Vordiplom 2 1993

Klasse E2D – Abteilung Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:

1400 – 1700

(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR93/16/604/Mo 4.10.93/01

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 4. Oktober 1993

Vordiplomprüfung 2 Mathematik 1993

Klasse E2D

Viel Glück !

Aufgabe 1 Komplexe Zahlen: **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Abbildung der Gaussschen Ebenen $f:\ \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \frac{3+z}{1-z}$$

(a) Bestimme die Fixpunkte.

(b) Berechne $f(f(f(z)))$ und versuche damit auf f^{-1} zu schliessen.

(c) Was ist das Bild der imaginären Achse?

Aufgabe 2 Extremwertaufgabe: **(12 Punkte)**

Finde den Ort und den Wert des Minimums der Funktion

$$f(x,y) = x^2 - 3\,x\,y + y^2.$$

Der Definitionsbereich von f ist die Menge der Punkte (x,y), für die gilt: $x^2 + y^2 \leq 3$.
Hinweis: Passendes Koordinatensystem verwenden.

Aufgabe 3 Laplace–Transformationen: **(12 Punkte)**

Berechne die Funktion $y(t)$, die folgendes Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{aligned} y\,' &= y = 2\,z \\ z\,' &= 2\,y + z + f(t) \end{aligned}$$

Dabei sind die folgenden Anfangsbedingungen gegeben: $y(0) = 0,\ \ z(0) = 0$.

Weiter ist f wie folgt bestimmt:

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$$

Aufgabe 4 Integrationsprobleme: **(12 Punkte)**

Zu untersuchen ist das folgende Integral über das Gebiet S:

$$\int\int_S x^2\,dx\,dy$$

Dabei ist $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. S_1 ist das Dreieck begrenzt durch den Ursprung, den Punkt $A = (2,1)$ und den Punkt $(0,1)$ auf der y–Achse. S_3 erhält man aus S_1 durch Spiegelung am Ursprung. Spiegelt man das durch die Achsen und A gebildete Rechteck R_1 an der y–Achse, so erhält man das Rechteck R_2. S_2 ist bezüglich R_2 das Komplement des Spiegelbildes von S_1 an die y–Achse. S_3 ist das Spiegelbild von S_2 an den Ursprung. S ist somit eine „ziemlich symmetrische“ Figur („Windrad“).

(a) Berechne das Integral über S.

(b) S^* erhält man aus S durch zentrische Streckung um einen unbekannten Faktor k. Bestimme k so, dass das Integral über S^* den Wert 27 annimmt.

Aufgabe 5 Vektoranalysis: **(12 Punkte)**

Sei A eine reelle Matrix und $\vec{r}$ ein Vektor mit den folgenden Koeffizienten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Das Vektorfeld $\vec{v}$ erhält man auf $\mathbb{R}^3$ durch $\vec{v} = A \cdot \vec{r}$.

(a) Berechne $div\,\vec{v}$ und $rot\,\vec{v}$.

(b) Untersuche,unter welchen Bedingungen an die Koeffizienten von A das Vektorfeld $\vec{v}$ konservativ ist. Von welchem Typ muss dann A sein?

(c) Bestimme dann das Potential von $\vec{v}$ (Potentialfunktion $\varphi(x,y,z)$ mit $\varphi(0,0,0) = 0$).

(d) Bestimme alsdann die Arbeit (Wegintegral) im Feld $\vec{v}$ längs irgendeines Weges von $B(1,2,3)$ nach $C(3,5,1$, wenn A wie folgt gegeben ist:

$$A = M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) Bestimme für M den Fluss des Feldes durch die Einheitskugel um den Ursprung.

Aufgabe 6 Fourieranalysis: **(12 Punkte)**

Sei die $2\,\pi$–periodische Funktion $f(x)$ gegeben durch $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $(0, 2\,\pi)$.

(a) Bestimme die Fourierreihe von f. (Rechnung!)

(b) Berechne damit die folgenden Reihen:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Hinweis: Dirichletsche Bedingung für die Konvergenz ... An den Sprungstellen Konvergenz gegen das arithmetische Mittel ... Parceval ...

(c) Durch f wird nun eine Spannung beschrieben, die im Labor mittels Überlagerung von Sinus– und Cosinusfunktionen erzeugt werden soll. Man verwendet dazu einfach die ersten hundert Glieder der jeweiligen Summen in der Fourierentwicklung von f und bricht dann ab. Wie verhält sich voraussichtlich die so konstruierte Spannung an den Sprungstellen von f ?
(Stichwortartige Begründung.)

(d) Skizziere und beschreibe die einfachste stetige Funktion, die als Fourierreihe eine reine Sinusreihe hat, $8\,\pi$–periodisch ist und auf dem Intervall $(0, 2\,\pi)$ durch $f(x) = x^2$ gegeben ist. Begründe die Wahl.

Man bedenke diesen Moment: Hier endet für Dich die letzte Mathematik–Prüfung an der ISB in dieser Klasse — oder vielleicht überhaupt im Leben... Alles Gute für den weiteren Weg und viel Kraft im Streben nach jenen gewählten Zielen, die Zufriedenheit bringen!

— ENDE —