Vordiplom 1991

Klasse E4D – Abteilung Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:

0800 – 1200

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR91/17/502/01

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- Die Prüfung besteht aus 8 unabhängigen Aufgaben aus dem Gebiet der behandelten Mathematik.
- Ziel: 7 Probleme sind auszuwählen und zu lösen. Es ist aber nicht verboten, alle 8 Aufgaben zu bearbeiten.

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Vordiplomprüfung Mathematik 1991

Klasse E4D

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(18 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung:

$$y''' + 3\,y'' + 3\,y' + y \quad = \quad f(t)$$

(a) **(2 Punkte)**

Sei $f(t) = e^{-t}$. Wieviele Integralkurven gehen durch den Origo und haben dort eine horizontale Wendetangente?

(b) **(4 Punkte)**

Skizzieren Sie diese Kurven über dem Definitionsbereich $D = [-1, 6]$.

(c) **(3 Punkte)**

Bestimmen Sie für diese Kurven in D die vorhandenen Extremwertstellen mit ihren Werten sowie die restlichen Wendepunkte, sofern vorhanden.

(d) **(3 Punkte)**

Bestimmen Sie für diese Kurven die Kurvenlängen zwischen $t = -1$ und $t = 6$. Das numerische Resultat genügt.

(e) **(6 Punkte)**

Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $f(t) = \delta(t)$ und den Anfangsbedingungen $y(0) = -1,\ y'(0) = y''(0) = 0$.

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Zeichnen Sie in der xy–Ebene das Rechteck R, das durch $A(-1/1)$, $B(1/1)$ und die x–Achse markiert ist. Bestimmen Sie die beiden Parabeln 2. Ordnung $f(x)$ und $g(x)$, die durch A sowie B gehen, zwischen $x = -1$ und $x = 1$ in R verlaufen und den Flächeninhalt von R in 3 grosse Teile F_1, F_2, F_3 teilen.

(a) **(4 Punkte)**
Was sind die algebraischen Ausdrücke für f und g?

(b) **(4 Punkte)**
Wir lassen die Figur um die x-Achse rotieren. Was sind die Verhältnisse der Volumina, die von F_1, F_2 und F_3 erzeugt werden?

(c) **(4 Punkte)**
Was sind die algebraischen Ausdrücke für f und g, wenn die Rotationsachse die Gerade $\overline{AB}$ ist.

Aufgabe 3 **(15 Punkte)**

Gegeben ist die Schar archimedischer Schrauben

$$\vec{x}(r,t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(r) \\ r \cdot \sin(r) \\ t \end{pmatrix}.$$

Es ist $t \in [0, 2\,\pi]$

(a) **(3 Punkte)**
Berechnen Sie das begleitende Dreibein für $t = 0$.

(b) **(3 Punkte)**
Berechnen Sie für $t = 0$ Krümmung und Krümmungsradius.

(c) **(3 Punkte)**
Versuchen Sie, mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen und den letzten beiden Resultaten herauszufinden, welcher Punkt der Mittelpunkt des Krümmungskreises ist.

(d) **(3 Punkte)**
Berechnen Sie die Torsion für $t = 0$.

(e) **(3 Punkte)**
Berechnen Sie $\vec{v} = \vec{x}(r,t)_t\,'$. Setzen Sie $r = r(x,y,z) = \ldots$ und $t = t(x,y,z) = \ldots$. (Diese Funktionen müssen Sie herausfinden.) So erhalten Sie dann $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$. Berechnen Sie jetzt $rot\,(\vec{v})$.

Aufgabe 4 *Kurzaufgabe* **(4 Punkte)**

Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\forall_{x\in(0,1)} : \; e^{-kx} > (1-x)^k$$

Hinweis: Ein bequemer Ausgangspunkt ist der Fall $k = 1$.

Aufgabe 5 *Kurzaufgabe* **(4 Punkte)**

Suchen Sie die Kurve $f(x)$ über $[0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die Kurvenlänge ist ∞.
(b) Die Oberfläche des Rotationskörpers (um die x–Achse) ist ∞.
(c) Das Volumen des besagten Rotationskörpers ist π.

Die Eigenschaften sind natürlich zu beleben!

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Es soll eine Schaltung entworfen werden, die eine 2–stellige Dualzahl mit den Ziffern A und B mit einer zweistelligen Dualzahl mit den Ziffern C und D multipliziert. Für die Stellen des Resultats sind kleine Buchstaben zu verwenden.

(a) **(4 Punkte)**
Stellen Sie die möglichen Verknüpfungen in einer Tabelle dar (Leitwerttabelle).

(b) **(4 Punkte)**
Lesen Sie aus der Tabelle auf sinnvolle Weise algebraische Ausdrücke für das Resultat ab, in denen nur Symbole für Serie–, Parallelschaltung und „Negation einzelner Schalter“ vorkommen.

(c) **(4 Punkte)**
Vereinfachen Sie diese Ausdrücke so weit als möglich unter Beibehaltung der Symbole von oben.

Aufgabe 7 **(13 Punkte)**

Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 wie folgt:

$$g_1 = \Phi \cap \Psi, \;\; g_2 : \;\; \vec{r} = \vec{r_0} + t\,\vec{a}$$

Dazu kenne wir den Punkt P_0.

(a) **(3 Punkte)**
Ist die kleinst mögliche Kugel, die beide Geraden berührt, eindeutig bestimmt?

(b) **(5 Punkte)**
Berechnen Sie den Mittelpunkt M und den Radius dieser Kugel, soweit Eindeutigkeit vorhanden ist.

(c) **(5 Punkte)**
Ist der Abstand der Geraden $h = \overline{MP_0}$ und g_1 grösser als der Abstand von h und g_2? Berechnen Sie diese Abstände!

Angaben: $P_0(-3/-1/-9)$

$$\vec{r_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\; \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \Phi:\; 1\,x + 2\,y - 2\,z + 8 &= 0 \\ \Psi:\; 2\,x - 2\,y + 3\,z - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 8 **(12 Punkte)**

$\vec{f}(x,y) = f_1(x,y)\,\vec{e}_1 + f_2(x,y)\,\vec{e}_2$ stellt ein ebenes Vektorfeld dar. Der Definitionsbereich sei das Gebiet D mit dem Rand ∂D.

Der Greensche Satz beagt, dass gilt:

$$\int\int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dA = \oint_C \langle \vec{f}, d\vec{r} \rangle$$

C ist der orientierte Weg, der das Gebiet so umrandet, dass das Innere von D zur Linken liegt: $C = \pm\partial D$

Verifiziere Sie den Greenschen Satz für die folgende konkrete Situation:

$\vec{f}(x,y) = (x\,y - x^2)\,\vec{e}_1 + (x^2 - y^2)\,\vec{e}_2,\ \ \partial D = C_1 \cup C_2,$
$C_1 = \{(x,y) \mid y = x^{0.5} \ \wedge\ x \in [0,1]\},\ \ C_2 = \{(x,y) \mid y = x^3 \ \wedge\ x \in [1,0]\}$

Hinweis:
Machen Sie sich erst eine Skizze und parametrisieren Sie C_1 und C_2 auf geeignete Art.

— ENDE —