Vordiplom 1, Analysis, 1999

Klasse E1b - Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:

08.00 – 11.00

(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR99/11/302/Mo 20.9.99/0800

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 20. September 1999

Vordiplomprüfung 1 in Analysis 1999

Klasse E1b

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

(a) Berechnen Sie von $f(x,y) = x^4 - 2\,x^2 + (2\,x^2 - 1)\,y^2$ die Extrema unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Sei $G = [-1,1] \times [-1,1]$. Zu $f(x)$ wird eine Konstante c addiert, so dass das Integral $\int\limits_G f(x,y)\,dG = 0$ wird. Wie gross muss c gewählt werden?

Hinweis: Für $y > 0$ kann z.B. y^2 geeignet substituiert werden. (Es gibt mehr als eine Möglichkeit ...)

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $P_1(2/3)$, $P_2(7,2)$ und $P_3(5/6)$. Im Innern befindet sich ein Punkt $P(x,y)$, der zu P_i einen Abstand d_i hat ($i = 1,2,3$).

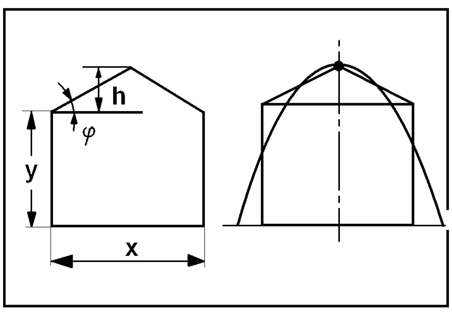
(a) Berechne $P(x,y)$ so, dass die Summe der Abstandquadrate $\sum\limits_{i=1}^{3} d_i^2$ minimal wird.

(b) Entscheide mit Begründung, ob es sich bei P um einen der folgenden Punkte handelt: Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt oder Inkreismittelpunkt.

(c) Begründe den vorhin gefundenen Sachverhalt allgemein.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Hauses. Der Umfang $u = 40\,m$ ist gegeben. x, y, h sind unbekannt.



(a) Berechne x, y, h so, dass der Flächeninhalt A maximal wird. Berechne auch A_{max}.

(b) Bestimme die Funktionsgleichung der eingezeichneten Parabel durch die Dachspitze, wenn die Parabel mit der x–Achse ebenfalls den Flächeninhalt A_{max} umschliesst.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Die grösste Nullstelle $x_0(\lambda)$ von $y(x,\lambda) = x^3 + 2(\lambda^2+1)\,x + 2\sqrt{6}\,\lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$ soll berechnet werden.

(a) Zeige, dass $y(x,\lambda) = y_\lambda(x)$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ genau eine Nullstelle hat.
Hinweis: Untersuche die Ableitung $y_x{}'(x,\lambda)$.

(b) Bestimme die grösste Nullstelle von $x_0(\lambda)$.
Hinweis: Es muss gelten: $y_0(x_0(\lambda),\lambda) = 0 \ \Rightarrow\ y_\lambda{}' + y_x{}' \cdot x_\lambda{}' = 0$ (Kettenregel)
$\Rightarrow\ x_\lambda{}' = \ldots = 0$ (Extremum!)
Setze das so berechnete λ in $y(x,\lambda)$ ein ...
verifiziere, dass tatsächlich die grösste und nicht die kleinste Nullstelle gefunden worden ist.

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Für das Integral $\int\limits_0^1 \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2}\,dx$ ist keine elementare Stammfunktion bekannt. Um trotzdem zu einer Abschätzung zu kommen, gehen wir wie folgt vor:

(a) Benütze die Potenzreihenentwicklung für den Cosinus für $x_0 = 0$, um den Integranden wie folgt zu approximieren:

$$f(x) = \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2} \approx \sum_{k=0}^{10} a_k\,x^k$$

(b) Versuche, für die Approximation von $f(x),\ x \in [0,1]$, den Fehler abzuschätzen.

(c) Verwende das gewonnene Resultat, um $\int\limits_0^1 \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2}\,dx$ zu approximieren.

(d) Versuche, für $\int\limits_0^1 \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2}\,dx$ den Fehler abzuschätzen.

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Im Graphen von $f(x) = x^2$ wird im Punkt $x = 0$ der Krümmungskreis eingezeichnet (Krümmungsradius ρ). P_0 sei ein Punkt auf der Kreisperipherie, $P_0 \neq (0,0)$. Eine Kreistangente in P_0 mit dem Steigungswinkel φ, die nicht parallel zu einer Koordinatenachse liegt, schneidet die parabel in zwei Punkten P_1, P_2.

(a) Bestimme P_1 und P_2 für $\varphi = \frac{\pi}{6}$. (Numerisches Resultat genügt.)

(b) Bestimme den Inhalt A der Fläche zwischen der Parabel und der Tangente (zwischen den Punkten P_1 und P_2).

(c) Entscheide, ob $A < 3$ gilt oder nicht.

Aufgabe 7 **(12 Punkte)**

Ein Gebiet D stellt die Oberfläche eines Sees dar, welche in einem xy–Koordinatensystem plaziert wird (x und y in km). die Tiefe in Metern unterhalb des Punktes (x, y) ist gegeben durch

$$z = f(x, y) = 300 - x^2 - 2\,y^2$$

(a) Ein Boot befindet sich im Punkt $(10, 10)$ (d.h. am Ufer).
In welcher Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1(x,y) \\ a_2(x,y) \end{pmatrix} = \vec{a}(10,10) = \begin{pmatrix} a_1(10,10) \\ a_2(10,10) \end{pmatrix}$ muss es fahren, damit die *Tiefe möglichst rasch abnimmt?*

(b) Bestimme $\vec{a}(x, y) = \begin{pmatrix} a_1(x,y) \\ a_2(x,y) \end{pmatrix}$ für einen beliebigen Punkt (x, y).

(c) Der Kapitän wählt den Kurs so, dass in jedem Punkt die Richtung identisch ist mit der Richtung der stärksten Tiefenzunahme resp. Tiefenabnahme.
$\rightsquigarrow \ \dfrac{d\,x(t)}{d\,t} = a_1(x, y), \ \dfrac{d\,y(t)}{d\,t} = a_2(x, y)$. Bestimme die Parameterdarstellung der Fahrtkurve, wenn das Schiff sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $(10, 10)$ befunden hat.

Hinweise: Normiere den Richtungsvektor nicht. Benütze folgende bekannte Tatsache: $(h(x) + c)' = (a \cdot e^{k \cdot x} + c)' = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x} = k \cdot h(x)$.

(d) Berechne näherungsweise die Länge der Fahrtkurve vom Punkt $(10, 10)$ bis zum Punkt mit der grössten Tiefe.

— ENDE —