Vordiplom 1, Algebra 1996

Klassen E1B, E1D – Abteilung Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
Teil Algebra: 60 Minuten
Teil Analysis: 120

(dazwischen abgeben, bereitstellen)

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR96/24/302//23/604/Mo 7.10.96/01

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 7. Oktober 1996

Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1996, Teil Algebra

Klassen E1B, E1D

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Diese Aufgabe besteht aus zwei unabhängigen Teilaufgaben, die beide gleich bewertet werden.

(a) Gegeben ist das komplexe Polynom

$$p(z) = i\,z^5 + a\,z^4 - 40\,i\,z^3 - 80\,z^2 + 80\,i\,z + b, \qquad (a,\, b \in \mathbf{R})$$

Von diesem Polynom weiss man, dass die Summe der Nullstellen $-10/i$ beträgt und das Produkt der Nullstellen $-31/i$.
Stellen Sie alle Nullstellen in einer Skizze graphisch dar (Maßstab: 1 *cm* resp. 2 Häuschen $\hat{=}$ Einheit.) Beantworten Sie damit die Frage, ob dieses Polynom eine reelle Nullstelle hat.
Hinweise: Setzen Sie $i\,z = w$, *Hauptsatz der Algebra,* $(w+k)^n = ?$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$.
Für welche x, y, z, w gilt $A \cdot B = B \cdot A$? Wählen Sie bei der Berechnung gegebenenfalls x als Parameter.

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Sei $S = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie x so, dass $det(S) = 4$ ist. Verwenden Sie in den nachfolgenden Teilaufgaben das erhaltene Resultat.

(b) Stellen Sie S in der Form $S = UDU^{-1}$ dar ($D =$ *Diagonalmatrix*).

(c) Untersuchen Sie, was mit dem Vektor $\vec{b}_n = S^{-1}(S^{-1}(\ldots(S^{-1}\vec{a})\ldots)) = (S^{-1})^n\,\vec{a}$ ($\vec{a} \in \mathbf{R}^3$) passiert, wenn n ($n \in \mathbf{N}$) gegen ∞ strebt.

(d) Sei T eine beliebige symmetrische Matrix mit $T = UDU^{-1}$ (D Diagonalmatrix).
$P_n(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\,\lambda + c_0$ sei das charakteristische Polynom von T.
Erklären Sie, weshalb die folgende Gleichung gilt:

$$P_n(T) = T^n + c_{n-1}\,T^{n-1} + \ldots + c_1\,T + c_0\,E = N \qquad (N = \mathit{Nullmatrix})$$

— ENDE —