Vordiplom 1, Algebra 1998

Klassen E1A – Abteilung Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
08.00 – 11.00
(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR98/23/604/Di 6.10.98/01

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn mehr als 6 Aufgaben gegeben sind: 6 Aufgaben auszuwählen und zu lösen.

Hochschule für Technik und Architektur BIEL (HTA) 6. Oktober 1998

Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1998, Teil Algebra

Klasse E1A

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

In einer stark windigen Berggegend soll ein Kran gebaut werden. M ist der Fusspunkt dieses Krans, der einen horizontalen Arm mit dem Radius von 20 Metern hat. Die Höhe vom Fusspunkt bis zu Arm misst 22 Meter. In der Nähe des Krans verläuft sehr geradelinig eine elektrische Leitung. Der nächstgelegene Draht geht vom Punkte P_1 eines ersten Mastes zum Punkte P_2 eines zweiten Mastes. In einem speziell gewählten Koordinatensystem ist M gegeben durch $M(0,0,0)$, P_1 durch $P_1(0,30,10)$ und P_2 durch $P_2(20,40,30)$ (alle Angaben in Metern). Der Leitungsdraht sei für die Rechnung durch eine Gerade g approximiert (jeweils beidseitig der Masten in Leitungsrichtung). Es besteht das Problem zu untersuchen, ob bei einem unvorhergesehenen Umkippen des Krans um den Fusspunkt M Gefahr für die Leitung besteht. Da die Drähte durch eine Gerade approximiert sind und zudem schwingen können, soll im ungünstigsten Fall eine Sicherheitsdistanz von 5 Metern zwischen der Geraden und der Kugelsphäre um M mit dem Kippradius eingehalten werden.

(a) Skizzieren und beschriften Sie die Situation.

(b) Berechnen Sie den kürzesten Abstand von der Geraden g zum Fusspunkt M.

(c) Berechnen Sie den Kippradius des Krans um den Fusspunkt M und entscheiden Sie, ob die Sicherheitsdistanz eingehalten werden kann.

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sowie die Ebenenschar Φ_h:

$$\vec{r}_h(\lambda,\mu) = h \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie von A die Determinante sowie die Spur.

(b) Berechnen Sie von A die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

(c) Berechnen Sie daraus die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von $A^2 = A \cdot A$.

(d) Durch A und A^2 sind zwei lineare Abbildungen gegeben. Suchen Sie die durch A und A^2 erzeugten Bilder der Ebenenschar Φ_h. Was fällt dabei auf?

(e) Durch den Ursprung und die Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Tetraeder definiert. Wie ändert sich sein Volumen bei der Abbildung durch A?

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Bilden Sie sämtliche Permutationen der drei Zahlen $1, 2, 3$ und interpretieren Sie jede Permutation als einen Punkt in einem räumlichen Koordinatensystem. (Skizzieren Sie die Situation.)

(a) Welche Figur entsteht dadurch?

(b) Begründen Sie Ihre Vermutung. (Verwenden sie dazu die Vektoren, die durch die Punktepaare mit kürzestem Abstand gegeben sind.)

(c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S der Figur.

(d) Durch den Ursprung O, die Figur sowie den Punkt $Q(4, 4, 4)$ ist ein Körper definiert. (Der Körper entsteht durch Verbindung benachbarter Punkte der Figur sowie durch Verbindung dieser Punkte mit O und Q.) Berechnen Sie den Volumeninhalt dieses Körpers.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Betrachten Sie in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ ein beliebiges Dreieck mit den Eckpunkten (Zahlen) z_1, z_2, z_3 und dem Schwerpunkt z_s. (Die Eckpunkte sind nummeriert im Uhrzeigersinn. Fertigen Sie sich eine Skizze an!) Wenn Sie über jeder Seite nach aussen das gleichseitige Dreieck errichten, erhalten Sie drei neue Eckpunkte p_1, p_2, p_3 (p_1 soll z_1 gegenüber liegen etc.). Die Schwerpunkte dieser gleichseitigen Dreiecke sind m_1, m_2, m_3 (m_1 im Dreieck mit p_1 etc.).

(a) Berechnen Sie p_1, p_2 und p_3 (zyklisch!).
Hinweis: Interpretieren Sie die komplexen Zahlen als Vektoren. — Z.B. entsteht der Punkt p_1 aus z_2 durch Drehung um z_3 um einen bekannten Winkel. Nutzen Sie hier die Beziehung zwischen Drehverhalten und Multiplikation komplexer Zahlen aus.

(b) Berechnen Sie die Schwerpunkte m_1, m_2, m_3.

(c) Berechnen Sie den Schwerpunkt z_m des Dreiecks mit den Eckpunkten m_1, m_2, m_3 und vergleichen Sie diesen Punkt mit dem Schwerpunkt z_s des ursprünglichen Dreiecks.

(d) Zeigen Sie, dass das durch m_1, m_2, m_3 gegebene Dreieck immer gleichseitig ist, indem Sie zeigen, dass sich z.B. der von m_1 nach m_2 zeigende Seitenvektor um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ in den von m_1 nach m_3 zeigenden Seitenvektor drehen lässt. (Wegen der zyklischen Vertauschung muss z.B. nur dieser Fall behandelt werden.)
Hinweis: Benützen Sie bei der Rechnung Beziehungen wie $1 - e^{\frac{i\pi}{3}} = -e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$, was aus einer Skizze sofort ersichtlich ist.

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Gesucht ist die Menge der Vektoren $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T\} := U^\perp$, die senkrecht stehen auf den gegebenen Vektoren $\vec{v}_1 = (1,2,3,4,5)^T$, $\vec{v}_1 = (2,3,4,5,6)^T$ und $\vec{v}_3 = (3,4,5,6,7)^T$. ($\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ spannen einen Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^5$ auf. $U^\perp$ heisst *Orthogonalraum.*)

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Vektoren aus $U^\perp$. Verwenden Sie dabei die Koordinatenvariablen mir den höheren Indices als Parameter.
Hinweis: Skalarprodukt, Gleichungssystem.

(b) Untersuchen Sie, für welche k der Vektor $(k, 1, -2, 1, k)^T$ zu $U^\perp$ gehört.

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

(a) In einem Koordinatensystem befinden sich auf der x–Achse zwei Punkte $F_1(c, 0)$ und $F_2(-c, 0)$. Die Menge der Punkte $P(x, y)$, für die gilt

$$|d(P.F_1) - d(P, F_2)| = const. = 2\,a$$

bildet eine Kurve mit zwei Ästen, *Hyperbel* genannt. (d steht für Distanz.) Wir setzen $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$. Damit lässt sich aus der Gleichung $|d(P.F_1) - d(P, F_2)| = 2\,a$ durch Umformen die Gleichung $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ gewinnen. Führen Sie diese Umformung durch.

(b) Parallel zu einer geraden Meeresküste fährt ein Schiff. An der Küste befinden sich zwei Stationen A und B der Küstenwache $320\,km$ voneinander entfernt.Ein Koordinatensystem sei so gelegt, dass die x–Achse auf der Küstenlinie liegt, A und B gleich weit vom Ursprung entfernt liegen und die y–Achse Richtung Meer zeigt. (Machen Sie sich eine Skizze.) Da es möglich ist, mit Hilfe der hochentwickelten Navigationstechnik einigermassen exakt Kurs zu halten, weiss man auf dem Schiff infolge einer früheren Positionsbestimmung, dass der Abstand zur Küste $y = 80\,km$ beträgt. Um 10 Uhr ($\pm 1\,\mu sec$) senden die beiden Stationen A und B je ein identifizierbares Radiosignal aus, das sich mit Lichtgeschwindigkeit (ca. $3\,10^5\,\frac{km}{sec}$) ausbreitet. Das Signal von A wird auf dem Schiff $400\,\mu sec$ früher registriert als das Signal von B. Damit lässt sich die Position des Schiffes auf der x–Achse bestimmen. Führen Sie die Positionsbestimmung durch! (Berechnen Sie die zur Laufzeitdifferenz des Signals gehörige Längendifferenz d in Kilometern und lassen Sie dann die Einheiten weg.)
Hinweis: Verwenden Sie den 1. Teil der Aufgabe.

Aufgabe 7 **(12 Punkte)**

$$z(t) = (t + \frac{1}{2}) + i\,(t - \frac{1}{2}))$$

$z(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschreibt eine Kurve in der komplexen Zahlenebene.

(a) Um welche Kurve handlet es sich? Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

(b) Wo liegen die Punkte $w(t) = \frac{1}{2}\,(z(t))^2 - 0.75\,i$, wenn t die reellen Zahlen durchläuft? Skizzieren Sie auch diese Kurven und berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

(c) Berechnen Sie die minimalen Werte von $|Re(z(t)) - w(t)|$ und $|Im(z(t)) - w(t)|$. Was lässt sich daraus für die minimalen Werte von $|z(t) - w(t)|$ folgern?

— ENDE —