# Vordiplom 1997

Klasse B2 — Architektur

# Mathematik

Zeit inkl. Pause:
14.00 h – 17.00 h
(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR97/19/R4//Mo 6.10.97/01

**Bedingungen — Conditions:**

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge. *Tous les problèmes sont à résoudre soi-même. Un comportement malhonnête a comme conséquence l'exclusion immédiate de l'examen.*
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert. *Pour écrire il faut un moyen inéffaçable. Le crayon est accepté seulement pour les dessins et les esquisses.*
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert. *On demmande une présentation de déduction de la solution claire et propre. Des résultates sans déduction ne sont pas acceptés.*
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen. *Quand des fractions décimales sont utilisées le résultat exact et le résultat présenté ne doivent pas différer de plus que* 0.1%.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen. *Les résultates sont à souligner deux fois.*
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen. *Les parties pas valables sont à tracer nettement.*
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert! *Pour chaque problème il faut utiliser une nouvelle feuille. Le verso doit rester libre. Peut-être il ne sera pas corrigé!*
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
  **Moyen permis:** *Cours (résumé), livres de formules, calculatrice, papier et écritoire.*
- **Punkte:** 12 erreichbare Punkte pro Aufgabe.
  **Nombre de points:** *12 points par problème sont possibles.*
- Ziel: 6 Aufgaben auswählen und lösen. *But: Choisir et résoudre 6 problèmes.*

Deutsche Version

**6. Oktober / *octobre* 1996**

# Vordiplomprüfung — Examen préalable 1997

**Klasse / classe B2**
**INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) / école d'ingénieurs Bienne (ETS)**

*Viel Glück ! ◇ Bonne chance!*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

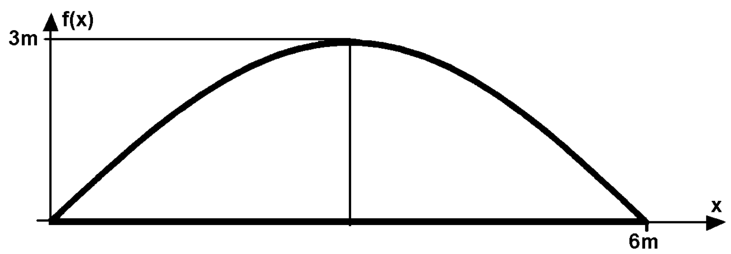
In einem gegebenen Raum sind zwei Drähte gespannt, die wir für die Rechnung näherungsweise durch zwei Geradenstücke beschreiben wollen. Das erste Stück liegt auf der Gerade $g$. Diese ist gegeben durch $\overline{P_1P_2}$ mit $P_1(0,1,1)$ und $P_2(1,0,2)$. Das zweite Stück liegt auf der Geraden $q$, gegeben durch $\overline{Q_1Q_2}$ mit $Q_1(1,1,3)$ und $Q_2(-2,-3,5)$. die folgenden unabhängigen Teilaufgaben sind zu lösen:

(a) Berechnen Sie den kürzesten Abstand zwischen den beiden Geraden.

(b) $P_0$ sei derjenige Punkt der Geraden $g$, der dem Ursprung $O$ am nächsten liegt. Auf $q$ heisst der entsprechende Punkt $Q_0$. Berechnen Sie den Inhalt des Dreiecks $\triangle OP_0Q_0$.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Die Terrasse eines Hauses soll einen sinusförmigen Grundriss bekommen (vgl. Skizze).




Der Aussenrand der Terrasse kann durch die Funktion $f(x) = a\,\sin(k\,x)$ beschrieben werden, wobei die fehlenden Parameter $a$ und $k$ aus der Skizze zu bestimmen sind. (Breite $6\,m$, Tiefe $3\,m$; $m$: Meter, vgl. Skizze. In der Rechnung darf die Masseinheit weggelassen werden.)

(a) Berechnen Sie die $y$–Koordinate des Flächenschwerpunktes $S$ des Grundrisses.

(b) Berechnen Sie den Radius des Krümmungskreises an der Stelle $x$ mit maximalem $y$.

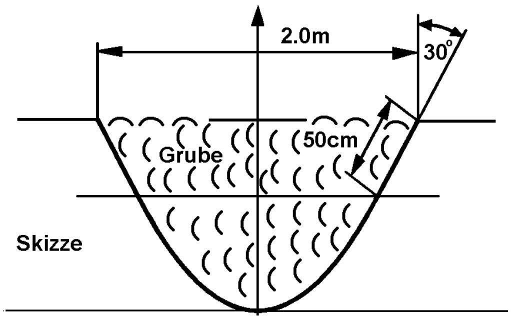
(c) Berechnen Sie näherungsweise die Länge des Terrassengeländers im Grundriss. Beschreiben Sie dabei Ihr Vorgehen bei der Berechnung.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Die Brüder Eleck und Trick wollen sich für das Dachabwasser ihres neuen Elektro–Magazins eine kreisrunde Sickergrube selber bauen. Der Untergrund besteht aus festem Lehm, worin das Wasser nur langsam versickert. Der zur Verfügung stehende Platz erlaubt ihnen einen Grubendurchmesser von $2.0\,m$. Sie gehen davon aus, dass bei einer Hangneigung bis zu $60^o$ gegen die Horizontale keine grossen Auswaschprobleme der Grubenränder zu berürchten sind. Daher beginnen wie mit dem Spaten im Winkel von $30^o$ gegen die Vertikale in die Erde zu stechen. So graben sie ca. $50\,cm$ tief in Spatenrichtung (vgl. Skizze des Grubenquerschnitts). Dann geht ihr Loch ohne Knick in ein Rotationsparaboloid über. (Es ist in Metern zu rechnen. Die Einheiten dürfen weggelassen werden.)

(a) Stellen Sie die Gleichung der Funktionen auf, die den Rand des Grubenquerschnittes beschreiben.

(b) Wieviel Liter Wasser kann die leere Grube aufnehmen? (Berechnen Sie den Voluminhalt der noch leeren Grube mit Hilfe der Integralrechnung.)




**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

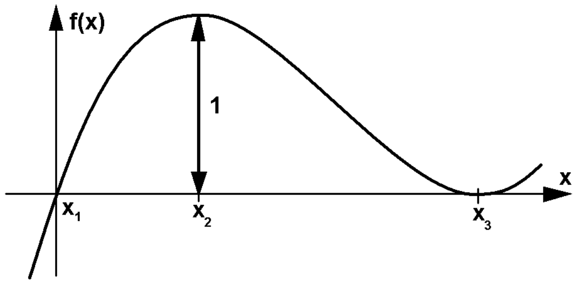
Aufgrund der in der letzten Aufgabe beschriebenen Sickergrube der Brüder Eleck und Trick stellt sich das Problem, wieviel Wasser in einer Sickergrube noch Platz findet, nachdem diese mit Kies gefüllt worden ist. Dieses Problem soll jetzt anhand einer Modellrechnung behandelt werden.
Dabei gehen wir von einer vorhandenen Kiesqualität mit einem mittleren Kieselsteindurchmesser von $d = 2.0\,cm$ aus. Für diese Aufgabe können vereinfacht die Steine als kugelförmig in in dichter Packung angenommen werden (D.h. eine Tetraederpackung, Mittelpunkte benachbarter Kugeln bilden Tetraeder.)
(Es ist in Zentimetern zu rechnen. Die Einheiten dürfen weggelassen werden.)

(a) Berechnen Sie am Modell eines geeigneten schiefen Parallelepipeds (gleichseitiger Spat) der Kantenlänge $2\,r\,n$ ($r =$ Kieselsteinradius resp. Kugelradius) das Verhältnis $v(r)$ zwischen „Inhalt des gegebenen Kiesvolumens im gefüllten Spat“ und „Inhalt des noch leeren Spats“ für sehr grosse $n$ (Grenzfall $n \to \infty$).

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von $v(r)$ annähernd das noch vorhandene Sickervolumen in einer kiesgefüllten Sickergrube in Prozent vom Gesamtvolumen $V_0$. Untersuchen Sie, was mit diesem Restvolumen passiert, falls statt Kies einmal Sand mit dem Korndurchmesser $1.0\,mm$ verwendet wird!

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Ein Geländequerschnitt kann in einem gegebenen Bereich mit einem passenden Massstab durch eine Parabel 3. Ordnung (kubische Parabel) dargestellt werden. Dazu gehört die durch das Polynom 3. Grades gegebene Funktion $f(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$. Der Graph verläuft so wie in der Skizze gezeigt. Es gibt Nullstellen bei $x_0 = 0$ und bei $x_3 = 2$, ein Maximum bei $x_2$ der Grösse $f(x_2) = 1$ sowie ein Minimum bei $x_3 = 2$.




(a) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_3, \ldots, a_0$.

(b) Berechnen Sie den Querschnittsflächeninhalt zwischen $x = 0$ und $x = 2$ (vgl. Skizze.) Falls es nicht gelungen ist, $a_3$ bis $a_0$ zu berechnen, kann dieses Teilproblem mit der andern Funktion $p(x) = \frac{e}{\pi} \cdot (x-2) \cdot (3\,x-2) \cdot x$ gelöst werden.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

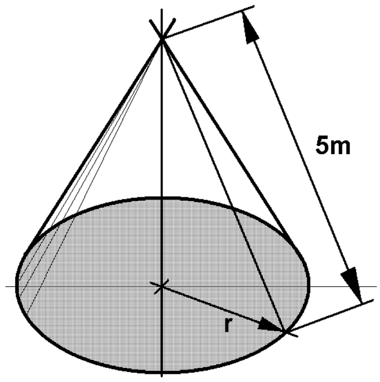
Eine lineare Abbildung $\mathcal{A}$ ist durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegeben. Sie bildet $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\overrightarrow{OP}\,' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab. Den Vektor $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bildet sie in $\overrightarrow{OQ}\,' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ab.

(a) Berechnen Sie die Matrix $A$.

(b) Berechnen Sie das Bild des Punktes $S(2, 4)$.

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**

Die nachstehende Skizze zeigt ein kreisrundes Indianerzelt. Die vorhandenen Baumstangen lassen eine Zeltstangenlänge von $5\,m$ zu.
Berechnen Sie den Radius $r$ an der Basis, sodass das Volumen des Zeltes maximal wird.




— ENDE — ◇ — FIN —