Vordiplom 2, Mathematik, 1999

Klasse E2b - Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
14.00 – 17.00
(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT–Crash vom Herbst 1999

WIR99/21/306/Di 20.9.99/1400

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 20. September 1999

Vordiplomprüfung 1 in Mathematik 1999

Klasse E2b

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Ein Massenpunkt wird gegen die Kraft $\vec{F} = (-D \cdot \vec{x}) - (m\,g\,\vec{k}) = \vec{F_1} - \vec{F_2}$ längs einer Schraubenlinie C verschoben. (Spannkraft $\vec{F_1}$, Schwerkraft $\vec{F_2}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$.)

$$C: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(t) \\ R \cdot \sin(t) \\ \dfrac{t}{2\,\pi} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, n\,2\,\pi], \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Berechne das Wegintegral (d.h. die geleistete Arbeit) für $n = 1, 2, 3$.

(b) Welche Komponenten von $\vec{F}$ kann man ändern, ohne das Resultat zu beeinflussen?.

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Löse die Differentialgleichung

$$x^2 - y^2 + 2\,x \cdot y \cdot y' = 0$$

und skizziere die Kurvenschar. Um welchen Typ von Kurven handelt es sich bei den Lösungen?

Hinweis: Stelle die D'Gl. für $x, y \neq 0$ als explizite D'Gl. dar und substituiere $u := \dfrac{y}{x}$.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

(a) Löse das Anfangswertproblem

$$y'' + 4\,y' + 4\,y = \sin(t) + \sinh(2\,t), \ \ y(0) = y'(0) = 0.$$

(b) Diskutiere das Verhalten der Lösung für grosse t (d.h. berechne $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$).

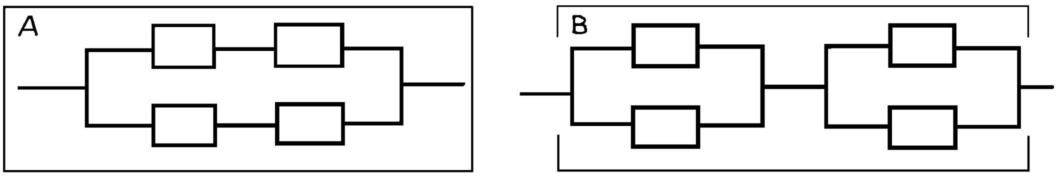
Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Zuverlässigkeit von Systemen

In den folgenden Teilaufgaben arbeitet jedes Element mit einer gegebenen Zuverlässigkeit $p \in [0, 1]$.

(a) Bestimme die Zuverlässigkeit $S(p)$ von 2 in Serie geschalteten Systemen.

(b) Für die Zuverlässigkeit von 2 parallel geschalteten Systemen gilt: $P(p) = p\,(2 - p)$. Leite diese Formel her.

(c) 

Berechne für die beiden skizzierten Systeme A und B die Zuverlässigkeiten $A(p)$ und $B(p)$. Vergleiche die Werte $A(0.9)$ und $B(0.9)$.

(d) Beweise analytisch, dass das eine System immer zuverlässiger ist als das andere für alle $p \in (0, 1)$.

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Ein Gebiet D stellt die Oberfläche eines Sees dar, welcher in einem xy–Koordinatensystem plaziert ist (x und y in km). Die Tiefe in Metern unterhalb des Punktes (x, y) ist gegeben durch

$$z = f(x, y) = 400 - 2\,x^2 - x\,y - y^2$$

(a) Ein Boot befindet sich im Punkte $(0, 20)$. In welche Richtung $\vec{a}(x, y) = \begin{pmatrix} a_1(x, y) \\ a_2(x, y) \end{pmatrix}$ muss es fahren, damit die *Tiefe möglichst rasch zunimmt?*

(b) Der Kapitän wählt den Kurs so, dass in jedem Punkt die Richtung identisch ist mit der Richtung der stärksten Tiefenzunahme resp. Tiefenabnahme.
$\rightsquigarrow \quad \dfrac{d\,x(t)}{d\,t} = a_1(x, y), \quad \dfrac{d\,y(t)}{d\,t} = a_2(x, y)$. Bestimme die Parameterdarstellung der Fahrtkurve, wenn das Schiff sich im Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $(0, 20)$ befand.
Hinweis: Normiere den Richtungsvektor nicht.

(c) Skizziere die Fahrtkurve.

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Seien $C_1,\ C_2$ und C drei einfach geschlossene Kurven im $\mathbb{R}^2$, die stückweise stetig sind und den Ursprung umschliessen. C_1 und C_2 schneiden sich nicht.

(a) Zeige, dass gilt: $\oint\limits_{C_1} M\,dx + N\,dy = \oint\limits_{C_2} M\,dx + N\,dy$
Hinweis: Satz von Green.

(b) Zeige, dass gilt: $\oint\limits_{C} M\,dx + N\,dy = 2\,\pi$

(c) Berechne $\oint\limits_{C} (e^x - 3\,y^2)\,dx + (e^y + 4\,x^2)\,dy$, wobei C der Kreis $x^2 + y^2 = 4$ ist.
Hinweis: Verwende nach Anwendung eines naheliegenden Integralsatzes Polarkoordinaten, oder nütze allfällige Symmetrien aus.

Aufgabe 7 **(12 Punkte)**

Sei S die Kugelsphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ \ \vec{F} = \begin{pmatrix} x^3 + x^2 + x + 2\,y\,z \\ y^3 + y^2 + y + 2\,x\,z \\ z^3 + z^2 + z + 2\,x\,y \end{pmatrix}.$

(a) Bestimme so einfach wie möglich $\int\limits_S \vec{F}\,d\vec{S}$.

(b) Schneidet man die Kugel der xy–Ebene entlang entzwei, so entsteht auf der einen Seite der positiven z–Achse ein Körper der Oberfläche S^*.
Bestimme so einfach wie möglich $\int\limits_{S^*} \vec{F}\,d\vec{S}$.

— ENDE —