Vordiplom Nachprüfung 1990

Informatik

Algebra — Analysis — Mathematik

Zeit inkl. Pause:

4 Stunden

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR90/01

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- Die Prüfung gliedert sich entsprechend der Aufteilung des Unterrichts in 3 Teile: Algebra, Analysis, Mathematik. Für jeden Teil gibt es eine Teilnote. Die Prüfungsnote berechnet sich aus dem Durchschnitt der 3 Teilnoten.

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Vordiplom Nachprüfung 1990

Klasse I4T

Viel Glück !

Teil 1: Einfache Algebra

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Vereinfache Sie den nachfolgenden Ausdruck so weit wie möglich:

$$\neg(\neg(A \vee \neg B) \vee \neg B) \vee (A \vee \neg(B \wedge A))$$

Andere Schreibweise, wie in der Schaltalgebra üblich:

$$((A + B')' + B')' + (A + (B \cdot A)')$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben: $w = f(z) = -\frac{z}{\bar{z}}, \; z \in \mathbb{C}$

(a) Beschreiben Sie die geometrische Lage von w bezüglich z.

(b) z beschreibt eine Kurve $z(t) = 4\,e^{i\,t}, \; t \in [0, \pi]$.
Welche Kurve beschreibt dann w? Zeichnen Sie die beiden Kurven!

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegebenist die Ebene $\phi: \; x + 2\,y + 3\,z = 3$ sowie die Punkte $P(2/4/6)$ und $Q(1/1/0)$. Auf der Geraden $\overline{PQ}$ fällt ein Lichtstrahl von der Lichtquelle P auf die Ebene Φ und wird reflektiert. Geben Sie die Geradengleichung des reflektierten Strahls.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Gegeben sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Geben Sie sämtliche Lösungen von $C\,(A\,\vec{x} + \vec{b}) - \vec{s} = C^{-1}\,\vec{t}$

Teil 2: Einfache Analysis

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

Skizzieren Sie den Graphen der reellen Funktion

$$f:\ x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 - 2\,x + 1}{4} \cdot (x-1) \cdot \mathit{ln}(\frac{1-x}{2}).$$

Bestimmen Sie so weit wie möglich eventuelle Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

$$\int_7^k \frac{3\,x^2 + 15\,x - 12 - 30\,x}{x^2 - 6\,x - 7}\,dx = \,? \qquad k \in \mathbb{R},\ \ k > 7$$

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

$$\int_0^\infty |-\frac{2}{4}\,\sin(\frac{x}{2})|\,e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \,?$$

Hinweis: Integrieren Sie nach einer geeigneten Substitution zuerst über ein einfaches Teilintervall. Suchen Sie ein Gesetz zu finden ($\rightsquigarrow$ geometrische Reihe).

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Sei $s > 0$. Der Graph einer Funktion 3. Grades schneidet die x–Achse in $-s$ und berührt sie in 0. Zwischen $-s$ und 0 befindet sich ein Maximum. Für $x = 0$ hat die Funktion ein Minimum mit $f(0) = 0$. Zudem ist $f(s) = 2\,s$. Den Inhalt der Fläche zwischen der x–Achse und dem Graphen nennen wir A_1. A_2 dagegen sein der Inhalt der Fläche oberhalb des Graphen bis zur Parallele zur x–Achse durch $(s\,/\,2\,s)$.

(a) $f(x) = \,?$

(b) Was ist das Verhältnis der Inhalte von A_1 und A_2?

Teil 3: Mathematik

Aufgabe 1 **(6 Punkte)**

Sei $y = y(t)$. Lösen Sie mit Hilfe der Mehtode der *Laplace–Transformationen* das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} 2\,y''' + 6\,y'' + 6\,y' + 2\,y &= 2\,t^2\,e^{-t} \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \\ y''(0) &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Berechnen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'' - 6\,y' + 8\,y = 2\,\cos(2\,t).$$

Hinweis: Möglicher Ansatz: $y_{part} = A\,sin(\ldots) + B\,\cos(\ldots))$

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Ein Reagenzglas wird wie folgt beschrieben: Ein Rotationszylinder um die z–Achse hat den Radius $r = 10$ und reicht von $z = 0$ bis $z = 20$. Der Zylinder sitzt auf einer Halbkugel mit $r = 10$, die natürlich ihren Mittelpunkt im Origo hat und von $z = 0$ bis $z = -10$ reicht. Die sich im Reagenzglas befindliche Flüssigkeit wird so in Rotation versetzt, dass ihre Oberfläche durch Rotation einer Parabel entsteht, die ihren Scheitelpunkt im Ursprung hat und zudem oben den Glasrand berührt. Wieviel Flüssigkeit ist im Glas?
Die verwendeten Formeln sind herzuleiten mit Ausnahme der für das Zylinder– und das Kugelvolumen.

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Berechnen Sie $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung.
Genauigkeit: 3 Stellen!

— ENDE —