Vordiplom 1, Analysis 1998

Klassen E1B – Abteilung Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
08.00 – 11.00
(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR98/20/302/Mo 5.10.98/01

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn mehr als 6 Aufgaben gegeben sind: 6 Aufgaben auszuwählen und zu lösen.

Hochschule für Technik und Architektur BIEL (HTA) 5. Oktober 1998

Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1998, Teil Analysis

Klasse E1B

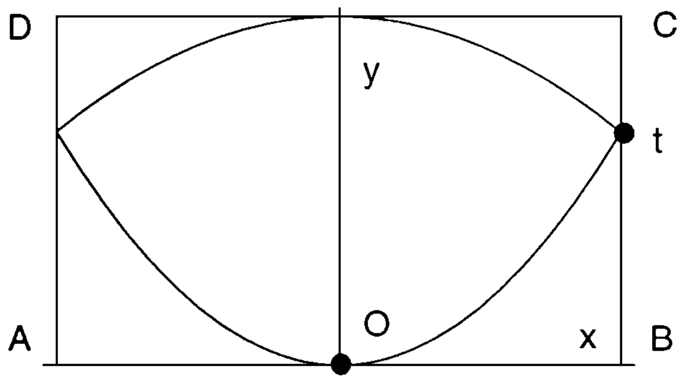
Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Die Funktion $f(x) = 2\,\sin(\frac{x}{2} + 1)$ soll im Intervall $[0, \pi]$ durch die Parabel $p(x) = a\,x^2 + b\,x + x$ angenähert werden, so dass die mittlere quadratische Abweichung zwischen f und p minimal ist.
Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c. *Hinweis: Durch eine geeignete Koordinatentransformation lässt sich die Rechnung vereinfachen.*

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Gegeben sei ist das Rechteck $A(-4,0)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$, $D(-4,4)$ sowie zwei Parabelbögen mit der y–Achse als Symmetrieachse (vgl. Skizze).



(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t die Funktionsgleichungen der beiden Parabeln.

(b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die beiden Parabelbögen begrenzt wird.

(c) Berechnen Sie den Wert von t, für den sich die beiden Parabeln unter einem rechten Winkel schneiden.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Der Verkehrsfluss F gibt an, wieviele Autos pro Zeiteinheit eine bestimmte Stelle passieren. In einem einfachen Modell zum Studium von F wird angenommen, dass alle Autos die gleiche Baulänge l haben und sich mit gleicher Geschwindigkeit v in der gleichen Richtung fortbewegen. Weiter wird angenommen, dass der von einem Auto benötigte Fahrbahnbedarf L (d.h. die Distanz von der vorderen Stossstange des Fahrzeugs bis zur vordern Stossstange des folgenden Fahrzeugs), welcher ein Fahrzeug aus Sicherheitsgründen einnimmt, ebenfalls für alle Autos gleich gross ist. Aus physikalischen Gründen (Bremsweg incl. Berücksichtigung der Reaktionszeit) gilt für L:

$$L = L(v) = l + a\,v + b\,v^2$$

Die Parameter $a > 0$ (Reaktionszeit) und $b > 0$ (Fahrbahntyp) sind fest vorgegeben.

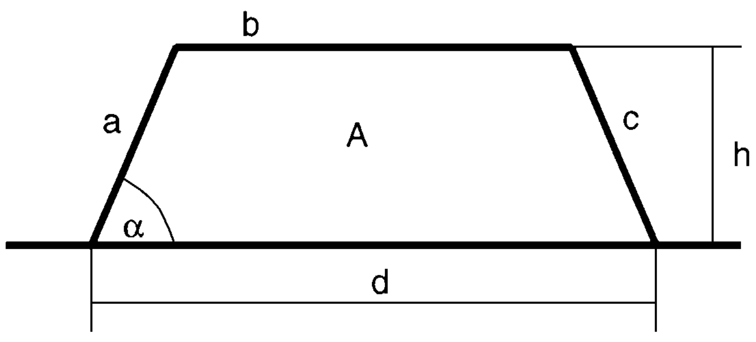
(a) Erklären Sie kurz, warum F sich nach der Formel $F(v) = v/L(v)$ berechnen lässt.

(b) Skizzieren Sie rein qualitativ die Funktion $F(v)$ für $v \geq 0$.

(c) Berechnen Sie den maximalen Verkehrsfluss F_{max} (das Resultat muss möglichst stark vereinfacht werden!) und die zugehörige Geschwindigkeit v_{opt}. Zur Kontrolle: Interessanterweise ist v_{opt} nicht von der Reaktionszeit abhängig.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Im Orient wird von einem Ingenieur beim Studium der Überdachung einer langen, geraden Rennbahn ein trapezförmiger Querschnitt (vgl. Figur) von minimal $A = 400\,m^2$ vorgeschalgen. Mit dieser Quadratmeterzahl können bei der vorgesehenen Nutzung alle Bedingungen erfüllt werden. Nebenbedingungen: Der Winkel α an der Basis soll minimal 60^o, die Basisbreite d minimal $25\,m$, die Höhe h minimal $7\,m$ betragen. Da bei der Grösse des Projektes die Baukosten und damit die Materialkosten wesentlich sind, soll der minimale Umfang $u = a + b + c$ (mit $a = c$) beim begebenen Querschnitt A berechnet werden.



(a) Berechnen Sie u_{min} (ohne Berücksichtigung der Nebenbedingungen).

(b) Überprüfen Sie, ob damit die Bedingungen an α, d und h erfüllbar sind.

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Sei $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin(\omega\, t^2)}{t^2}\, dt$. ($\omega$ ist hier Parameter.)

(a) Entwickeln Sie $f(x)$ in eine Potenzreihe. (Dabei darf von der Potenzreihe von $\sin(x)$ ausgegangen werden.)

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius.

(c) Approximieren Sie $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin(\omega\, t^2)}{t^2}\, dt$ mit Hilfe des vorhergehenden Resultates, indem Sie nur Potenzen von x bis zum Exponenten 10 berücksichtigen.

(d) Berechnen Sie $f(x) = \int\limits_{-a}^{a} \frac{\sin(\omega\, t^2)}{t^2}\, dt$ für eine beliebige Zahl a und beantworten Sie die Frage, ob $f(x)$ zur Klasse der geraden oder der ungeraden Funktionen gehört.

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Ein Werkstück ist wie folgt gegeben:
Durch $z = h(r, \varphi) = \frac{\varphi}{4}$ ist über der Grundebene in Zylinderkoordinaten eine Funktionsfläche gegeben. Der Definitionsbereich ist festgelegt durch $r \in [1, 2]$ und $\varphi \in [0, \frac{3\pi}{2}]$. Zwischen der Grundebene und der Funktionsfläche ist dadurch ein Volumen (Körper) definiert.

(a) Definieren Sie den Körper!

(b) Berechnen Sie den Volumeninhalt des Körpers (zwischen Grundebene und Funktionsfläche mit dem gegebenen Definitionsbereich).

(c) Berechnen Sie bei einem beliebigen festen Winkel φ die Tangentensteigung für die innere und die äussere Randkurve der Funktionsfläche über dem Definitionsbereich. Wie hängt diese Steigung vom Radius r ab?

Aufgabe 7 **(12 Punkte)**

Eine Elipse ist gegeben durch die Parameterdarstellung $\vec{x} = \begin{pmatrix} a\,\cos(t) \\ b\,\sin(t) \end{pmatrix}$.
Wir wählen $a = 2$.

(a) Berechnen Sie die Krümmung als Funktion von t. Dabei ist b Parameter.

(b) Berechnen Sie die Krümmung für $t = 0$ als Funktion von b.

(c) Wie gross muss b gewählt werden (Fall $t = 0$), damit der Krümmungsradius gerade 1 ist? Skizzieren Sie den Fall und berechnen Sie noch die Brennpunkte. Was fällt auf?

— ENDE —