Vordiplom 2 1996

Klasse E2D – Abteilung Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
14.00 – 17.00
(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR96/18/604/Mo 7.10.96/01

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 7. Oktober 1996

Vordiplomprüfung 2 Mathematik 1996

Klasse E2D

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = (2\,(x-y) - 3\,(x-y)^3) \cdot cos(x+y).$$

Der Definitionsbereich ist das Gebiet $D = (-0.4, 0.4) \times (-0.4, 0.4)$.

(a) Suchen Sie einen Punkt im Innern von D (der Rand ∂D gehört nicht zu D), in dem die Funktion f ein *Maximum* annimmt.

(b) Berechnen Sie das Volumen zwischen D und dem Graphen von f (2-dim. Fläche).

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(z) = (-2)^z$ mit $z \in \mathbf{C}$ (komplexe Zahlen $\mathbf{C}$).

(a) Klären Sie die Frage, ob f komplex differenzierbar (holomorph) ist.

(b) Skizzieren Sie die Bilder der reellen und der imaginären Achse unter f.

(c) Während die Achsen nur einen Schnittpunkt haben (den Ursprung), haben die Bilder der Achsen vermutlich mehrere Schnittpunkte.
Berechnen Sie allenfalls die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Bildkurven der Achsen.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

1929 gelang *E. Hubble* die zweite seiner Entdeckungen, die für die Kosmologie von ungeheurer Tragweite ist: Die Rotverschiebung in den Linien der Spektren ferner Galaxien wächst proportional mit der Entfernung r an. Deutet man diese Rotverschiebung als Dopplereffekt, so gilt für die Fluchtgeschwindigkeit v der Galaxien und den Abstand r die Beziehung: $v = H_0 \cdot r$.[1] (H_0 heisst *Hubble-Konstante*. Über sie wird heute stark gestritten.).
Um das Problem eventueller Einflüsse auf H_0 zu untersuchen (z.B. Richtungsabhängigkeit, Störungen), machen wir uns den allgemeineren Ansatz $\dot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r})$. Um in diesem Zusammenhang die Variante $\dot{\vec{r}} = H \cdot \vec{r}$ zu studieren (H = Matrix), wollen wir zur Vereinfachung im Zweidimensionalen (euklidscher Fall) das Modell

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a\,x(t) + b\,y(t) \\ \dot{y}(t) &= c\,x(t) + d\,y(t) \end{aligned}$$

mit speziell gewählten Koeffizienten untersuchen. Wir setzen zur Vereinfachung:
$a = d$ und $b = -1$, $c = 1$.

(a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem bei den versuchsweise gewählten Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ mit Hilfe der Laplace-Transformation. Kontrollieren Sie das Resultat durch Einsetzen.

(b) Beschreiben Sie die Bahnkurven der Galaxien mit Hilfe einer Zeichnung bei verschiedenen Parametern a. Welche Werte für a kommen wohl physikalisch nicht in Frage?

(c) Studieren Sie die Position einer Galaxie für $t \to \infty$ in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Gegeben seien die Vektorfelder

$$\vec{v}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} (a-b) \\ (b-c) \\ (c-a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} a\,x \\ b\,y \\ c\,z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} a\,x \\ b\,y \\ c\,z \end{pmatrix}.$$

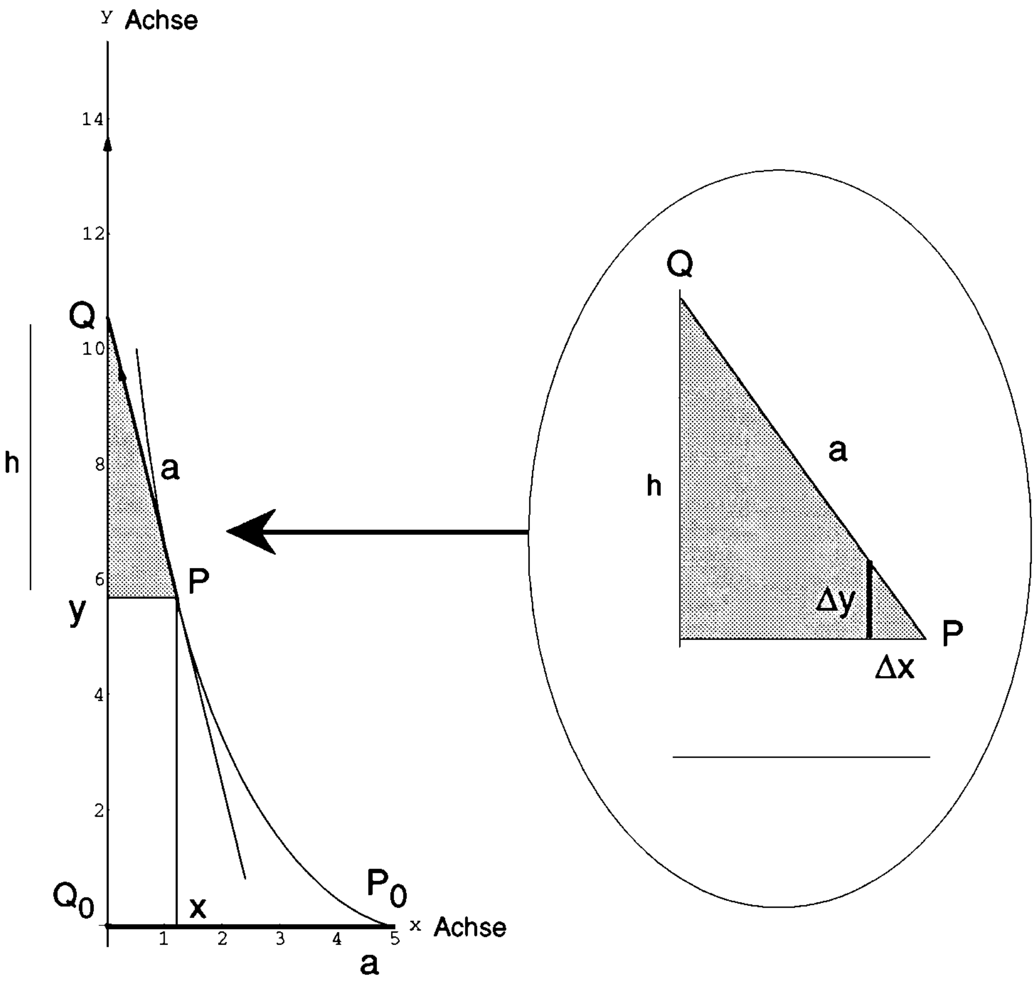
(a) Untersuchen Sie, für welche Parameter a, b und c alle drei Felder konservativ sind.

(b) Untersuchen Sie, für welche Parameter a, b und c alle drei Felder quellenfrei sind.

(c) Berechnen Sie im konservativen Falle für alle drei Vektorfelder den Fluss durch die Einheitskugel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt.

[1] So beschrieben von Unsöld in "Der neue Kosmos".

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**



Ein Traktor, der sich ursprünglich im Punkt $Q_0(0,0)$ befand (vgl. schematische Skizze Abb. oben), fährt in Richtung der positiven y-Achse. Er muss einen Baumstamm der Länge a wegschleppen, der zu Beginn parallel zur x-Achse lag und in $P_0(a,0)$ den Boden berührte. Momentan befindet sich der Traktor in der Position $Q(0, y+h)$. Das Ende des Baumstammes hinterlässt am Boden eine Spur (Schleppkurve). Es befindet sich momentan in der Position $P(x,y)$. Da sich h durch a und x ausdrücken lässt, kann man anhand der oben gezeigten Abbildung ein Modell in Form einer Differentialgleichung gewinnen.

(a) Wählen Sie $a = 5$ und stellen Sie die Differentialgleichung auf.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung.

(c) Berechnen Sie die y-Koordinate sowie den Krümmungsradius der Schleppkurve an der Stelle $x = 4$.

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Potenzreihe

$$ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \qquad x \in [-1, 1)$$

(a) Leiten Sie daraus die Fourierreihe für $ln(2\sin\frac{t}{2})$ her $(0 < t < 2\pi)$ und berechnen Sie damit eine numerische Approximation der Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k} = \frac{\cos 1}{1} + \frac{\cos 2}{2} + \frac{\cos 3}{3} + \dots$$

Hinweis: Setze $x = re^{i\,t}$ und betrachte den Realanteil der entstehenden Gleichung. Man benutze die gegebene Tatsache, dass die so gewonnene Beziehung auch auch für $r = 1$ und $0 < t < 2\pi$ erfüllt ist.

(b) Leiten Sie aus der eben gewonnenen Reihe die Fourierreihe von $ln(2\cos\frac{t}{2})$ her $(-\pi < t < \pi)$.

(c) Berechnen Sie damit die Fourierreihe von $ln(\cot\frac{t}{2})$, $0 < t < \pi$. Gewinnen Sie damit eine numerische Approximation der unendlichen Summe

$$\frac{\cos 1}{1} + \frac{\cos 3}{3} + \frac{\cos 5}{5} + \frac{\cos 7}{7} + \dots$$

— ENDE —