Vordiplom 1, Algebra 1997

Klassen E1B – Abteilung Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
08.00 – 11.00
(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR97/20/302/Di 7.10.97/01

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: 6 Aufgaben auszuwählen und zu lösen.

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 7. Oktober 1997

Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1997, Teil Algebra

Klasse E1B

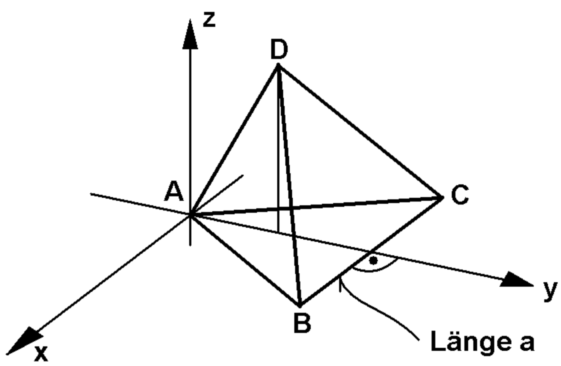
Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Eine Ebene Φ schneidet die Koordinatenachen bei $x = 1$, $y = 2$ und $z = 3$. Zwischen dieser Ebene und den Koordinatenebenen (Grundebenen), die durch die Koordiantenachsen gegeben sind, ist eine exakt hineinpassende Kugel eingeschlossen, die alle vier genannten Ebenen in je einem Punkt berührt.
Berechnen Sie das Volumen dieser Kugel. (Skizze.)

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Ein nicht reguläres Tetraeder hat 5 gleich lange Seiten je der Länge 1 sowie eine Seite der Länge a. Es liegt in einem Koordinatensystem so wie in der Skizze gezeigt:



(a) Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte.

(b) Berechnen Sie den Volumeninhalt des Tetraeders.

(c) Berechnen Sie den kürzesten Abstand der Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Summe $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4\,k^2 - 1}$, $n \in \mathbb{N}$

(a) Berechnen Sie exakt einige aufeinanderfolgende Werte S_n und versuchen Sie damit, eine einfache Summenformel zu finden.

(b) Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Formel mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Alternative: **(4 Punkte)**
Falls es Ihnen nicht gelingt, eine befriedigende Formel für S_n zu finden, so beweisen Sie an Stelle der gefragten Formel die Richtigkeit der nachfolgenden Gleichung:

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n^2$$

(c) Untersuchen Sie das Verhalten von S_n für grosse n. (Berechnen Sie $Lim_{n \to \infty} S_n$.)

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Beschreiben Sie exakt das Gebiet der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, in dem die Ungleichung $|z| < 2\,|z - i|$ erfüllt ist. Setzen Sie dazu $z = x + i\,y$.

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

In der Funktion $z(t) = \dfrac{2}{1 + i\,t}$ sei t eine reelle Variable. Durch $t \longmapsto z(t)$ wird die reelle Achse $\mathbb{R}$ auf eine Kurve in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ abgebildet. Offenbar haben wir hier einen Spezialfall einer Möbiustransformation, eingeschränkt auf die reelle Achse.

(a) Zeichnen Sie in $\mathbb{C}$ die Punkte, die zu $t = 0,\ \ t = \pm 1,\ \ t = \pm 2,\ \ t = \pm\infty$ gehören.

(b) Zeigen Sie, dass die durch $z(t)$ gegebene Kurve ein Kreis in $\mathbb{C}$ ist.

(c) Berechnen Sie alle t–Werte, deren Bilder mit dem Nullpunkt zusammen ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Durch eine affine Abbildung φ wird ein Dreieck $\triangle ABC$ mit $A(0,0)$, $B(2,0)$ und $C(1,3)$ in das Dreieck $\triangle A'B'C'$ mit $A'(\frac{3}{4}, -\frac{5}{2})$, $B'(\frac{7}{4}, -1)$ und $C'(\frac{7}{2}, \frac{23}{4})$ abgebildet. Bezüglich der Ortsvektoren ist φ gegeben durch

$$\varphi : \overrightarrow{OP} \longmapsto \overrightarrow{OP}' = M \cdot \overrightarrow{OP} + \vec{c}$$

Dabei ist M eine symmetrische Matrix.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der gegebenen Dreiecke M und $\vec{c}$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

(c) Durch φ wird der Einheitskreis K um den Ursprung, gegeben durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, auf die Bildfigur K' abgebildet. K' ist eine Ellipse.
Skizzieren Sie die Lage von K' und berechnen Sie die Länge der beiden Halbachsen von K' sowie das Verhältnis der Flächeninhalte von K' und K. Was hat dieses Verhältnis mit den Eigenwerten von M sowie mit der Determinante von M zu tun?

Aufgabe 7 **(12 Punkte)**

Die durch eine Gleichung wie $16\,x^2 - 8\,x\,y + 10\,y^2 = 72$ definierte algebraische Kurve ist im nicht entarteten Fall ein Kegelschnitt. Bekanntlich kann die darin enthaltene quadratische Form $16\,x^2 - 8\,x\,y + 10\,y^2$ durch $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}$ dargestellt werden. Dabei ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = U \cdot D \cdot U^{-1}$ mit $U^{-1} = U^T$ (U unitär).
Durch $P = U^T$ wird $a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2 = (\vec{x}^T \cdot P^T) \cdot D \cdot (P \cdot \vec{x}) = \vec{y}^T \cdot D \cdot \vec{y}$, wobei $\vec{y} = P \cdot \vec{x}$ gesetzt worden ist.

(a) Führen Sie mit Hilfe der Eigenvektoren von A im vorliegenden Falle ein neues Koordinatensystem ein und skizzieren Sie darin die Kurve.

(b) Berechnen Sie den kleinsten positiven Drehwinkel, durch den die erste Achse des alten Koordinatensystems in eine der Achsen des neuen Koordinatensystems gedreht werden kann.

— ENDE —