Vordiplom 1 1995

Klasse E1D – Abteilung Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:

Teil Analysis: 08.00 – 12.00

(10.00 – ca. 10.10 abgeben, bereitstellen)

Teil Algebra: 10.10 – 11.10

(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 9. Oktober 1995

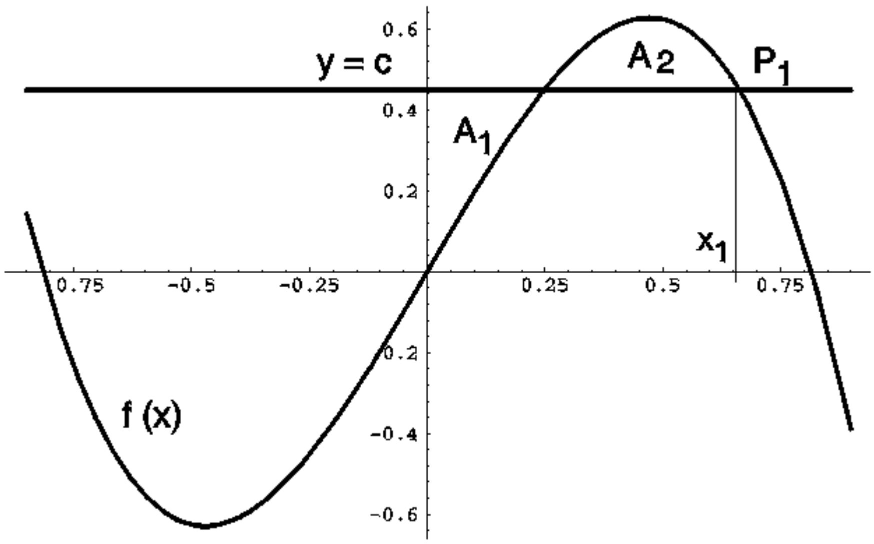
Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1995, Teil 1: Analysis

Klasse E1D

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Von der zum Ursprung punktsymmetrischen Funktion $f(x) = y = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$ ist bekannt, dass $a_1 = 2$ sowie $a_3 = -3$ ist. Durch die Gerade $y = c$ werden zwei Flächen mit den Inhalten A_1 und A_2 definiert (vgl. Abb. unten). P_1 ist der Punkt $(x_1, f(x_1))$.



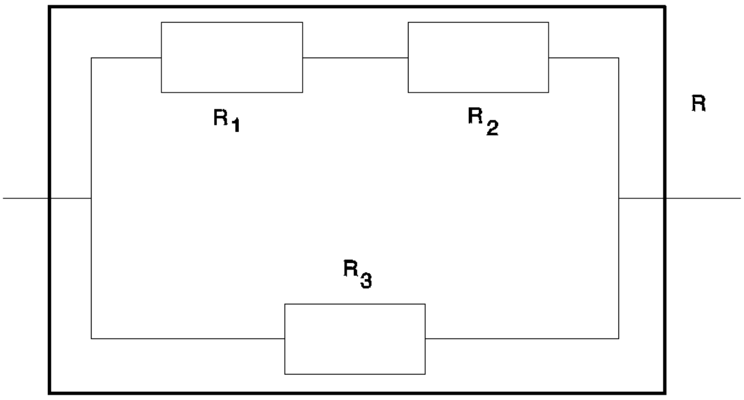
(a) Bestimmen Sie die fehlenden Koeffizienten a_i.

(b) Berechnen Sie c *exakt*[1] so, dass $A_1 = A_2$ ist.
Hinweis: Man integriere $h(x) = f(x) - c$ *von* 0 *bis* x_1.

[1] Z.B. $\sqrt{2}$ oder $2^{\frac{1}{2}}$ statt 1.414 .

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Nach der in der Abbildung unten gezeigten Schaltung wird ein Gesamtwiderstand R mit Hilfe von drei eingekauften Widerständen R_1, R_2 und R_3 zusammengebaut. R_1 und R_2 sind in Serie, R_3 ist jedoch dazu parallel geschaltet. Der Lieferant garantiert: $R_1 = 10\Omega \pm 0.5\Omega$, $R_2 = 30\Omega \pm 0.5\Omega$, $R_3 = 100\Omega \pm 6\Omega$.
Der Lehrling, der die Schaltung sauber zusammenlöten und ausmessen musste, meldet Ihnen, dass der Gesamtwiderstand um etwa 5Ω vom gerechneten Wert abweiche. Das ist weniger als die Summe der einzelnen Toleranzen.
Berechnen Sie den absoluten Fehler des Gesamtwiderstands und beurteilen Sie, ob die Arbeit des Lehrlings akzeptiert werden kann.



Aufgabe 3

Zur Auswahl stehen zwei unabhängige Teilaufgaben.
Es muss nur ein davon gelöst werden!

(12 Punkte)

(a) Gegeben ist

$$z_0 = 0 \quad (1)$$

$$z_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{i\varphi}}{2}\right)^k \quad (2)$$

Dabei ist $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

i. Skizzieren Sie die ersten 8 Punkte in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ und verbinden Sie jeweils z_k mit z_{k+1} durch ein Geradenstück. Den so entstehenden Streckenzug von z_0 bis z_n nennen wir s_n. (Maßstab: $1 Einheit \mathrel{\widehat{=}} 4\,cm$.)

ii. Berechnen Sie falls möglich den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} z_n$ exakt.

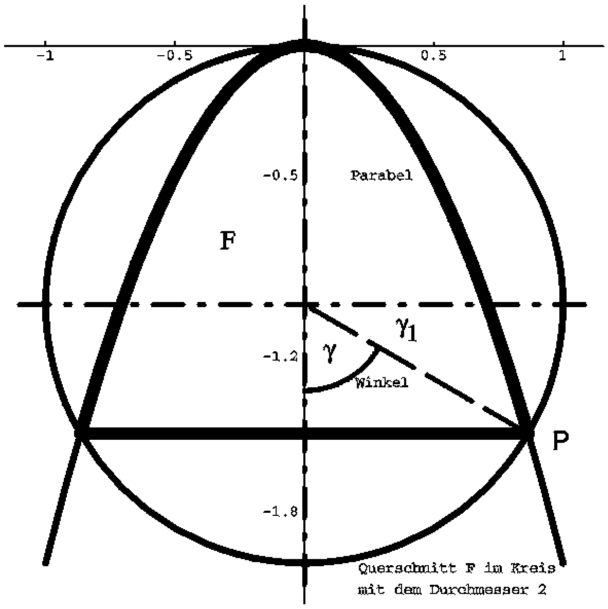
iii. Berechnen Sie die exakte Länge des Streckenzuges s_∞.

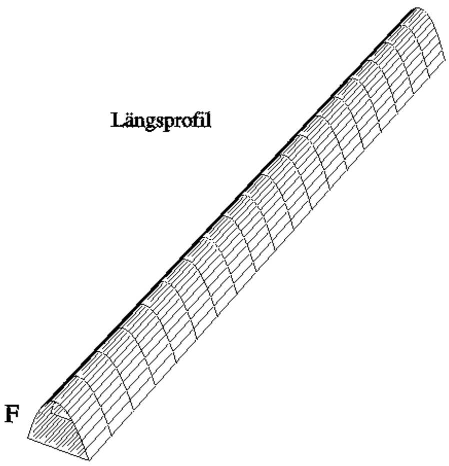
Alternative:

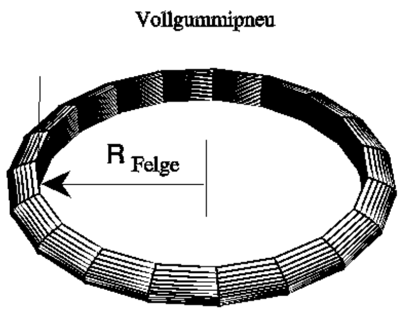
(b) Es wird folgender Sachverhalt vermutet:

$$2\sum_{k=1}^{n} k + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n\,(n+1)^2\,(n+2)$$

Beweisen sie die Formel durch *vollständige Induktion* (oder widerlegen Sie die Formel).







Aufgabe 4 **(15 Punkte)**

Ein Vollgummipneu mit parabelförmigem Querschnitt F (vgl. Abb. oben) soll durch stirnseitige Verschweissung eines Längsprofils hergestellt werden. Mit der vorhandenen Maschine lassen sich Profile herstellen, deren Querschnitte in einen Kreis von maximal $2\,cm$ Durchmesser passen.

(a) Geben Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die Funktion der Parabel. Dabei ist die Öffnung der Parabel abhängig vom Winkels γ. (γ oder $\gamma_1 = \pi - \gamma$ ist als Parameter zu wählen.)

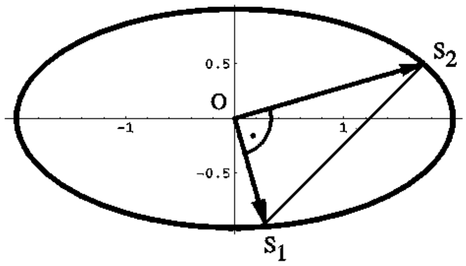
(b) Die Verwendung des fertigen Rades erfordert, dass möglichst viel Gummi vorhanden ist. Bestimmen Sie den Winkel γ so, dass der Inhalt der Querschnittsfläche dem Betrage nach *maximal* wird. Berechnen Sie damit den Betrag des Inhalts der Querschnittsfläche F.

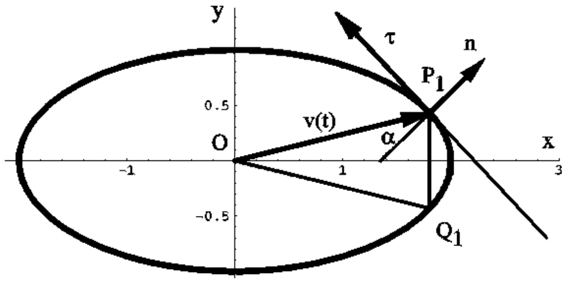
(c) Der fertige Pneu soll auf eine Felge mit dem Durchmesser $d = 20\,cm$ aufgezogen werden. Welches Gummivolumen V ist notwendig für einen Pneu, dessen Form durch Rotation des Parabelbogens entsteht? (Der parabelförmige Querschnitt F rotiert auf dem Felgenradius R_{Felge}, vgl. Figur in der Abbildung oben.)

— Ende Teil Analysis —

— FORTSETZUNG: Teil Algebra —

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**





Durch $\vec{v}(t) = \binom{2cos(t)}{sin(t)}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ ist eine Kurve in Parameterform gegeben. Die Gerade $\overline{OS_1}$ steht senkrecht auf der Geraden $\overline{OS_2}$ (vgl. Abbildung links oben).

(a) Setzen Sie $\vec{OS_1} = \begin{pmatrix} 2cos(t) \\ sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie damit $\vec{OS_2}$ sowie den Flächeninhalt $A(t)$ des Dreiecks OS_1S_2.

(b) Ein von O ausgesandter Lichtstrahl wird bei P_1 an der Kurve (Tangente τ) nach Q_1 gespiegelt. Bei welchem $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ wird der Lichtstrahl von Q_1 aus wieder nach O reflektiert? (Falls es ein solches t gibt, genügt ein numerisches Resultat.)

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

(a) Eine Matrix M heisst *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, sodass $M^n = N$ ist. (N ist die Nullmatrix.) Sei $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$.

i. Welche Bedingung muss für die Determinante von M gelten, damit M nilpotent sein kann?

ii. Sei M die spezielle Matrix $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ s & 0 & s\lambda \end{pmatrix}$. Können s und λ so gewählt werden, dass $M_1^2 = N$ ist? Berechnen Sie λ und s, sofern das möglich ist.

(b) Seien

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & 0 & -sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\varphi) & 0 & cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

i. Wählen Sie x, y und z so, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch M_3 in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet wird.

ii. Sei $M_5 = M_4 \cdot (M_2 \cdot M_3)$, M_3 wie oben berechnet. Die Matrix M_5 bildet die Ebene $\Phi_1 :\ z = 1$ in eine Ebene Φ_2 ab. Bestimmen Sie den Abstand der Bildebene Φ_2 vom Ursprung. (λ ist so gewählt, dass die Abbildung möglich ist.)
(Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, was die geometrische Bedeutung von M_4 und von φ ist.)

iii. Die Vektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ (Orthonormalbasis) definieren einen Einheitswürfel. Eine (3×3)-Matrix bildet bekanntlich den Einheitswürfel in einen Spat ab. (Der Spat kann auch entartet sein, z.B. wenn alle drei Bildvektoren parallel zu einer Ebene sind.) Berechnen Sie auf kurze Art das Volumen des durch M_5 erzeugten Bildes des Einheitswürfels.

— ENDE —