Vordiplom 2 1994

Klasse E2D – Abteilung Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:

1400 – 1700

(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR94/20/604/Mo 10.10.94/01

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 10. Oktober 1994

Vordiplomprüfung 2 Mathematik 1994

Klasse E2D

Viel Glück !

Aufgabe 1 Differentialgleichungen: (12 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus zwei unabhängigen Teilaufgaben.

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$x^2\,y'' - (a+b-1)\,x\,y' + a\,b\,y = 0 \quad \text{in} \quad (0,\infty) \quad \text{mit} \quad a,b \in \mathbf{R}.$$

Hinweis: Versuchen Sie den Ansatz $y = x^r$.

(b) y sei eine Lösung der Differentialgleichung $y' = (\frac{1}{2x} - \lambda)\,y$ zu einem bestimmten λ–Wert. Über diese Lösung weiss man, dass sie durch den Punkt $(x,y) = (1,1)$ geht und an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ ein Maximum besitzt.

  i. Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen λ zur besagten Lösung.

  ii. Bestimmen Sie $y_0(x)$ für $x > 0$.

  iii. Skizzieren Sie $y_0(x)$ und beurteilen Sie das Verhalten für grosse x analytisch (Asymptote).

Aufgabe 2 Differentialgleichungen, Laplace-Transformationen: (12 Punkte)

Ein Elektron mit der Masse m und der Ladung e bewegt sich auf einer ebenen Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ unter dem Einfluss des elektrischen Feldes $\vec{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und des magnetischen Feldes $\vec{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_3 \end{pmatrix}$. Es sei $E_2, H_3 > 0$. Die Bewegung des Elektrons wird wie folgt beschrieben:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} - e\,H_3\,\frac{dy}{dt} = 0 \qquad (1)$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} + e\,H_3\,\frac{dx}{dt} = e\,E_2 \qquad (2)$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = y(0) = 0$ und $\frac{dx}{dt}(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 0$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung für $\frac{eH_3}{m} = 1$ und $\frac{E}{H} = 2$. (Laplace–Transformation.)

(b) Wie verhält sich die Lösung für grosse t?

(c) Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\vec{x}(t)$? (Skizze!)

Aufgabe 3 Fourierreihen: **(12 Punkte)**

Sei

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t, & t \in I = [-\pi, \pi) \quad (3)\\ f_1(t) &= f(t + 2\,\pi) & \forall_{t\in\mathbf{R}} \quad (4) \end{aligned}$$

(a) Sie können davon ausgehen, dass die Fourierkoeffizienten a_k und b_k von $f_1(t)$ bekannt sind. Berechnen Sie ohne Formelsammlung die Fourierkoeffizienten A_k und B_k von $f_2(t) = f_1(t)^2$ aus denen von $f_1(t)$.

(b) Wenden Sie auf f_2 die Parsevalsche Gleichung an. Damit lässt sich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ berechnen. Führen Sie die Berechnung durch.

(c) Berechnen Sie ohne Formelsammlung die Fourierreihe der $2\,\pi$–periodischen Funktion $f_3(t) = (\frac{t}{\pi})^3 - \frac{t}{\pi}$, $t \in I$. Welche Zahlenreihe entsteht für $t = \frac{\pi}{2}$?

Aufgabe 4 Komplexe Abbildungen: **(12 Punkte)**

Es sei $f(z) = \dfrac{i\,(z-1)}{(z+i)}$. Weiter sei $w = h(z)$ diejenige gebrochene lineare Abbildung, für die gilt: $h(0) = i$, $h(i) = 0$, $h(\infty) = 1$.

(a) Bestimmen Sie $h(z)$.

(b) Bestimmen Sie $h(f(z))$ und die Fixpunkte dieser Abbildung.

(c) Bestimmen Sie die Bilder der reellen und der imaginären Achse für die Abbildung $f(z)$. Skizzieren Sie das Bild des ersten Quadranten.

(d) Welche Geraden werden durch $f(z)$ in Geraden abgebildet?

Aufgabe 5 Kurven, Vektoranalysis: **(12 Punkte)**

Eine in der (x, y)-Ebene des Raumes liegende Kurve C ist in Polarkoordinaten gegeben durch $r(\varphi) = (1 - \cos\varphi)$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$. D sei das von der Kurve C begrenzte Flächenstück.

(a) Skizzieren Sie die Kurve.

(b) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(\varphi)$ und beurteilen Sie, ob die Krümmung überall endlich ist.

(c) Berechnen Sie die Kurvenlänge sowie den Inhalt von D exakt[1].

[1] Z.B. $\sqrt{2}$ oder $2^{\frac{1}{2}}$ statt 1.414.

(d) Durch $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y-x \\ x+y \\ x^2 - 2\,y \end{pmatrix}$ und $\vec{G}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x+1 \\ x \\ x-2\,y \end{pmatrix}$

sind zwei Vektorfelder gegeben. Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\oint_C \vec{F} \circ d\vec{r} \qquad \text{und} \qquad \oint_C \vec{G} \circ d\vec{r}.$$

(e) D sei die Grundfläche eines geraden Zylinders der Höhe 1. Berechnen Sie den Fluss des Feldes $\vec{G}(x,y)$ durch die gesamte Oberfläche des Körpers.

Aufgabe 6 Unabhängige Teilaufgaben (mehrfache Integrale, Algebra)

(12 Punkte)

(a) K sei der Einheitskreis (Mittelpunkt im Ursprung). Q sei ein Quadrat mit ebenfalls dem Mittelpunkt im Ursprung und den Eckpunkten auf den Koordinatenachsen. Wie gross muss die Seitenlänge des Quadrates sein, damit die nachfolgende Gleichung stimmt?

$$\iint_K (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_Q (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

(b) Betrachten Sie das von t abhängige lineare Gleichungssystem

$A(t)\cdot\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ und $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t^2 \end{pmatrix}$.

i. Bestimmen Sie $\vec{x}(t)\ \forall_{t\in\mathbf{R}}$.

ii. Zeigen Sie: Die beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Lösung $\vec{x}(t) = c_1\,\vec{u}(t) + c_2\,\vec{v}(t)$ sind linear unabhängig $\forall_{t\in\mathbf{R}}$.

iii. Zeigen Sie:
$\vec{x}(t)$ ist Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = B(t)\cdot\vec{x}$$

mit speziellem $B(t)$. Berechnen Sie $B(t)$.

Hinweis: Berechnen Sie $B(t)$ aus $A(t)\cdot\vec{x}(t) = \binom{c_1}{c_2}$ durch Differenzieren nach t. (Die Produktenregel gilt auch für Matrizen.)

— ENDE —