Vordiplom 2 1992

Klasse E2D (alt E4D) – Abteilung Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:

1400 – 1800

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR92/22/604/01

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- Die Prüfung besteht aus 8 unabhängigen Aufgaben aus der behandelten Mathematik.

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

Vordiplomprüfung 2 Mathematik 1992

Klasse E2D

Viel Glück !

A. Kürzere Aufgaben

Aufgabe 1 (a) **(6 Punkte)**

Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Schenkellänge a rotiert um die Höhe über der Basis. Bei welchem Basiswinkel ist das Volumen des entstehenden Kegels maximal?

(b) **(6 Punkte)**

Beweisen Sie die folgende Identität:

$$1+\cos(\frac{2\,\pi}{n})+\cos(\frac{4\,\pi}{n})+\ldots+\cos(\frac{2\,(n-1)\,\pi}{n})=0$$

Hinweis: Gehen Sie mit der Darstellung $z=e^{i\,\eta}$ *mit* $\eta=\dfrac{2\,\pi}{2}$ *in die Summenformel für die endliche geometrische Reihe.*

A. Längere Aufgaben

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Lösen Sie allgemein die Differentialgleichung: $x\,y\,'+3\,y=x^2$.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Es ist bekannt, dass ein gegebenes physikalisches System im Idealfall durch die folgende Differentialgleichung beschrieben wird:

$$(I) \qquad y\,''+y=\delta(t)$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0)=y\,'(0)=0$.

Das System ist für $t>0$ frei von äusseren Einwirkungen.
Im Labor aber stellt man fest, dass keineswegs der Idealfall vorliegt. Um die vorhandene Dämpfung zu beschreiben, führt man noch das Glied $k\cdot y\,'$ ein mit $0\leq k\leq 0.1$. Das führt zur Differentialgleichung:

$$(II) \qquad y\,''+k\cdot y'+y=\delta(t)$$

(a) Lösen Sie die beiden Differentialgleichungen.

(b) Beurteilen Sie, ob k im angegebenen Bereich zu sinnvollen Resultaten führt.

(c) Vergleichen Sie die Lösungen für $t = 2\pi$, wobei y für $k = 0.1$ zu rechnen ist.

(d) Was ist bei $k < 0$ zu bemerken?

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Diskutieren Sie die Fälle, in denen die folgende Gleichung keine eindeutige Lösung hat und geben Sie in diesen Fällen die Lösungsmenge an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ t & -4 & 2 \\ -1 & t & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Flächen $\Phi_1: \; x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ und $\Phi_2: \; x^2 + y^2 - z - 3 = 0$.
(Dabei sei $I = \{x \mid y(x) \geq 0\}$.)
Die Schnittkurve(n) dieser Fläche(n) schneitet (schneiden) die erstprojizierende Gerade durch $P_1(2/-1/0)$ im (in den) Schnittpunkt(en) P (P_k).

(a) Bestimmen Sie die Schnittkurve(n) von Φ_1 und Φ_2.

(b) Bestimmen Sie den Winkel γ (*Rad*) zwischen Φ_1 und Φ_2 in P (P_k).

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Das experimentelle Studium eines physikalischen Vorgangs führt auf folgenden Zusammenhang zwischen x und y:

$$f(x) = a\,\frac{(x-6)\,(x-b)}{(x-4)} + \frac{1}{(a\,x^2 + b)}$$

Weiter ist bekannt, dass durch $g(x) = x - 5$ eine Asymptote gegeben ist.

Bestimmen Sie a, b und diskutieren Sie $f(x)$. (Symmetrie, y–Achsenabschnitt, Nullstellen, Minima und Maxima, Wendekunkte, Pole, Graph.) Numerische Werte genügen.

Aufgabe 7 **(12 Punkte)**

Der Punkt $P_1(3/6/-2)$ liegt auf der Kugel K_1. Zentrum von K_1 ist der Origo. Konzentrisch um K_1 ist eine zweite Kugel K_2 vorhanden mit doppeltem Radius. K_2 ist innen verspiegelt.
Von P_1 aus wird tangential zu K_1 ein Laserstrahl mit $x = const.$ ausgesendet, der in P_2 auf K_2 trifft und dann nach P_3 auf K_1 geworfen wird (falls ein Schnittpunkt vorhanden

ist). P_2 soll so sein, dass die y–Koordinate minimal ist.
Berechnen Sie die Koordinatengleichung der Spiegelebene in P_2 sowie dei Koordinaten der Punkte P_2 und P_3.

Aufgabe 8 **(12 Punkte)**

Für welchen Wert des Parameters a besitzt das folgende Vektorfeld ein Potential?

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y(a\,e^{a\,x}\ln(x) + \frac{e^x}{x}) + x\,e^{x^2} \\ e^x \ln(x) + \cos(y) \\ 12.248 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Potential, falls es existiert.

— ENDE —