Vordiplom 1 1993

Klasse E1D – Abteilung Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
0800 – 1200
(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR93/24(23)/604/Mo 4.10.93/01

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 4. Oktober 1993

Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1993

Klasse E1D

Viel Glück !

Aufgabe 1 Extremwertaufgaben: **(Je 6 Punkte, total 12 Punkte)**

(a) Welcher Punkt des Graphen der Funktion $f(x) = y^2 + 1$ liegt am nächsten beim Punkt $(3, 1)$? *(Exakter Wert und Begründung!)*

(b) Bei der Planung eines Hauses mit einem quadratischen Grundriss der Seitenlänge a sollen heutzutage auch ökologische Aspekte mitberücksichtigt werden. Man will das Dach so bauen, dass bei gefordertem Volumeninhalt die Wärmeabstrahlung (und somit die Oberfläche) minimal ist. Da der Bauherr einen Estrich mit mindestens $72\,m^3$ Inhalt wünscht, kommt nur ein Dach in Form ähnlich einer ägyptische Pyramide (quadratischer Grundriss) in Frage. Wie gross muss man somit die Seitenlänge a des Hauses mindestens planen?

Aufgabe 2 Einfache Integration: **(12 Punkte)**

Es gilt:

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$$

(a) Berechne exakt den Flächeninhalt zwischen der *x-Achse*, der *y-Achse* und dem ersten Abschnitt des Graphen der Funktion f im ersten Quadranten.

(b) Quadriere f und berechne den beschriebenen entsprechenden Flächeninhalt abermals exakt.

(c) Was ist das Verhältnis der beiden Flächeninhalte exakt? Entscheide damit die Frage, ob es eine Formel zur Berechnung des Integrals über $(f(x))^2$ mit Hilfe des Integrals über $f(x)$ geben kann, in der nur algebraische Operationen vorkommen.

Aufgabe 3 Gleichungssysteme: **(12 Punkte)**

Gegeben ist folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} p\,x - 2\,y - 2\,z &= 2 \\ x - y + z &= 6 \\ 2\,x + y - 2\,z &= -3 \end{aligned}$$

(a) Es ist bekannt, dass für $z = 3$ eine Lösung existiert. Berechne p.

(b) Berechne anschliessend x und y.

(c) Für welches p hat das System keine Lösung?

Aufgabe 4 Rechnen mit komplexen Zahlen: **(12 Punkte)**

Gegeben sei die komplexe Zahl $a \in \mathbf{C}$ mit Realanteil $\Re(a) > 0$.

(a) Skizziere jeweils falls möglich in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ diejenigen Punkte (resp. denjenigen Punkt) $z \in \mathbf{C}$, für die (resp. für den) gilt:

$$\frac{a - z}{\bar{a} + z} = 1$$

(b) Betrachte die Zahlenfolge

$$z_n = (1 + \frac{i}{\sqrt{1}})\,(1 + \frac{i}{\sqrt{2}})\,...\,(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

i. Berechne für jedes $n \in \mathbf{N}$ den Abstand zwischen z_n und z_{n+1} in $\mathbf{C}$

ii. Bestimme folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_n| - |z_{n-1}|}{Arg\,(z_n) - Arg\,(z_{n-1})}$$

(*Hinweis:* Bernoulli, binomische Formel.)

Aufgabe 5 Matrizen und Eigenwerte: **(12 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Eigenwerte von A.

(b) Berechne D, U und U^{-1} derart dass gilt: $U^{-1}\,A\,U = D$ (D Diagonalmatrix).

(c) Berechne A^{48}.

Aufgabe 6 Kurzaufgaben: **(Je 3 Punkte, total 12 Punkte)**

(a) Die urchigen Burschen Humbert, Edelbert, Bernhard, Hartmut und Hansdolf haben dieses Jahr auf der Alp 1999 Käse gefertigt. Da man 1999 nicht durch fünf teilen kann, entsteht Streit. Da kommt gerade der „böse“ Adolf vorbei, der letzthin am gesamtälpischen Schwingerfäscht Schwingerkönig geworden ist. Humbert der Schreckliche, der bei Adolf dem Bösen noch eine Rechnung offen hat, bekommt Angst und verschwindet unbemerkt. Adolf (der glaubt, dass er das Herz noch auf dem rechten Flecken habe) greift ein. Er packt die vier verbliebenen Streithähne hart und zwingt sie zur Einwilligung in folgendes Programm: Damit keiner leer ausgeht, bekommt jeder der vier zuerst einen Käse. Um den Rest soll sportlich gekämpft werden, pro Käse ein Wettkampf mit allen der vier unter sich. Bleibt etwas übrig, weil die urchigen nicht mehr kämpfen können (weil sie keine Kraft mehr haben) so gehört es Adolf. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die leider ununterscheidbaren Käse zu verteilen, falls es den urchigen Burschen gelingen sollte, immer alle Wettkämpfe auszutragen, sodass nichts übrigbleibt für Adolf?

(b) Stelle eine Formel auf für die maximale Anzahl der Schnittpunkte von n Kreisen und beweise diese Formel mathematisch korrekt.

(c) Berechne:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+c}$$

(d) Berechne:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{c}{x})^{x}$$

— ENDE —