalten bleibt.)*

4. *In einer Schneiderei sind noch 11 m roter Stoff, 15 m grüner und 16 m gelber Stoff vorhanden. Man beschliesst, daraus Fasnachtskostüme zu schneidern. Für Kostüm A braucht man man jeweils 1 m, 1 m und 2 m Stoff. Für Kostüm B jeweils 2 m, 3 m und 1 m. Der Verkaufsgewinn für Kostüm A beträgt Fr. 30.-, der für Kostüm B Fr. 50.-. Wieviele Kostüme sollen von jeder Sorte auf Vorrat hergestellt werden, damit der Gewinn möglichst gross wird?*

5. *Formulieren Sie das zu Aufgabe 1. duale Minimumproblem, interpretieren Sie die entstehenden Grössen und Beziehungen und lösen Sie dieses duale Problem. Dualisieren Sie anschliessend das duale Problem wieder. Was entsteht dann für ein Problem?*

Fortsetzung: Rückseite

6. *Beschreiben Sie das Simplexverfahren.*

7. *Lösen Sie nach dem Simplexverfahren und kontrollieren Sie das Resultat graphisch:*

$x_1 \geq 0\,,\quad x_2 \geq 0$ (Nebenbedingungen 1. Art)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1000 \\ x_1 &\leq 600 \\ x_2 &\leq 800 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 2400 \end{aligned}$$ (Nebenbedingungen 2. Art)

$120\,x_1 + 90\,x_2 = z \to \max.$ (Zielfunktion)

8. *Lösen Sie nach dem Simplexverfahren:*

$x_1 \geq 0\,,\quad x_2 \geq 0\,,\quad x_3 \geq 0\,,\quad x_4 \geq 0$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_4 &\leq 20 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &\leq 30 \\ x_2 + x_3 + x_4 &\leq 10 \end{aligned}$$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = z \to \max.$

9. *Lösen Sie mit der Methode Ihrer Wahl:*

Die Firma X braucht für eine chemische Produktion 10 Einheiten des Stoffes A, 12 Einheiten des Stoffes B und ebenso 12 Einheiten des Stoffes C. Die flüssige Lieferform enthält pro Flasche 5 Einheiten von A, 2 von B und 1 von C. Die Flasche kostet Fr. 3.-. Bei der trockenen Lieferform enthält eine Schachtel 1 Einheit von A, 2 von B und 4 Einheiten von C. Die Schachtel kostet Fr. 2.-. Wieviel muss von beiden Sorten gekauft werden, damit der Bedarf gedeckt ist, die Unkosten aber minimal sind?

10. *Lösen Sie:*

$$\begin{aligned} 40x + 20y &\geq 2000 \qquad & x &\geq 0 \qquad & 5z &= 3x + 3y \\ 40x + 20y &\leq 2400 & y &\geq 30 \\ 150x + 100y &\geq 9000 & x &\leq 95 & z &\to \min \\ -x + 2y &\geq 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 15 / 1

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Funktionen $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, algebraische Kurven und Funktionen $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$

ISB, WIR90

---

1. *Stellen Sie folgende Kurven graphisch dar mit* ***Mathematica:***

1.1. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ 1.2. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$

1.3. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix}$ 1.4. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

1.5. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t\ \cos(t) \\ t\ \sin(t) \end{pmatrix}$ 1.6. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 3\ \cos(t) \\ 0.5\ \sin(t) \end{pmatrix}$

1.7. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^3+t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ 1.8. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 5\ \cos(t) + \cos(10t) \\ 5\ \sin(t) + \sin(10t) \end{pmatrix}$

1.9. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t + t^2 \\ 2 + \cos(t) \end{pmatrix}$ 1.10. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t + t^2 \\ 2 + \cos(3t) \end{pmatrix}$

1.11. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)\ \cos(3t) \\ \sin(t)\ \sin(3t) \end{pmatrix}$ 1.12. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t\ \cos(\log(t)) \\ t^2 + \sin(2t) \end{pmatrix}$

1.13. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)\ (2+\cos(t)) \\ \sin(t)\ (2+\cos(t)) \end{pmatrix}$ 1.14. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)\ (2\ \sin(3t)) \\ \sin(t)\ (2\ \sin(3t)) \end{pmatrix}$

2. *Stellen Sie im* $\mathbb{R}^3$ *graphisch dar mit* ***Mathematica:***

2.1. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ 2.2. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$

2.3. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ 2.4. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 4\ \cos(t) + \cos(5t) \\ 4\ \sin(t) + \sin(5t) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix}$

3. *Kreieren Sie eigene Raumkurven mit* ***Mathematica.***

4. *Gegeben ist folgende Kreisspirale:*

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \\ \mathrm{cost}(t) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für $t = 0$:
a) die Parametergleichung der Tangente
b) die Gleichung der Normalebene

5. *Was ist eine* einfach zusammenhängende Kurve *und was ist eine* algebraische Kurve?

Fortsetzung: Rückseite

6. *Suchen Sie eine Vektordarstellung folgender algebraischer Kurven (falls möglich) und skizzieren Sie die Graphen (nötigenfalls mit **Mathematica**):*

6.1.	$x - y = 0$	6.2.	$x^2 + y^2 - 1 = 0$
6.3.	$2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$	6.4.	$2x^2 - 3y^2 - 6 = 0$
6.5.	$2x^2 + 3y - 6 = 0$	6.6.	$\left\| \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\|$

7. *Was ist bei einer algebraischen Kurve*

   a) ein Knoten ?

   b) eine Spitze ?

   c) ein Berührungsknoten ?

   d) ein isolierter Punkt ?

   e) ein singulärer Punkt ?

8. *Suchen Sie zur Kurve* $x^3 + y^3 - 6x^2 = 0$ *die Asymptoten* $ax + by + c = 0$ *!*

9. *Diskutieren Sie folgende algebraischen Kurven und skizzieren Sie die Graphen (falls möglich mit **Mathematica**, versuchen Sie zu parametrisieren):*

9.1.	$y^2 (1 + x) = x^2 (1 - x)$	9.2.	$y^3 - x^2 (6 - x) = 0$
9.3.	$x^3 - 3 x^2y + 3x^3 - y^3 + y^4 = 0$	9.4.	$x^2 - 2xy + y^2 - y^3 = 0$

10. *Wie lässt sich die folgende Fläche mit Hilfe einer Koordinatentransformation einfacher beschreiben?*

$$f(x, y) = (3 (x + 2y)^2 - 12xy)^{0.5} + (8x^2 + 32y^2)$$

11. *Suchen Sie Koordinatensysteme, mit denen die folgenden Hyperflächen einfacher beschreibbar sind!*

11.1. $f(x, y, z) = (4x^2 + y^2 + 25z^2)^3$

11.2. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{(1/4)} + 4z^3$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.** *Falls möglich, sind die Resultate mit* **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 15 / 3

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Funktionen $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, algebraische Kurven, Koordinaten- und Vektorraumtransformationen — ISB, WIR90

---

12. *Suchen Sie eine geeignete Koordinatentransformation, so dass die Kurve*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad z = \text{const.} \quad \text{mit:}$$

$$y = \pm\sqrt{x + 0.5}$$

eine besonders einfache Form annimmt.

13. *Führen Sie ein elliptisches Koordinatensystem ein, in dem Sie die Kurve*

$$x^2 + 3y^2 - 6 = 0$$

möglichst einfach darstellen können.

14. *Für welche Probleme verwenden Sie jeweils folgende Koordinatensysteme?*

a) Bipolare Zylinderkoordinaten — b) Elliptische Zylinderkoordinaten

c) Kugelkoordinaten — d) Parabolische Zylinderkoordianten

15. *Drücken Sie den Ortsvektor des Punktes* P(1/5/2) *in obigen Koordinaten (14) aus.*

16. *Bestimmen Sie die Transformationsgesetze bei der Transformation von elliptischen in parabolische Koordinaten*

17. *Entwerfen Sie die Koordinatennetze von 14 mit* ***Mathematica****. Wo haben solche Koordinatentransformationen Bedeutung?*

18. *Die Punkte einer Ebene werden wie folgt abgebildet:*

1. Verschiebung in x-Richtung um -5.
2. Spiegelung an der y-Achse.
3. Drehung um den Ursprung um $\pi/6$.
4. Verschiebung in x-Richtung um 2.
5. Verschiebung in y-Richtung um 5.
6. Drehung um den Ursprung um $-\pi/6$.
7. Zentrische Strechung um -0.5
8. Verschiebung in y-Richtung um 7.

Suchen Sie das allgemeine Abbildungsgesetz und bilden Sie den Punkt (4/3) *ab* (A = ..) *!*

Fortsetzung: Rückseite

19. *Verschaffen Sie sich Klarheit über die folgenden Begriffe:*

a) Affiner Raum
b) Parallelsystem
c) Homogene affine Transformation
d) Lineare Transformation
e) Lineare Hülle
f) Isomorphismus
g) Homomorphismus
h) Endomorphismus
i) Automorphismus
j) Kern
k) Erzeugendensystem
l) Projektion

20. *Wie werden Parallelsysteme transformiert?*

21. *Sei* P *gegeben bezüglich der Basis* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *und dem Ursprung* O. *Was sind die Koordinaten von* P *bezüglich der Basis* $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ *und dem Ursprung* O' *?*

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad O(0/0), \quad O'(4/1), \quad P(7/6)$$

Suchen Sie das allgemeine Transformationsgesetz.

22. *Stellen Sie die folgenden Abbildungen mit Hilfe von Matrizen dar:*

a) Nullabbildung
b) Identität
c) Spiegelung an der 2. Achse
d) Drehung in der (x_1, x_2)-Ebene um $\pi/5$
e) Projektion auf die 1. Hauptebene

23. *Ist eine Drehung eine lineare Abbildung? (Beweis!)*

24. *Was stiften die folgenden Matrizen für Abbildungen (Rang!)? Bilden Sie jeweils* $\vec{v}$ *ab!*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 15 / 5 **Klasse: ....**

Thema des Kapitels: Funktionen $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, algebraische Kurven, Koordinaten- und Vektorraumtransformationen ISB, WIR90

---

25. *Das Koordinatensystem wird um den Ortsvektor von* P(4/5.5) *verschoben und anschliessend um* $\phi = \pi/3$ *gedreht. Konstruieren Sie die Abbildungsmatrix (homogene Koordinaten). Was ist die Matrix der inversen Abbildung? Welche Matrix entsteht, wenn nicht das Koordinatensystem sondern die Punkte der Ebene nach obigem Verfahren abgebildet werden?*

26. *Was bildet die Menge der linearen Transformationen eines Vektorraumes der Dimension* n *über* $\mathbb{R}$ *für eine algebraische Struktur?*

27. *Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen* $F: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^k$ *linear sind:*

    27.1. $F(x, y) = (x + y, x)$

    27.2. $F(x, y) = x \cdot y$

28. *Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:*

    28.1. $\{1, x, x^2, x^3, x^4, ...\}$ ist eine Basis des Vektorraumes der Polynome in x über $\mathbb{R}$.

    28.2. Differentiation und Integration stiften lineare Abbildungen über dem Vektorraum der Polynome in x über $\mathbb{R}$.

29. $\mathbb{R}^3$ *ist gegeben einerseits durch die Basis* $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\} = \{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$

    und andererseits durch die Basis $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\} = \{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\}$.

    Konstruieren Sie die Abbildung, die $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ *überführt in* $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$.

30. *Die Ortsvektoren der Ebene werden nach folgender Transformationsregel abgebildet:*

    $\vec{x'} = A\,\vec{x} + \vec{b}$, *ausgeschrieben:*

    $$\begin{pmatrix}x_2'\\x_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

    Schreiben Sie die Abbildung in homogenen Koordinaten und bilden Sie folgendes Quadrat ab:

    $\square\ P_1P_2P_3P_4 = \square\ (2/2)\ (-2/2)\ (-2/-2)\ (2/-2)$

    Bilden Sie ebenso Inkreis und Umkreis ab! (Skizze mit ***Mathematica****!)*

Fortsetzung: Rückseite

31. *Was haben homogene affine Transformationen und reguläre lineare Transformationen miteinander zu tun?*

32. *Welcher Zusammenhang besteht zwischen Kern und Bild einer linearen Transformation?*

33. *Bestimmen Sie Kern und Bild von* A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

34. *Sei* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ *gegeben. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von* $A\,\vec{x} = \vec{b}$ (A *von* 33.)

35. *Lösen Sie die Gleichung* $A\,\vec{x} = \vec{b}$ *für folgende Werte:*

35.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

35.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

35.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

36. *Bilden Sie das Koordinatennetz ab durch folgende Abbildungen (Skizze mit* ***Mathematica****):*

36.1. $A = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & \sin(\pi/6) \\ -\sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix}$

36.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

36.3. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

36.4. $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$

37. *Experimentieren Sie mit eigenen Abbildungen!*

Bemerkung: Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 16 / 1

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Komplexe Funktionen $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$

ISB, WIR90

---

1. *Bestimmen Sie den maximal möglichen Definitionsbereich und Wertebereich:*

1.1. $f(z) = \cos(x) + i\ y^2$ 1.2. $f(z) = a\ z + b$

1.3. $f(z) = \ln(1-x^2-y^2) + e^x$ 1.4. $f(z) = z^2 - 1/z$

2. *Verschaffen Sie sich Klarheit über die folgenden Begriffe:*

a) Komplex differenzierbar b) Holomorphe Funktion

c) Regulär analytisch d) Komplexer Weg

e) Spur eines Weges f) Geschlossener Weg

g) Inverser Weg h) Differenzierbarer Weg

i) Bildweg j) Konforme Abbildung

k) Cauchy-Riemannsche D'Gl. l) Möbius-Transformation

3. *Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen holomorph sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung:*

2.1. $f(z) = az+b$ 2.2. $f(z) = az^2+bz$

2.3. $f(z) = 2z^4 - 3z^2 + 4z$ 2.4. $f(z) = 2z + (z^3 - z^2 + 2z)^2$

2.5. $f(z) = (2z^3 - 3z)(-z^4 + z^2)$ 2.6. $f(z) = \dfrac{4\ z^2 - z}{z + 2}$

4. *Beschreiben Sie die folgenden Kurven als komplexe Wege in $\mathbb{C}$:*

4.1. Einheitskreis 4.2. Strecke von z_1 nach z_2

4.3. Parabel durch $z_1 = -1+i$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1 + i$ zwischen z_1 und z_2

Was ist jeweils der inverse Weg?

5. *Sei* γ: $t \mapsto z(t) = t^2 + i(t + 1)$, $I = [0, 1]$, $t \in I$ *sowie* $f(z) = z^2$. *Dazu sei* ζ: $t \mapsto z(t) = \sin(t) + i\cos(t)^2$, $t \in I$.
Skizzieren Sie die folgenden Graphen und bestimmen Sie die folgenden Werte:

5.1. Graphen von γ und ζ sowie die Graphen der Bildwege unter f

5.2. Winkel zwischen den Kurven in den jeweiligen Anfangspunkten

Fortsetzung: Rückseite

6. *Bestimmen Sie für* γ *und* ζ *die folgenden Integrale:*

6.1. $\int_{\gamma} z(t)\ dt$ 6.2. $\int_{\zeta} z(t)\ dt$

6.3. $\int_{f(\gamma)} z(t)\ dt$ 6.4. $\int_{f(\zeta)} z(t)\ dt$

6.5. $\int_{\gamma} f(z(t))\ dt$ 6.6. $\int_{\zeta} f(z(t))\ dt$

7. *Wie kann man eine Potenz mit komplexem Exponenten und komplexer Basis definieren?*

8. *Beweisen Sie die folgende Formel mit Hilfe der Additionstheoreme für* sin *und* cos *!*

$$e^z\ e^w = e^{z+w}$$

9. *Beweisen Sie:* $e^z = e^{z+2n\pi i}$

10. *Sei* $f: z \mapsto f(z) = e^z$. *Skizzieren Sie das Koordinatennetz, das durch die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten gebildet wird. Finden Sie heraus, wie die Funktion* f *dieses Netz abbildet!*

11. *Betrachten Sie* $w = e^z$ *auf* $\gamma: t \mapsto z(t) = i\ t$, $t \in [0, 2\pi]$. *Bestimmen Sie diejenigen* w *mit* $w^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Wie nennt man die gefundenen Lösungen* w *?*

12. *Beantworten Sie:* a) Was sind die Eulerschen Identitäten?

b) Wie ist der komplexe Logarithmus definiert?

13. *Beweisen Sie* ($z \in \mathbb{C}$ *!) :*

13.1. $\cos'(z) = -\sin(z)$ 13.2. $\sin'(z) = \cos(z)$

13.3. $\cos(-z) = \cos(z)$ 13.4. $\sin(-z) = \sin(z)$

13.5. $\cos(z+2\pi) = \cos(z)$ 13.6. $\sin(z+2\pi) = \sin(z)$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzufüren sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

14. *Begründen Sie folgende Aussagen:*

    14.1. $\cos(z \pm \omega) = \cos(z)\cos(\omega) - \pm \sin(z)\sin(\omega)$

    14.2. $\sin(z \pm \omega) = \sin(z)\cos(\omega) \pm \cos(z)\sin(\omega)$

    14.3. $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ *(Verwenden Sie 14.1.)*

    14.4. $\tan'(z) = 1/\cos^2(z)$ 14.5. $\mathrm{ctg}'(z) = -1/\sin^2(z)$

15. *Suchen Sie in* $\mathbb{C}$ *die Nullstellen von* $\sin(z)$ *und* $\cos(z)$ *!*

16. *Untersuchen Sie das Abbildungsverhalten von* $\cos(z)$ *!*

    Hinweis: $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = h(g(f(z)))$, $f(z) = i\,z$, $g(z) = e^z$ etc.

    Bilden Sie zuerst durch f *folgendes Halbstreifen-Gitter ab:*

    $$\{z \in \mathbb{C} / \; z = a + ib \wedge a \in \mathbb{N}/10 \wedge b \in \mathbb{N}/10 \wedge 0 \le a \le 1 \wedge b \le 0\}$$

    Schalten Sie dahinter g *und dahinter* h .

17. *Was bedeuten folgende Symbole?*

    17.1. $\overline{\mathbb{C}}$ 17.2. $\dot{\mathbb{C}}$

18. *Sei* f_M *eine Möbiustransformation. Zeigen Sie:*

    f_M bildet $\overline{\mathbb{C}}$ bijektiv auf $\overline{\mathbb{C}}$ ab.

19. *Sei F die Figur in* $\mathbb{C}$ *bestehend aus Einheitskries um* 0, *dazu Kreis mit Radius* 2 *um* 0, *dazu Quadrat* $\square$ $(2+2i, -2+2i, -2-2i, 2-2i)$ *und dazu noch die Diagonale* $(-2-2i, 2+2i)$. *Bilden Sie F wie folgt ab:*

    1) $z \mapsto z + a$, $a = 4 + 3i$. Darauf gesetzt:

    2) $z \mapsto b \cdot z$, $b = 2\,e^{i\phi}$, $\phi = \pi/6$. Darauf gesetzt:

    3) $z \mapsto \frac{1}{z}$ (Inversion am Einheitskreis).

    Was ist das Bild der zusammengesetzten Abbildung?

Fortsetzung: Rückseite

20. *Bestimmen Sie alle möglichen Fixpunkte:*

$$f_M(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} = z$$

21. *Gegeben ist die Möbiustransformation* $f_M(z) = \dfrac{z + i\,t}{i\,z + t}$

Bestimmen Sie: $|f_M(z)| = ?$

22. *Gegeben ist die folgende Möbiustransformation:* $f_M(z) = \dfrac{z + i}{i\,z + 1}$

Was ist das Bild des Gitternetzes $\{z \in \mathbb{C} / z = a + i\,b \wedge a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}\}$ *?*

23. *Der Weg* γ *sei gegeben durch* $f(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
Welche Wege werden dann durch die folgenden Funktionen beschrieben?

23.1. $f'(t) = \dfrac{df}{dt}$ 23.2. $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)\, d\tau$

24. *Erstellen Sie die Skizzen der Graphen folgender Funktionen (Computer!):*

24.1. $f(t) = (4\cos(t) + \cos(4t)) + i\,(4\sin(t) + \sin(4t))$

24.2. $f(t) = \sin(2t) + i\sin(t)$

24.3. $f(t) = \sin(3t) + i\sin(t)$

24.4. $f(t) = \cos(t) + i\sin(t/2)$

24.5. $f(t) = (2\cos(t) + \cos(2t)) + i\,(2\sin(t) + \sin(2t))$

24.6. $f(t) = (6\cos(t) + \cos(6t)) + i\,(6\sin(t) + \sin(6t))$

25. *Leiten Sie aus* $z = r\,e^{i\phi} \Rightarrow z^n = r^n\,e^{i\,n\phi} = r^n\,(\cos(n\phi) + i\sin(n\,\phi))$ *und dem binomischen Lehrsatz die Formeln von De Moivre her. Schreiben Sie für* $n = 2$ *und* $n = 3$ *diese Formeln explizit auf!*

26. *Was sind die n-ten Einheitswurzeln? Wieviele gibt es und wie liegen sie geometrisch?*

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

---

27. *Bestimmen Sie die Fourierentwicklung von* $\cos^n(t)$ *und* $\sin^n(t)$ *anhand folgender Beispiele:*

27.1. $\cos^2(t) = \ldots$ 27.2. $\cos^4(t) = \ldots$

27.3. $\sin^2(t) = \ldots$ 27.4. $\sin^4(t) = \ldots$

27.5. *Entwickeln Sie ebenso:* $\sin^2(t) + \sin(t) = \ldots$

Hinweis: *Benützen Sie* $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ *etc.* .

Repetitionsaufgaben:

28. *Stellen Sie die Lösungen folgender Gleichungen graphisch dar:*

28.1. $z^6 = 2 + 3\,i$ 28.2. $z^4 = i$

29. *Gelingt es Ihnen, das folgende Polynom zu faktorisieren?*

$$P(z) = 2\,z^4 - 19\,z^3 + 59\,z^2 - 54\,z - 18$$

30. *Was sagt der Hauptsatz der Algebra aus? - Was ist das Problem beim Beweis dieses Satzes?*

31. *Schreiben Sie die folgenden Polynome in der Summendarstellung:*

31.1. $P(z) = (z + c)(z + \overline{c})$ 31.2. $P(z) = (z - i)^n$

31.3. $P(z) = (z - 1)(z - 2)(z - 3)\ldots\ldots\ldots\ldots(z - n)$

31.4. $P(z) = (z - i)^2\,(z - 1 - i)\,(z + 5)^3$

31.5. $P(z) = (z - i)(z + i)$ 31.6. $P(z) = (\frac{z}{n} - n)^n$

31.7. $P(z) = (z - 1)^3\,(z + i)$ 31.8. $P(z) = (z - 1)\,(z + i)^3$

31.10. $P(z) = (z - 1)\,(z - (-1 + \sqrt{2}\,i))\,(z - (-1 - \sqrt{2}\,i))$

32. *Ein Polynom hat folgende Nullstellen:* $x_1 = 3,\ x_2 = 5,\ x_3 = 7,\ x_4 = 2 + 3i,\ x_5 = \overline{x_4}$.
Ausserdem gilt: $P(0) = 1$. *Wie lautet das Polynom explizit in Summendarstellung?*

33. *Was sind die Fixpunkte der Abbildung "Inversion am Einheitskreis"?*

Fortsetzung: Rückseite

34. *Berechnen Sie die Summe der n-ten Einheitswurzeln:*

a) Für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

b) Allgemein für $n = k \in \mathbb{N}$

35. *Zerlegen Sie in Partialbrüche:* $Q(z) = \dfrac{z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 3z - 1}{z^3 - 1}$

36. *Nehmen Sie eine Möbiusfunktion eigener Wahl und konstruieren Sie mit* ***Mathematica*** *die Bilder von Kreisen, horizontalen, vertikalen und allgemeinen Geraden in* $\mathbb{C}$.
Studieren Sie ebenfalls das Abbildungsverhalten von weiteren Möbiusfunktionen.

37. *Bilden Sie mit Hilfe von* ***Mathematica*** *geometrische Muster in* $\mathbb{C}$ *durch die folgenden Funktionen ab:*

37.1.	$f(z) = z^2$	37.2.	$f(z) = z^3$
37.3.	$f(z) = 1/z$	37.4.	$f(z) = \dfrac{z^2}{\lvert z\rvert}$
37.5.	$f(z) = z^2 + (4 - 3\,i)$		

Als geometrische Muster nehme man Parkettierungen von $\mathbb{C}$ *durch regelmässige 3-, 4-, 6-Ecke etc. .*

38. *Wie bildet* $f(z) = \dfrac{4z + 6}{3z + 7} + \dfrac{3z - 7}{4z - 6}$ *Kreise und Geraden in* $\mathbb{C}$ *ab? (**Mathematica!**)*

39. *Was können Sie aus 38 für komplexe gebrochen rationale Funktionen folgern?*

40. *Sei* $f(z) = z^2 + (2 - i)$. *Bilden Sie damit die Iterationsfolge:*

$$f_o(z) = f(z),\quad f_1(z) = f(f(z)) = f(f_o(z)),\quad f_2(z) = f(f(f(z))) = f(f_1(z)),\ \ldots,\ f_{n+1}(z) = f(f_n(z))$$

Studieren Sie das Verhalten der Punkte von $\mathbb{C}$ *bei dieser Abbildungsfolge!*

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 17 / 1

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Folgen, Reihen, Potenzreihen

ISB, WIR90

---

1. *Berechnen Sie* a_n :
   - 1.1. $<a_n> = [1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ ......]$
   - 1.2. $<a_n> = [-1,\ 1/2,\ -1/3,\ 1/4,\ -1/5,\ ......]$
   - 1.3. $<a_n> = [1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ ......]$
   - 1.4. $<a_n> = [1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ .....]$
   - 1.5. $<a_n> = [1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ ......]$
   - 1.6. $<a_n> = [-5,\ 5,\ -6,\ 7,\ -9,\ 12,\ -17,\ 25,\ ......]$

2. *Geben Sie jeweils das allgemeine Glied für die erste und zweite Partialsummenfolge:*
   - 2.1. $<a_n> = <n>$
   - 2.2. $<a_n> = <2n+6>$

3. *Geben Sie das allgemeine Glied für die erste und zweite Differenzenfolge:*
   - 3.1. $<a_n> = <n^2>$
   - 3.2. $<a_n> = <n^3>$
   - 3.3. $<a_n> = <n^5>$

4. *Berechnen Sie (Kapital K, Zinsfuss p, Jahr n, Rente R):*
   - 4.1. $K_n = ?$ $\quad r = 1 + p/100,\quad K_o$ fix, $\quad K_{n+1} = K_n \cdot r$.
   - 4.2. $n = ?$ $\quad K_n = 2\ K_o$.
   - 4.3. $R_{n+1} = R_n + K_n = ?$ $\quad R_o = K_o$.

5. *Um welchen Typ handelt es sich?*
   - 5.1. $a_n = (-1/3)^n$
   - 5.2. $a_n = (1+1/n)^n$
   - 5.3. $a_n = 7-3n-(4-n)$
   - 5.4. $a_n = (\frac{n+1}{n})^7$

6. *Schreibe ein Programm zur numerischen Näherung:*
   - 6.1. $\sqrt{k} = ?$ $\quad k = 2\ ,\ 3,\ 4,\ 5,\ ....$
   - 6.2. $\sqrt[3]{k} = ?$ (Kann man einen vergleichbaren Algorithmus finden?)

Fortsetzung: Rückseite

7. *Berechnen Sie falls möglich den Grenzwert:*

7.1. $a_n = 3\cos(\Pi/2+n\Pi/4) + 2 \quad \rightarrow ?$

7.2. $a_n = \frac{a^n}{n!} \quad \rightarrow ?$

7.3. $|a_n|<1, \quad (a_n)^n \quad \rightarrow ?$

7.4. $4n^{(1/n)} + 2 + (1/n) \quad \rightarrow ?$

7.5. $7^{(2+3n)/n} \quad \rightarrow ?$

8. *Aufgaben aus* "Frank Ayres Jr.: Differential- und Integralrechnung, Schaum/ Mc Graw Hill", ***p. 220 ff****, nach* ***eigener Auswahl****. Oder vom selben Verlag:* "M.R. Spiegel: Einführung in die höhere Mathematik, SCHAUM", *Kap. 3 und als Fortsetzung Kap. 11.*

9. *Konvergiert* S_n *in folgenden Ausdrücken?* $S_n \rightarrow ?$

9.1. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 9.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

9.3. $a_n = a_1 + (n-1)d$ 9.4. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

9.5. $a_n = n/(3n+2)$ 9.6. $a_n = a_1 \cdot q_1^{\,n} - q_2^{\,n}$

10. *Berechnen Sie* S_n*:*

10.1. $a_n = n^2$ 10.2. $a_n = n^3$

11. *Beurteilen Sie die Konvergenz und Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:*

11.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ 11.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$

11.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{20}$ 11.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.7^{n+1}}{n-10}$

12. *Berechnen Sie* n *:*

$$\varepsilon = 10^{-3}, \quad \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (1/2^k) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (1/2^k) \right| < \varepsilon$$

Bemerkung: Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 17 / 3

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Folgen, Reihen, Potenzreihen

ISB, WIR90

---

13. *Beurteilen Sie die Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:*

13.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(- \frac{0.9}{n^2 - 2n + 3} \right)^n$

13.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

13.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

13.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{2n + 3}}$

13.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{3n^2 - 2} \right)^n$

13.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{3n^5 - 2} \right)$

13.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n-1}}$

13.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\,(n\,x)}{n^2}$

13.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

13.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

13.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,x)}{n^2}$

13.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a \frac{\cos(x)}{n^2} + b \frac{\sin(x)}{n^3}$

13.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n} e^{-2n\Pi} + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{-1}{n^2}}$

13.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + y^n}{n!}$

14. *Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Reihe, falls möglich:*

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(2m - 1)(2m + 1)}$$

15. *Berechnen Sie:*

15.1. $\int\limits_0^{2\Pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x)}{n^2}$

15.2. $\int\limits_0^{2\Pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,x)}{n^2}$

15.3. $\frac{d}{dx} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n\,x)}{2^n}$

16. *Berechnen Sie den Konvergenzradius:*

16.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

16.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x - c)^n$

16.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n\,x^n}{3^n}$

16.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3 - n^2)\,x^n}{n^5}$

16.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\,x^n}{n!}$

Fortsetzung: Rückseite

17. *Entwickeln Sie* ln(2) *bis zum* 4. *Glied in eine Potenzreihe und geben Sie eine möglichst exakte obere Schranke für* $|R_4|$.

18. *Bis zu welchem Glied müssen Sie* ln(2) *entwickeln, bis die folgende Ungleichung erfüllt ist?*

$$|R_n| < 10^{-4}$$

19. *Zeigen Sie:* $f \in D^{(n+1)} \Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_o)^k + R_k(x, x_o) \wedge a_k = \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}$

20. *Sei gegeben:* $f(x) = e^x$, $x_o = 0$.

Berechnen Sie: a) Taylorpolynom $T_{10}(x_o, x)$ sowie

b) Fehler $R_{10}(x_o, x)$

21. *Berechnen Sie bis zur angegebenen Genauigkeit:*

$$\sin(1) = ? \quad |R_n| < 10^{-4}$$

22. *Kontrollieren Sie:* $\sin(\Pi) = 0$. *Wie gross ist* n *mit* $|R_n| < 10^{-4}$ *?*

23. *Leiten Sie die Taylorentwicklung her:*

23.1. $f(x) = x^2$, $x_o = 1$

23.2. $f(x) = \sin(x)$, a) $x_o = 0$ *(Wie verhält sich* R_n *?)*

b) $x_o = 1$

c) $x_o = \Pi$

23.3. $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$

23.4. $f(x) = \tan(x)$

23.5. $f(x) = \arctan(x)$ *Berechnen Sie dann* Π *aus* $\frac{\Pi}{4} = \arctan(1)$ *!*

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 18 / 1 **Klasse: ....**

Thema des Kapitels: Fourierreihen ISB, WIR90

---

1. *Repetitionsaufgaben:*

1.1. Berechnen Sie mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung:

a) $\int_a^b e^{-x^2}\,dx = F(a, b)$

b) $F(-1, 1)$ auf 4 Stellen genau
(Hinweis: Restgliedabschätzung einer alternierenden Reihe!)

c) $\int_0^2 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

d) $(1 + x)^r = ?\ ,\ r \in \mathbb{R},\ |x| < 1$ (Binomische Reihe)

1.2. Verwenden Sie die Taylorentwicklung um zu zeigen:

a) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = f(x)$

b) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

2. *Beantworten Sie die folgenden Fragen:*

2.1. Was ist eine trigonometrische Reihe?

2.2. Ist eine trigonometrische Reihe eine T-periodische Funktion?

2.3. Was sind die Eulerschen Formeln für die Fourierkoeffizienten?

2.4. Was ist zur Konvergenz einer Fourierreihe zu sagen?

2.5. Was ist eine normale Funktion?

2.6. Was ist eine Cosinusreihe?

2.7. Was ist die Parsevalsche Gleichung?

3. *Bestimmen Sie die Fourierreihe und stellen Sie sie dar mit **Mathematica**:*

3.1. $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \Pi \\ 0 & \Pi \le t < 2\Pi \end{cases}, \quad T = 2\Pi$

3.2. $f(x) = x$ für $-\Pi < x \le \Pi$, $f(x) = f(x+2\Pi)$

3.3. Begründen Sie die Parsevalsche Gleichung!

Fortsetzung: Rückseite

4. *Bestimmen Sie die Fourierreihe und stellen Sie sie dar mit* ***Mathematica:***

   4.1. $f(x) = |x|$ für $-\Pi \leq x < \Pi$, $f(x) = f(x+2\Pi)$

   4.2. $f(x) = x^2$ für $-\Pi \leq x < \Pi$, $f(x) = f(x+2\Pi)$

5. *Machen Sie eigene Beispiele von Fourierreihen mit eindrücklichen Darstellungen!*

6. *Gegeben seien* **n** *Messpunkte einer Kurve. Wie lässt sich praktisch die dadurch vermutlich gegebene Funktion in eine Fourierreihe entwickeln?*

7. *Was ist ein* ***Amplitudenspektrum*** *und ein* ***Phasenspektrum****?*

8. *Was ist eine* ***Fouriertransformation****, was die* ***inverse*** *Fouriertransformation, was ist die* ***Plancherel****-Gleichung?*

9. *Was beschreibt die Fouriertransformierte?*

10. *Berechnen Sie die Fouriertransformierte:*

    10.1. $f(x) = \begin{cases} \cos(\omega t) & -a \leq t \leq a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$

    10.2. $f(x) = \begin{cases} e^{i\omega t} & -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

    10.3. $f(x) = e^{-at}$

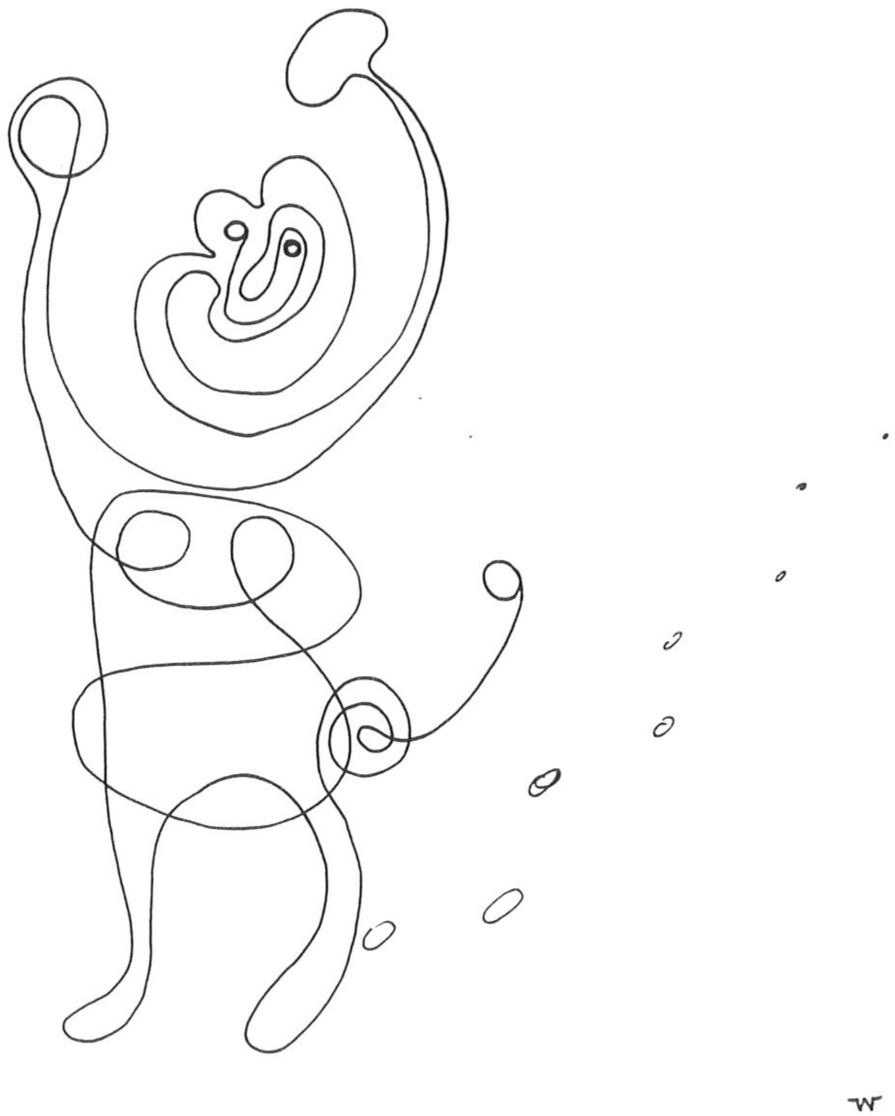
11. *Was ist Gibbs Phänomen? Untersuchen Sie Gibbs Phänomen mit* ***Mathematica:***

    11.1. $f(t) = t$ für $t \in (-\Pi, \Pi)$, $f(t) = f(t+2\Pi)$

    11.2. $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0,\ 1] \\ 0 & t \in (1,\ 2] \end{cases}$, $f(t) = f(t + 2)$

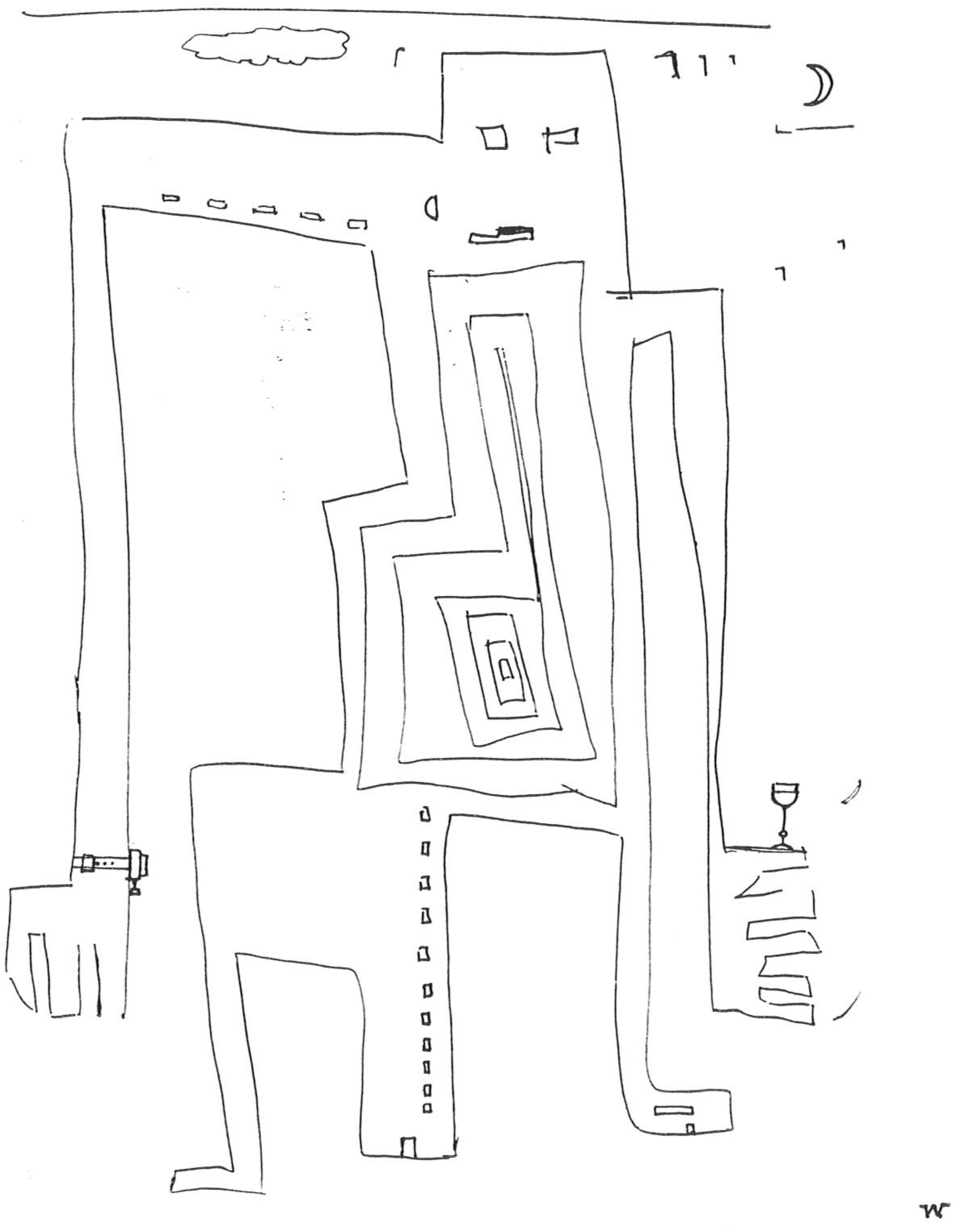
Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Ist das mathematisch
wohl ein Gebiet?



Kurzes technisches Lachen:
"Ha!"

"Auf das nächste Mal Seite 54 lesen!"
- "Aus welchem Buch bitte?"
"Das Buch? Ah! - Den Titel hab ich vergessen. Doch Sie werden das Buch bestimmt selber finden können. Ich weiss nur noch, dass es 1962 in Wien erschienen ist."



Mitternachtstanz des Wolkenkratzermenschen

Uebungen - Praktikum Kap. 19 / 1

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Infinitesimalrechnung im $\mathbb{R}^n$

ISB, WIR90

---

1. *Was ist eine gebrochen rationale Funktion im* $\mathbb{R}^n$ *?*

2. *Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen (Gitternetz oder Höhenkurven):*

   2.1. $f(x, y) = 4x - 2y + 6$ 2.2. $f(x, y) = x^2 + y^2$

   2.3. $f(x, y) = x^2 - y^2$ 2.4. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   2.5. $f(x, y) = x \cdot y$ 2.6. $f(x, y) = \sin(x \cdot y)$

3. *Definieren Sie die* Stetigkeit *für Funktionen* $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.

4. *Wo sind die folgenden Funktionen stetig?*

   4.1. $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$ 4.2. $f(x, y) = \sin(\dfrac{1}{x^2 + y^2})$

   4.3. $f(x, y) = \dfrac{x\,y}{x^2 + y^4}$ 4.4. $f(x, y) = \dfrac{x\,y}{x^2 + y^2}$

5. *Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen:*

   5.1. $f(x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 5x_1\,x_2 + 3x_2 + 4$

   5.2. $f(x, y) = \arctan(x/y) + \sin(x)$

6. *Berechnen Sie die zweiten partiellen Ableitungen:*

   6.1. $f(x, y) = \sin(x^2\,y)$ 6.2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\,{x_2}^3 + {x_1}^2\,x_2\,{x_3}^3$

7. *Berechnen Sie die dritten partiellen Ableitungen:*

   7.1. $f(x, y) = 3x^4\,y^3 + 2x^2\,y^4$

   7.2. $f(x, y) = x^4 + x^3\,y + x^2\,y^2 + x\,y^3 + y^4$

   7.3. $f(x, y) = x^3\,y^3$

   7.4. $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + 2x\,y + y\,z + z^2\,x^2\,y^2 + z\,y^3$

Fortsetzung: Rückseite

8. *Berechnen Sie die Steigung in Richtung α in P :*

$f(x, y) = s^2 + \sin(x\,y) + x\,y^2$, $P = (1\,/\,3)$, $\alpha = \Pi/6$ und $\alpha = \Pi/3$.

9. *Gegeben sei* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. *Was bedeutet:*

a) Differential von f

b) f differenzierbar in G

c) Richtungsableitung von f

d) f hat lokales Extremum in P_o

10. *Wo hat f eine Tangentialebene?*

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \lor y = 0 \\ |x| & \text{für } |x| = |y| \end{cases}$$

11. *Berechnen Sie die Tangentialebene von f in P_o:*

$f(x, y) = 2x^2 + x\,y - 3x + 2$

12. *Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Extrema, Sattelpunkte etc.:*

12.1. $f(x, y) = x^3$

12.2. $f(x, y) = x\,y$

12.3. $f(x, y) = x^2 + y^2$

12.4. $f(x, y) = x^2 - y^2$

12.5. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x\,y - 4$

12.6. $f(x, y) = \sin(x\,y)$

12.7. $f(x, y) = \sin(x\,y) - \cos(x + y)$

12.8. $f(x, y) = e^{x+y} - e^{x\,y}$

13. *Bestimmen Sie das totale Differential:*

13.1. $f(x, y, z) = x\,y + x^2 + y \cdot \sin(z)$

13.2. $f(x, y) = \sin(x\,y) - e^{x+y}$

13.3. $f(x, y) = e^{x+y} \cdot \sin(x\,y)$

14. *Bestimmen Sie bei den Funktionen von 13. ebenfalls* d^2f.

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

15. *Berechnen Sie in Polarkoordinaten:*

 15.1. $u_x^2 + u_y^2$ 15.2. Laplace-Operator Δu

16. *Fehlerrechnung: Berechnen Sie die Toleranzschranken des fehlerbehafteten Resultats der Rechnung!*

 16.1. Gegeben: Dreieck ABC. Von der Feldmessung weiss man:
 $a = 364.76 \pm 0.05$ m
 $b = 402.35 \pm 0.05$ m
 $\gamma = 68^o 14' \pm 4'$ Wie gross ist $(|\overline{AB}| \pm ?)$?

 16.2. Gegeben: $W = \frac{1}{2} R\, S^2\, (R - S) + (q\, \frac{(R + S)}{(R - S)})$
 $R = 46.582 \pm 0.046$ n (Messung)
 $S = 45.189 \pm 0.038$ n (Messung)
 $q = 1.32915 \pm 0.00002$ n^4 (aus dem Tabellenbuch)

17. *Linearisieren Sie die folgenden Funktionen für kleine* x *:*

 17.1. $f(x) = \frac{1}{1 + x}$ 17.2. $f(x) = (1 + x)^k$

18. *Berechnen Sie die folgenden Integrale:*

 18.1. $\int_0^1 x\, y^{\alpha}\, dy\ ,\ x = 5$ 18.2. $f(x) = \int_0^1 \frac{y\, dy}{\sqrt{1 - x^2\, y^2}}$

19. a) Was ist ein Doppelintegral? b) Was ist ein Gebietsintegral?

 c) Was ist ein Volumenintegral? d) Wie berechnet man ein Doppelintegral?

20. *Berechnen Sie die Ableitungen* F'(x) *!*

 20.1. $F(x) = \int_0^x \sin(x \cdot y)\, dy$ 20.2. $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin(x \cdot y)\, dy$

21. *Gegeben ist* $F_n(x) = \int_0^x f(y) \cdot \frac{(x - y)^n}{n!}\, dy$. *Beweisen Sie:* $F_n'(x) = F_{n-1}(x)$.

22. *Sei* $f(x, y) = a$ *auf* G. $V = \int_G f(x, y)\, dG = ?$

Fortsetzung: Rückseite

23. *G liegt in der* (x, y)*-Ebene und ist begrenzt durch* 0 *und* b *(x-Richtung) sowie* 0 *und* a *(y-Richtung).* $z = f(x, y) = 1+y$. *Berechnen Sie:*

$$V = \int_G z \, dG = ?$$

24. *Was ist Gebietsdifferentiation?*

25. *Berechnen Sie* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, dx$ *mit Hilfe des Umwegs über ein Doppelintegral!*

26. *Berechnen Sie:*

26.1. $\displaystyle\int_G x^2 - 3xy - 7 \, dG$, G = Rechteck, $x \in [x_1, x_2]$, $y \in [y_1, y_2]$.

26.2. $\displaystyle\int_G \frac{1}{x^2 + y^2} \, dG$, G begrenzt durch $y = \frac{1}{2} x$, $y = x$ sowie Senkrechte $x = 1$ und $x = 2$.

26.3. $\displaystyle\int_G (x + y) \, dG$, G = Viertelskreis um (0/0) im 1. Quadrant mit Radius $= r$.

26.4. $\displaystyle\int_G dG$, G begrenzt durch $y = x$ und $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

26.5. $\displaystyle\int_G (x^2 + y^2) \, dG$, G = Kreisgebiet um (0, 0) mit Radius r.

27. *Berechnen Sie das Volumen einer Kugel um* (0/0) *mit Radius* R *!*

28. *Vermischte Aufgaben :*

28.1. $f(x, y, z) = x^2 \sin(x + y) + y + \text{cox}(z)$. Extrema?

28.2. $\displaystyle\int_V x^2 + y^2 + z^2 \, dV = ?$
a) V= Pyramide mit Eckpunkten (2/0/0), (0/2/0), (0/0/2), (0/0/0).
b) V = Kugel um (0/0/0) mit R = 4.

28.3. $\displaystyle\int_V dV = ?$, V begrenzt durch (x/y)-Ebene und $z = 4 - x^2 - y^2$.

<u>Bemerkung:</u> **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.** *Falls möglich, sind die Resultate mit* **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Thema des Kapitels: Vektoranalysis ISB, WIR90

---

1. *Machen Sie sich die Bedeutung folgender Begriffe klar:*

a) Diff'bare Vektorfunktion	b) Stetige Vektorfunktion
c) Differential eines Vektors	d) Skalarfeld
e) Vektorfeld	f) Stationäres Feld
g) Homogenes Feld	h) Zentralfeld
i) Feldlinie	j) Hamilton-Operator (Nabla-Operator)
k) Laplace-Operator	l) Gradient
m) Stationärer Punkt	n) Divergenz
o) Rotation	p) Richtungsableitung
q) Niveaufläche	r) Krümmung
s) Krümmungsradius	t) Torsion
u) Begleitendes Dreibein	v) Vektorintegral
w) Kurvenintegral	x) Potentialfeld
y) Konservatives Feld	z) Gradientenfeld
α) Potential	β) Fluss
γ) Mittlerer Fluss	δ) Quellenstärke
ε) Satz von Gauss	ζ) Satz von Stockes
η) Satz von Green	ϑ) Formeln von Green

2. *Berechnen Sie die nachstehenden Ausdrücke, wenn die folgenden Funktionen resp. Vektorfunktionen gegeben sind:*

$$f(t) = \cos(t)\,,\quad g(t) = t^2 - 2\sin(t) + 1\,,\quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ \sin(t) \end{pmatrix},\quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ e^t \\ t^3+1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} t^2-t-1 \\ t^2+2t \\ t^2-2t \end{pmatrix}$$

2.1. $(\vec{x}(t) + \vec{y}(t))'$ 2.2. $<\vec{x}(t), \vec{y}(t)>'$

Fortsetzung: Rückseite

2. *Fortsetzung:*

2.3. $(\vec{x}(t) \times \vec{y}(t))'$ 2.4. $(f(t) \cdot \vec{x}(t))'$

2.5. $<\vec{x}(t), (\vec{y}(t) \times \vec{z}(t))>'$ 2.6. $(\vec{x}(t) \times (\vec{y}(t) \times \vec{z}(t)))'$

2.7. $d(<\vec{x}(t), \vec{y}(t)>)$ 2.8. $d(\vec{x}(t) \times \vec{y}(t))$

3. *Entscheiden Sie, um welche Art es sich bei den folgenden Feldern handelt und beschreiben Sie gegebenenfalls das Feld:*

3.1. ϕ: $(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) = (\sin(t) + 2)/(x^2 + y^2 + z^2)$

3.2. $\vec{u}$: $(x, y, z, t) = \vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{x}$

3.3. $\vec{w}$: $(x, y, z) = \vec{w}(x, y, z) = \vec{\text{const.}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.4. Coulombfeld einer Punktladung

3.5. Gravitationsfeld des Mondes

3.6. Geschwindigkeitsfeld von strömendem Wasser in einem Bach, $v = 30$ km/h

3.7. Geschwindigkeitsfeld eines um die z-Achse drehenden homogenen Körpers bei 300 U/min und einem Körperradius von 2.00 m

4. *Berechnen Sie den Gradienten, die Divergenz des Gradienten sowie die Rotation des Gradienten von ϕ und entscheiden Sie, wo die Richtungsableitung 0 ist und ebenso wo sie maximal ist:*

4.1. $\phi(x, y) = x \cdot y$ 4.2. $\phi(x, y) = x^2 + y^2$

Wählen Sie $D_\phi = \{(x, y) | \; x^2 + y^2 \leq 9\}$

5. *Berechnen Sie* $\text{grad}(\phi)$, $|\text{grad}(\phi)|$ *und beschreiben Sie die Niveaulinien:*

5.1. $\phi(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 5.2. $\phi(x, y, z) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

6. *Verifizieren Sie:*

6.1. $\text{rot}(\text{grad}(\phi)) = \vec{0}$ 6.2. $\text{div}(\text{rot}(\vec{a})) = 0$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

---

7. *Gegeben ist ϕ, ψ, $\vec{u}$ und $\vec{v}$.*

$$\phi(x, y, z) = \sin(x^2+y^2+z^2) \quad . \qquad \psi(x, y, z) = x \cdot y + 2\, x^2 - y \; .$$

$$\vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 - z \\ \sin(x\ y) \\ y + z \end{pmatrix} \quad , \qquad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 - z^2 \\ 1 + x + y \\ \cos(x) - y \end{pmatrix} \; .$$

Berechnen Sie damit die nachstehenden Ausdrücke:

7.1.	$\nabla\, (\phi + \psi)$	7.2.	$< \nabla, \vec{u} + \vec{v} >$
7.3.	$\nabla \times (\vec{u} + \vec{v})$	7.4.	$< \nabla, \phi \cdot \vec{u} >$
7.5.	$\nabla \times (\phi \cdot \vec{u})$	7.6.	$< \nabla, \vec{u} \times \vec{v}) >$
7.7.	$\nabla \times (\vec{u} \times \vec{v})$	7.8.	$\nabla < \vec{u}, \vec{v} >$
7.9.	$\Delta\phi$	7.10.	$\nabla \times (\nabla\phi)$
7.11.	$< \nabla, \nabla \times \vec{u} >$	7.12.	$\nabla \times (\nabla \times \vec{u})$

8. *Gegeben ist folgende Kurve:*

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t\ \cos(t) \\ t\ \sin(t) \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \textit{sowie} \quad \vec{r}(t) = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

8.1. Berechnen Sie für $t = 0$ und für $t = 1$ die folgenden Grössen:

a) Krümmung
b) Krümmungsradius
c) Begleitendes Dreibein
d) Torsion
e) Torsionsradius
f) Tangente

8.2. Berechnen Sie:

a) $$\int_0^1 \vec{x}(t)\ dt$$

b) $$\int_{\vec{x}(0)}^{\vec{x}(1)} < 2t \cdot \vec{x}(t),\ d\,\vec{r} >$$

9. *Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral:*

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ 5z \\ 10x \end{pmatrix} , \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} , \quad t \in [0, 2] \, , \quad \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(2)} < \vec{F}(\vec{r}),\ d\,\vec{r} > \; = \; ?$$

10. *Berechnen Sie:*

$$\oint_\gamma < \vec{F},\ d\,\vec{r} > \quad \text{mit} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Fortsetzung: Rückseite

11. *γ sei der unten gegebene geschlossene Weg (ein Umlauf):*

$$\gamma: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Zudem sei: $\vec{F} = \operatorname{grad}(\phi)$ *mit* $\phi = ax + by + cz$.

Berechnen Sie für F(t) *das Wegintegral.*

12. *Zeigen Sie:*

    Die Überlagerung $\vec{F}_1 \pm \vec{F}_2$ von zwei Potentialfeldern $\vec{F}_1$ und F_2 ist wieder ein Potentialfeld.

13. *Zeigen Sie: Das Coulombfeld ist ein Potentialfeld. Geben die Potentialfunktion* ϕ *sowie die Feldstärke* $\nabla\phi$.

14. *Berechnen Sie das Linienintegral bei folgenden Angaben:*

$$\gamma: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2], \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} mx + p \\ nx + q \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie, ob für $m = n$ *das Feld konservativ ist!*

14. *Die Geschwindigkeit eines rotierenden Körpers ist* $\vec{v} = \omega \times \vec{r}$.
    Untersuchen Sie, ob das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ *konservativ ist.*

15. *Für einen stromdurchflossenen Leiter gilt:*

$$\vec{H} = (\vec{I}/2\pi) \times (\vec{e_r}/|\vec{r}|)$$

Wählen Sie $\vec{I} \,||\,$ z-Achse *sowie* γ: konzentrischer Kreisweg in einer Ebene $\perp$ Leiter

15.1. $\operatorname{rot}(\vec{H}) = ?$ 15.2. Ist $\int_\gamma \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = 0$?

16. *Ist* $\phi = k \cdot \arctan(y/x)$ *für* $x \cdot y \neq 0$ *eine Potentialfunktion?*

17. *Berechnen Sie mit* $dV = dA \cdot ds$ *aus dem Kugelvolumen die Kugeloberfläche.*

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzufüren sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

18. *Gegeben ist ein Rohr mit* $R = 10.0$ cm *Innendurchmesser. Durch das Rohr strömt ein Medium mit der Geschwindigkeit* $\vec{v}$. *Berechnen Sie den Fluss* Φ *durch die Querschnittsfläche* A :

    18.1. $\vec{v}$ = const. parallel zum Rohr, A sei 45° gegen die Senkrechte zum Rohr geneigt. (Medium: CO_2.)

    18.2. $\vec{v} = \vec{v}(r) = k\,(R^2 - r^2) \cdot \vec{e_m}$, r = senkrechter Abstand von der Rohrmitte, $\vec{e_m}$ = Einheitsvektor in Rohr-Richtung, A = Querschnittsfläche des Rohres. (Medium: Flüssigkeit Nr. X38U-14.)

19. *Gegeben Sei eine Kugeloberfläche* A. *Der Fluss* Φ *durch* A *sei bekannt. Was ist die Bedeutung von:*

    a) $\Phi > 0$ b) $\Phi = 0$ c) $\Phi < 0$?

20. *Der Körper K ist ein Würfel mit der Kantenlänge 1. Folgende Eckpunkte sind bekannt:*

    $P_1(0/0/0)$, $P_2(1/0/0)$, $P_3(0/1/0)$, $P_4(0/0/1)$.

    Berechnen Sie den Fluss von $\vec{u}$ *durch die Körperoberfläche!*

    20.1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 20.2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ 20.3. $\vec{u} = \begin{pmatrix} x^2 - 2\,e^y\,z^3 \\ \sin(y) + \cos(z)_3 \\ x + y^2 - 3\,z^3 \end{pmatrix}$

21. *Gegeben ist ein Rohr wie in Aufgabe 18. Berechnen Sie den Fluss der Rotation von* $\vec{v}$ *durch die Querschnittsfläche* A *senkrecht zur Rohrrichtung* y.

    21.1. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 21.2. $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sin(y)\,\cos((x^2+y^2)\pi/2R) \\ 1 + y + y^2 \\ \sin(y)\,\cos((x^2+y^2)\pi/2R) \end{pmatrix}$

    21.3. $\vec{v} = \begin{pmatrix} -x+y-z \\ x+y+z \\ x-y+z \end{pmatrix}$ 21.4. $\vec{v} = \begin{pmatrix} (R^2-x^2-y^2) \\ 1+1/(y^2+1) \\ {}^2(R^2-x^x-y^2) \end{pmatrix}$

22. *Gegeben ist* $h(x, y) = 2(x - y)$. *Integrieren Sie* $h(x, y)$ *über den Einheitskreis mit Zentrum im Ursprung.*

23. *Berechnen Sie das folgende Integral:*

    $\iint_A (\vec{u} \times d\vec{A})$ wobei A die Oberfläche des in Aufgabe 20 beschriebenen Einheitswürfels ist.

Fortsetzung: Rückseite

24. *Berechnen Sie die Quellenstärken in folgenden Feldern und untersuchen Sie, welche Felder quellenfrei sind. Berechnen Sie ebenso die mittlere Quellenstärke:*

24.1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \text{const.}$ 24.2. $\vec{u} = \omega \times \vec{r}$

24.3. Coulombfeld 24.4. Potentialfeld

24.5. $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 24.6. $\phi(x, y, z) = x^4+y^4+z^4$ (Potentialfkt.)

25. *Überführen Sie folgende Gleichung (von Maxwell) mit Hilfe des Satzes von Stockes in eine Form, in der die Rotation von* $\vec{E}$ *vorkommt:*

$$\int <\vec{E}, d\,\vec{s}> = \frac{d}{dt} \iint_A <\vec{B}, d\,\vec{A}>$$

27. *Suchen Sie Vektorfunktionen* $\vec{u}$ *mit folgender Eigenschaft:*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x, y, z) \\ u_2(x, y, z) \\ u_3(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \text{rot}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f, g \text{ gegeben.}$$

Betrachten Sie dann ein beliebig einfach zusammenhängendes Gebiet G *in der x/y-Ebene mit Rand* γ. *Berechnen Sie dann das folgende Integral:*

$$\oint_\gamma < \vec{u}, d\,\vec{r}>$$

Wählen Sie speziell G = *Einheitskreis um den Ursprung.*

28. *Probieren Sie, eine praktische, auf Rechnern einsetzbare Methode zu finden, mit deren Hilfe sich gestützt auf den Gradienten die lokalen Minima und Maxima von Flächen approximieren lassen. Machen Sie Anwendungsbeispiele.*

29. *Verifizieren Sie folgende Behauptungen:*

29.1. $\text{rot}(\vec{r}/r^2) = 0$ 29.2. $\text{div}(\vec{r}/r^2) = 1/r^2$

29.3. $\text{rot}\,(\vec{r} \times \text{rot}\,\vec{F}) + <\vec{r}, \nabla> \text{rot}\,\vec{F} + 2\,\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

29.4. $\iint_A < \text{grad}(\Phi), d\,\vec{A}> = \iiint_V \Delta(\Phi)\, dV$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 21 / 1

Klasse: ....

Thema des Kapitels: Gewöhnliche Differentialgleichungen — ISB, WIR90

---

1. *Was ist eine Differentialgleichung?*

2. *Versuchen Sie, je eine Lösung für folgende einfachen Differentialgleichungen zu finden:*

   2.1. $y' - y = 0$ 2.2. $y'' + y = 0$ (Typ Schwingungsgleichung)

   2.3. $-g = s(t)''$ (Fallgleichung in der Physik)

3. *Suchen Sie Ordnung und Grad der D'Gl.:*

   3.1. $y' - x^2 - y = 0$ 3.2. $(y'')^3 - 3(y')^2 + x = 0$

   3.3. $y''' \cdot y' - y = 0$ 3.4. $y' + 4xy - (y')^2 + 2 = 0$

   3.5. $x^{0.5} + y - y'' x + y''' x^2 = 0$

4. *Machen Sie sich die Definition folgender Begriffe klar:*

   a) Implizite Differentialgleichung b) Explizite D'Gl.

   c) Gewöhnliche D'Gl. d) Partielle D'Gl.

   e) D'Gl. 1. Ordnung f) Linienelement

   g) Richtungsfeld h) Integralkurve

5. *Welche Problemkreise sind bei den D'Gl. wichtig? (Z.B. Existenz einer Lösung etc. ....)*

6. *Machen Sie sich ein Bild des Verlaufs der Integralkurve, indem Sie das Richtungs- oder Tangentenfeld skizzieren:*

   6.1. $y' = -x/y$ 6.2. $y' = x/y$

   6.3. $y' = y/x$ 6.4. $y' = y/(2x)$

   6.5. $y' = x^2/2 + 2$ 6.6. $y' = 1/2\ x^{-0.5}$

   6.7. $y' = x\ y$ 6.8. $y' = |x|^{0.5}$

   6.9. $y' = (|x|+1)^{0.5}$ 6.10. $y' = 10x$

   6.11. $y' = x^2 + y^2$ 6.12. $y' = x + y$

Fortsetzung: Rückseite

7. *Verifizieren Sie, ob die angegebene Funktion wirklich Lösung der zugehörigen D'Gl. ist!*

7.1. $t \cdot \dfrac{\partial u}{\partial t} + x \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \forall t,x\,, \qquad u(x,\,t) = e^{t^2/x^2}$

7.2. $y''(t) + y(t) = \cos(2t)\,, \qquad y(t) = 2\sin(t) - (1/3)\cos(2t)$

Um was für Typen von D'Gl. handelt es sich?

8. *In der Ökonomie trifft man folgende D'Gl.:* $\dfrac{\partial G}{\partial x} = \dfrac{G}{x}\,.$

x	:	Produktionsmenge
$G(x)$	:	Gesamtkosten
G/x	:	Durchschnittskosten
$\partial G/\partial x$	:	Grenzkosten

Versuchen Sie, die D'Gl. zu lösen!

9. *Bestimmen Sie die Integralkurven sowie die Isoklinen:*

9.1. $y' = x - 1$

9.2. $-2\,y' + (64\,y^2)^{1/3} = 0$

Wo ist die Eindeutigkeit verletzt?

10. *Versuchen Sie, folgende Anfangswertprobleme zu lösen (gesucht: partikuläre Lösung):*

10.1. $y\,y'' - (y')^2 = 0$ mit den Anf'Bed. $y(2) = 2.473,\; y'(2) = 0.618$

10.2. $\dfrac{1}{2}\,x\,y' - y = 0$ mit der Anf'Bed. $y(1) = 10$

11. *Bei folgendem Randwertproblem handelt es sich um ein Eigenwertproblem. Können Sie die Lösungen erraten?*

$y'' = \lambda y$ mit den Randbedingungen (RBD): $y(0) = 0,\quad y(\pi) = 0$

12. *Versuchen Sie, sich über folgende Begriffsinhalte Klarheit zu verschaffen:*

a) Lipschitzbedingung

b) Existenzsatz von Peano

c) Eindeutigkeitssatz in D

d) Iterationsverfahren von Emilie Picard

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.** *Falls möglich, sind die Resultate mit* **Mathematica** *zu kontrollieren.*

13. *Wie ist es bestellt mit Existenz und Eindeutigkeit folgender D'Gl. ? Wie sind die Gebiete D zu wählen, damit alles gut geht?*

    13.1. $y' = e^y \sin(x)$ 13.2. $y' = 3\, y^{2/3}$

14. *Versuchen Sie, mit Hilfe des Iterationsverfahrens von Picard die folgenden AWP zu lösen:*

    14.1. $y' = y + x\,, \quad y(0) = 0$

    14.2. $y' = y - x\,, \quad y(0) = 0$

15. *Lösen Sie durch Separation der Variablen die folgenden D'Gl. resp. AWP:*

    15.1. $e^y\, y' - x^2 - x = 0$ 15.2. $y' = e^y \sin(x)$

    15.3. $y' = y^2 + 1,\ y(0) = 0$ 15.4. $y' = -x\ \mathrm{sgn}(y)\ |y|^{1/2}$

    15.5. Schaltkreis: $R\, C\, I' + I = 0\,, \quad U_c(0) = 0$

16. *Lösen Sie durch Substitution:*

$$x\, y' - y - x = 0$$

17. *Überlegen Sie sich, ob die folgenden D'Gl. exakt sind und suchen Sie falls möglich die allgemeine Lösung:*

    17.1. $(y^2\, e^{xy} + 3\, x^2\, y) + (x^3 + (1 + x\, y)\, e^{xy})\, \dfrac{dy}{dx} = 0$

    17.2. $y'\, (1 + x^2) + 2\, x\, y = 0$

18. *Was ist ein* integrierender *Faktor?*

19. *Versuchen Sie, folgende D'Gl. mit Hilfe eines Eulerschen Multiplikators exakt zu machen und zu integrieren:*

    19.1. $y + 2\, x\, y' = 0$ 19.2. $(x - 1)^2\, y + x^2\, (y - 1)\, y' = 0$

    19.3. $(2\, x^2 + 2\, x\, y^2 + 1)\, y\, \dfrac{dx}{dt} + (3\, y^2 + x)\, \dfrac{dy}{dt} = 0$

Fortsetzung: Rückseite

20. *Gegeben ist die Kurvenschar:* $y(x) = c\,x - a\,(1 + c^2)\,x^2$

Gesucht ist die Einhüllende Kurve!

21. *Schaffen Sie sich Klarheit über folgende Begriffe:*

21.1. Lineare D'Gl. 21.2. Homogene D'Gl.

21.3. Inhomogene D'Gl. 21.4. Wronski-Determinante

22. *Welche Typen von D'Gl. bezüglich Linearität haben wir hier?*

22.1. $y\,y''' + y'' = e^x$ 22.2. $(y''')^2 + y^3 = 0$

22.3. $y' - x^{1/2}\,y''' + x\,y = \tan(x)$ 22.4. $3\,x\,\sin(x)\,y' - 2\,y''\,x + 3\,y = 0$

23. *Welche der folgenden Funktionenmengen sind l.a. ?*

23.1. $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ 23.2. $\{\sin(a\,x), \cos(a\,x)\}$

23.3. $\{x^2 - x, x^2 + x\}$ 23.4. $\{x^2, x\}$

24. *Lösen Sie folgendes AWP: (Ev. mittels "Variation der Konstanten")*

24.1. $y' + y = 1\ ,\ y(0.5) = 2.8196$ 24.2. $y' - y = e^x$

25. *Suchen Sie die allgemeine Lösung folgender D'Gl. resp. die partikuläre Lösung folgender AWP (Methode der Variation der Konstanten):*

25.1. $y' = -2\,x\,y + 4\,x$ 25.2. $y' = \dfrac{2y}{x}$

25.3. $y' + y = y^2\,(\cos(x) - \sin(x))\ ,\ y(\pi/2) = 0.4224$

26. *Suchen Sie die Lösung der folgenden D'Gl. mit Hilfe des charakteristischen Polynoms:*

26.1. $y'' + y = 0$ 26.2. $y''' - y'' + y' - y = 0$

26.3. $y'' - y' - 2\,y = 2\,x$ 26.4. $y^{(6)} + y^{(4)} - y^{(2)} - y = e^x \sin(x)$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

27. *Lösen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes die folgenden D'Gl.:*

    27.1. $y' - y = x^2 , \qquad y(0) = y_o$

    27.2. $y' + 2y = 2 + x$

28. *Wie lässt sich folgende D'Gl. in ein System verwandeln?*

$$y''' + 4\,y'' + 2\,y' + 5\,y = \sin(x) + \cos(x)$$

29. *Suchen Sie mit Hilfe des Euler-Verfahrens eine nunerische Näherungslösung folgender D'Gl. in I. Wählen Sie die Schrittweite* 0.2 *!*

$$y' - y = x , \qquad y(0) = 1$$

30. *Behandeln Sie die D'Gl. von* 29. *mit Hilfe der Runge-Kutta-Methode. Wählen Sie*

$$\Delta x = 0.1 .$$

Vergleichen Sie mit dem Resultat von 29. *!*

31. *Berechnen Sie eine Näherungslösung mit Hilfe der Runge-Kutta-Methode für folgendes System (aus der Physik):* *(Hinweis:* $\Delta t = 0.002.$*)*

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = c_1 \sin(\alpha + \alpha_o)\, I + c_2 \sin(2\alpha) + c_3 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{dI}{dt} = c_4\, U - c_5\, I - c_6 \sin(\alpha + \alpha_o)\, \frac{d\alpha}{dt} \qquad \text{(II)}$$

Die Physik "steckt" dabei in den Anfangsbedingungen:

$c_1 = 5.278\ 10^3$ $\qquad c_2 = 433.333$

$c_3 = 0.1333\ 10^3$ $\qquad c_4 = 0.345$

$c_5 = 896.552$ $\qquad c_6 = 1.092\ 10^{-5}$

$\alpha_o = 0.07$ $\qquad t_o = 0.02$ sec

$U_o = 1.500$ V $\qquad I(0) = 0.00$ A

$\alpha(0) = 0.000$

Fortsetzung: Rückseite

Bemerkung: *Aufgabe 31 "von Hand" zur rechnen wäre zu aufwendig. Probieren Sie daher, den Lösungsalgorithmus in einer Hochsprache zu programmieren (z.B. in Modula-2) oder das Problem mit* ***Mathematica*** *anzugehen.*

Zur Physik: *Bei obigem System handelt es sich um die D'Gl. eines Schrittmotors einer Quarzuhr.*

32. *Suchen Sie die allgemeine Lösung:*

32.1. $y^{(4)} - 2\, y'' + y = t^2 - 4\,, \qquad y(t) = ?$

32.2. $y'(x) = 3\,(x^2 + 1)\, y + e^{(x^3)}$

33. *Gegeben ist folgende D'Gl.:*

$$(y'(x))^4 = 1/(4\, x^2)$$

a) *Wo existiert eine Lösung ?*

b) *Wo ist die Lösung eindeutig?*

c) *Kann man herausfinden, wie eine Lösung aussieht?*

Weitere Aufgaben zu D'Gl.: Vgl. Kapitel über Laplace-Transformationen.

(Die Methode der Laplace-Transformationen zur Lösung von D'Gl. wird in diesem Kurs in einem besonderem Kapitel behandelt.)

Bemerkung: Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

Uebungen - Praktikum Kap. 22 / 1 **Klasse: ....**

Thema des Kapitels: Laplace-Transformationen und D'Gleichungen ISB, WIR90

---

1. *Beschreiben Sie die Idee von Heaviside: Wie setzt man Laplace-Transformationen ein um Differentialgleichungen zu lösen?*

2. *Lösen Sie das Anfangswertproblem mit Hilfe von Laplace-Transformationen:*

$$y'' - y' - 6y - e^{-x} = 0 \,, \quad x > 0$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$

3. *Erklären Sie die folgenden Begriffe:*

a) Urbildfunktion b) Originalfunktion

c) Bildfunktion d) Laplace-Transformation

e) Dämpfungsglied f) Existenzsatz

4. *Untersuchen Sie, ob die Laplace-Transformierte folgender Funktionen existiert:*

4.1. $f(t) = \text{Polynom}(t)$ 4.2. $f(t) = \sin(t) + \cos^2(t)$

4.3. $f(t) = q\ e^{kt}$ 4.4. $f(t) = e^{t^2}$

5. *Berechnen Sie die Laplace-Transformierte:*

5.1. $f(x) = 1$ 5.2. $f(x) = t$

5.3. $f(t) = e^{at}\,, \quad t \geq 0$ 5.4. $f(t) = t^n\,, \quad t \in \mathbb{N}$

5.5. $f(t) = \sin(\omega t)$ 5.6. $f(t) = \sinh(t)$

5.7. $f(t) = \sin(8t)$ 5.8. $f(t) = 3e^{-t} - 5\cos(2t)$

5.9. $\tilde{f}(t) = \begin{cases} a(t-t_o)\,, & t \notin [0,\ a] \\ 0\,, & t \in [0,\ a] \end{cases}$ wobei $f(t) = t$ gesetzt wird

5.10. $\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leq 7 \\ \sin(4(t-7))\,, & t > 7 \end{cases}$

Fortsetzung: Rückseite

6. *Berechnen Sie die Laplace-Transformierten folgender Funktionen:*

6.1. $f(t) = e^{ct} \sin(\omega t)$ 6.2. $f(t) = t \sin(\omega t)$

6.3. $f(t) = t^n e^{at}$ 6.4. $f(t) = t^2 \cos(at)$

6.5. $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ 6.6. $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t^2}$

7. *Berechnen Sie das Faltungsprodukt* $f(t) \otimes g(t)$ *sowie seine Laplace-Transformierte:*

$$f(t) = e^t , \qquad g(t) = e^{2t}$$

8. *Berechnen Sie die Urbildfunktion* $L^{-1}\{f(s)\}$ *mit* $f(s) = \dfrac{1}{s^2(1 + s)^2}$

9. *Lösen Sie die folgende Integralgleichung mit Hilfe des Faltungsprodukts:*

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(x) \sin(t - x)\, dx \qquad y(t) = ?$$

10. *Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von folgenden periodischen Funktionen:*

10.1. $f(t_o) = \begin{cases} \sin(t_o) , & 0 \le t_0 \le \pi \\ 0 , & \pi \le t_o \le 2\pi \end{cases} \qquad f(t) = f(t_o + 2n\pi) , \quad n \in \mathbb{N}$

10.2. $f(t_o) = \begin{cases} 1 , & 0 \le t_0 < T/2 \\ -1 , & T/2 \le t_0 < T \end{cases} \qquad f(t) = f(t_o + nT) , \quad n \in \mathbb{N}$

11. *Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von* $\cos(\omega t)$ *aus der von* $\sin(\omega t)$ *mit Hilfe der Differentiationsregel!*

12. *Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von:*

12.1. $f(t) = \int_0^t \tau^n e^{a\tau}\, d\tau$ 12.2. $f(t) = \int_0^t \tau^2 \cos(a\tau)\, d\tau$

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

13. *Berechnen Sie die Laplace-Transformierte bei folgendem AWP:*

$$ay'' + by' + cy = e^{-t}$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$

14. *Lösen Sie mit Hilfe von Laplace-Transformation und Rücktransformation das folgende AWP:*

$$y'' + \omega^2 y = 0$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 1$$

15. *Berechnen Sie die Urbildfunktion* f(t) *zur gegebenen Bildfunktion* F(s) *!*

15.1. $F(s) = \dfrac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}$ 15.2. $F(s) = \dfrac{4}{s - 2} - \dfrac{2s}{s^2 + 16} + \dfrac{5}{s^2 + 4}$

15.3. $F(s) = \dfrac{1}{s^2 - 2s + 5}$ 15.4. $F(s) = e^{-s\pi/3} \cdot \dfrac{s}{s^2 + 4}$

15.5. $F(s) = \dfrac{6s - 4}{s^2 - 4s + 20}$ 15.6. $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$

15.7. $F(s) = \dfrac{1}{s(s + 1)}$ 15.8. $F(s) = \dfrac{1}{s(s - 1)}$

16. *Lösen Sie die folgenden AWP:*

16.1. $y' + y = \sin(x)$, $y(0) = 1$ 16.2. $y' + 7y = e^{7x}$, $y(0) = 0$

16.3. $y''' - 3y'' + 3\,y' - y = t^2\, e^t$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$

16.4. $q'' + (R/L)\; q' + (1/LC)\; a = (1/L)\; U_o \sin(\omega t)$ $q(0) = 0$, $q'(0) = 0$

17. *Verschaffen Sie sich Klarheit über folgende Begriffe:*

a) Prinzip von Duhamel
b) Distribution
c) Anregerfunktion
d) Antwortfunktion
e) Charakterist. Polynom
f) Freie Antwort
g) Erzwungene Antwort

Fortsetzung: Rückseite

18. *Was ist die Laplace-Transformierte der Dirac-Funktion?*

19. *Lösen Sie folgendes AWP:*

$$2y'' - 10y' + 12y = \delta(x) , \qquad y'(0) = y(0) = 0$$

20. *Lösen Sie das folgende AWP mit Hilfe der Laplace-Transformationen auf dem Umweg über ein System:*

$$\begin{aligned} y''' + 4y'' + 2y' + 5y &= \sin(x) + \cos(x) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \\ y''(0) &= 0 \end{aligned}$$

21. *Lösen Sie folgendes System (AWP):*

$$\begin{aligned} x''(t) - y(t) &= 0 \\ 9x'(t) - y'(t) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 0 \\ y(0) &= 6 \end{aligned}$$

22. *Wann nennen wir eine Urblidfunktion stabil? Wann marginal stabil? Wann instabil?*

23. *Lösen Sie die folgenden Probleme via Laplace-Transformationen:*

23.1. $y'' + 9y = \cos(2t)$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (AWP)

23.2. $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$

23.3. $t y'' + 2 y' + t y = 0$, $\quad y(0) = 1$, $y(\pi) = 0$ (RWP)

23.4. $y'' = \delta(t - 3)$, $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

23.5. $y'' + y = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - 2k\pi)$, $\quad y(0) = y'(0) = 0$

23.6. $y'' + 2y' + y = 3\,\delta(at - 1) + e^{-t}$, $\quad y(0) = y'(0) = 0$ *(phys. Bedeutung?)*

24. *Diskutieren Sie folgende physikalische Probleme mit Hilfe der Laplace-Transformationen: Fereie und erzwungene Schwingung einer Feder mit Dämpfung, gekoppeltes Pendel, Durchbiegung eines Balkens mit konstanter Streckenlast, Kraftstoss, RLC-Kreis etc.* .

Bemerkung: **Einige der Aufgaben werden jeweils als Begleitbeispiele während den Theoriestunden behandelt und sind in den Uebungsstunden nicht vorzuführen resp. als Praktikumsaufgaben nicht zu behandeln. Vorzuführen sind nur Aufgaben, die zum schon behandelten Stoff gehören.**
Falls möglich, sind die Resultate mit **Mathematica** *zu kontrollieren.*

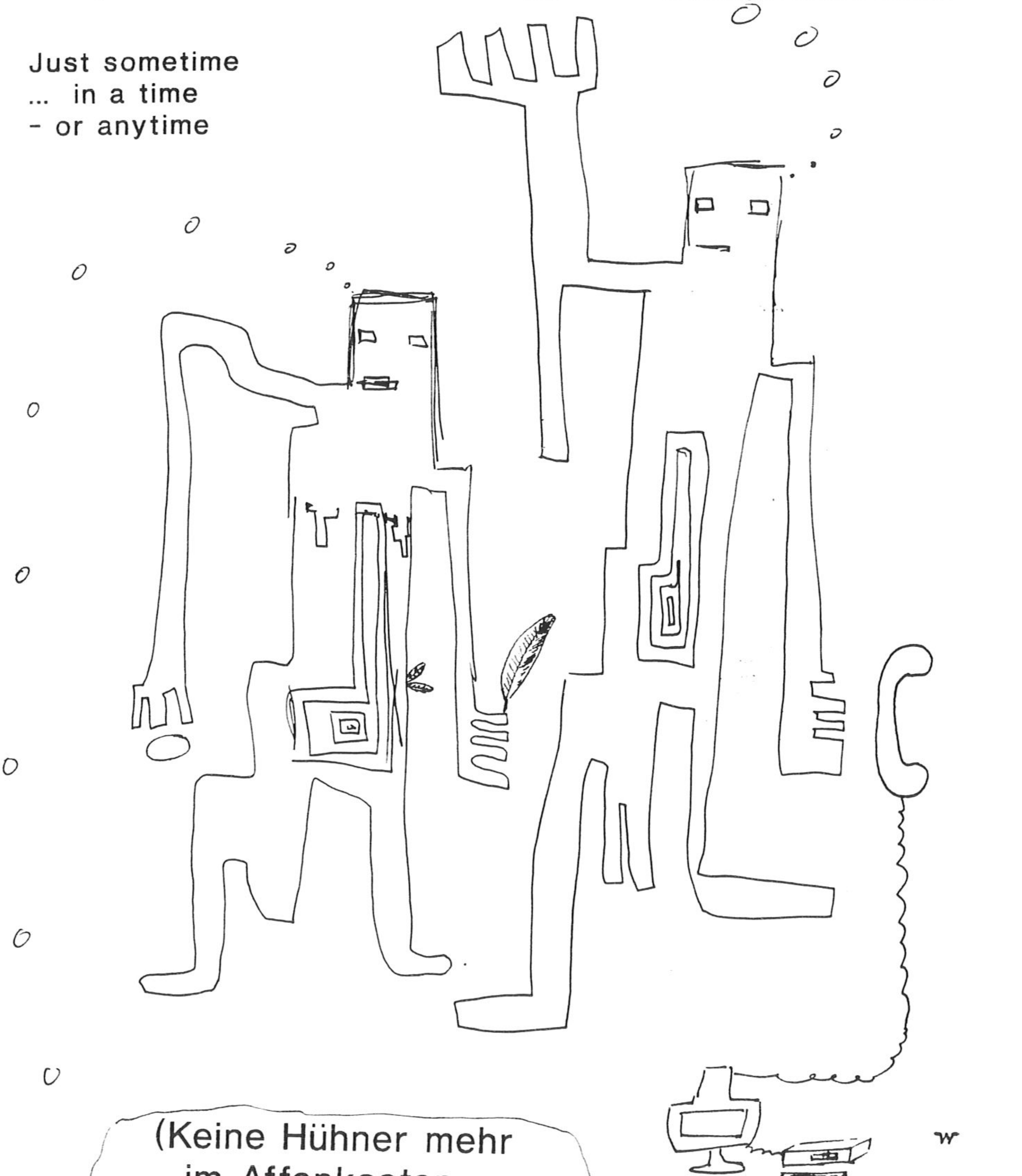
Das Genie beherrscht das Chaos!

(Zum Colorieren während langweiligen Momenten)

Platz für eigene Ideen:

Sokrates: "Dicke Bücher sind schlechte Bücher!"
(Sokrates hatte noch kein Telefonbuch.)

Just sometime
... in a time
- or anytime



(Keine Hühner mehr
im Affenkasten...
- Was war daran schuld -
der Hühnervogel oder
der Eierdieb?)

(Intelligente Sprüche,
die versteht kein Mensch -.
Erkennt man welche so?)