Vordiplom 2, 2000

Klasse B2

Mathematik

Zeit: 180 Minuten

WIR2000/18/RIIc/Mo 18.9.00/1400

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 18. September 2000

Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 2000

Klasse B2

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

In der folgenden Aufgabe sind die Masse in Decametern angegeben. Die Masseinheit dient nur dem Verständnis und darf in der Rechnung weggelassen werden.

In einem Plan eines Geometers ist die Lage einer im Boden versenkten Röhre mit dem äussern Radius 5 durch zwei Punkte mit den folgenden Koordinaten definiert: $P_1(3/5/2)$, $P_2(4/16/9)$. Man weiss, dass die Röhre längs einer Geraden geführt ist mit einer axialen Abweichung von ± 0.03.

Nun soll in der selben Zone eine zweite Röhre mit demselben Durchmesser und derselben axialen Toleranz verlegt werden. Diese neue Röhre ist durch die Koordinaten $Q_1(-6, -2, 4)$, $Q_2(6, 14, 8)$ bestimmt.

(a) Berechne den kleinsten Abstand zwischen den theoretischen Achsen und entscheide, ob eine gerade Verlegung der zweiten Leitung überhaupt möglich ist. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(b) Untersuche, ob die Achse der neuen Röhre oberhalb oder unterhalb der Achse der schon vorhandenen Röhre verläuft. (Das Resultat ist zu begründen.)

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig. Sie werden alle gleich bewertet. Alle Teilschritte der Lösung sind schriftlich auf dem Lösungsblatt festzuhalten.

(a) Bestimme von Hand die Steigung der folgenden Funktion an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$: $\quad f_a(x) = 5\,x^5 - 4\,x^{\alpha} + \frac{1}{2}\,x^2 - 4\,x + 9$

(b) Differenziere von Hand: $\quad f_b(x) = 3\,x^5 - \frac{2}{x^2} + ln(x) + \frac{\cos(x) - \sin(x)}{2}$

(c) Berechne von Hand die zweite Ableitung: $f_b(x) = 3\,x^5 - \frac{2}{x^2} + ln(x) + \frac{\cos(x) - \sin(x)}{2}$

(d) Berechne von Hand die erste Ableitung von Hand:

$$f_d(x) = \cos(x) \cdot e^x - \frac{1}{2}\,\cos(2\,x + \alpha) + x\;ln(x)$$

(e) Berechne von Hand die erste Ableitung: $f_e(x) = \cos(\sin(x)) - ln(x^3) + \dfrac{ln(x)}{x^2}$

(f) Berechne numerisch den Winkel zwischen den Tangenten an den Graphen der folgenden Funktion in den Punkten $x = 100$ und et $x = -100$: $f_f(x) = -2\,x^4 + 6\,x^2 + 8$. Das gefundene Resultat ist zu kommentieren.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig. Sie werden alle gleich bewertet. Alle Teilschritte der Lösung sind schriftlich auf dem Lösungsblatt festzuhalten.

(a) Integriere von Hand: $\int 5\,x^5 - 4\,x^\alpha + \dfrac{1}{2}\,x^2 - 4\,x + 9\,dx = ?$

(b) Integriere von Hand: $\int\limits_0^{t^2} x^2\,dx = ?$

(c) Integriere von Hand: $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{1}{\omega}\,\cos(\omega t + \beta)\,dt = ?$

(d) Integriere von Hand: $\int\limits_{-1}^{1} y \cdot e^y\,dy = ?$

(e) Integriere von Hand: $\int\limits_0^{1} x \cdot e^{(x^2)}\,dx = ?$

(f) Integriere von Hand: $\int\limits_a^{t} \dfrac{d}{d\,x} \log(e^{x^2} + 2\,x\,\cos^2(3\,x - 2))\,dx = ?$

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion durch das Polynom $p(x) = \dfrac{2}{27}\,x^4 - \dfrac{4}{9}\,x^3$. Bestimme folgendes:

(a) Faktorisiere das Polynom und berechne dann die Nullstellen.

(b) Berechne die Extrema. (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(c) Berechne allfällige Wendepunkte ($p''(x) = 0$) und die Steigung der Wendetangenten (Tangenten in den Wendepunkten). (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(d) Definitionsbereich D_p und Wertebereich W_p?

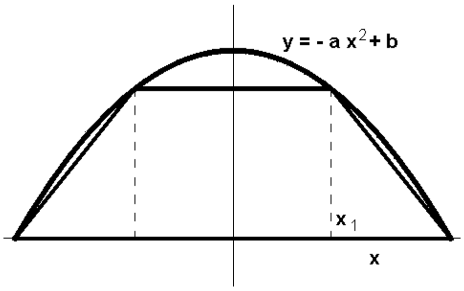
(e) Skizziere den Graphen der Funktion.

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

(a) Der Grundriss eines Hauses, das in einen Abhang hineingebaut wird, soll nach dem folgenden Prinzip festgelegt werden: Zwischen der Parabel

$$y = f_5(x) = -a\,x^2 + b \quad (a, b > 0)$$

und der x–Achse wird ein Trapez eingeschrieben (vgl. Skizze).



Berechne die x–Koordinate x_1 des rechten oberen Punktes des Trapezes mit dem maximal möglichen Inhalt. (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(b) Das Volumen des Aushubes beträgt schätzungsweise etwa einen Viertel des Volumens, das entsteht, wenn man die Parabel um die x–Achse rotieren lässt. Berechne dieses Volumen. (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(c) Berechne die Resultate für $a = \dfrac{1}{4}$ und $b = 36$.

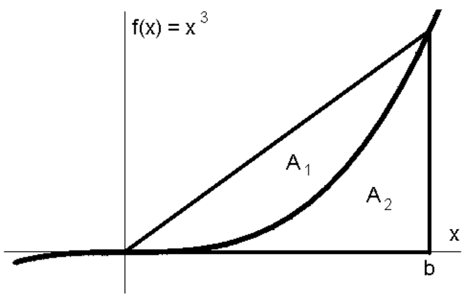
Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

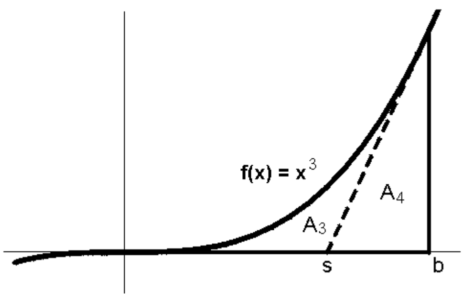
Gegeben ist die Funktion $f(x) := x^3$ und das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(0/0)$, $B(b/0)$ und $C(b/f(b))$. (Vgl. Skizze unten.)

(a) Der Graph der Funktion teilt die Fläche dieses Dreiecks in zwei Teile A_1 und A_2 (vgl. Skizze). Berechne das Verhältnis der Inhalte von A_1 und A_2 in Anhängigkeit von b.

(b) Die Tangente an den Funktionsgraphen in C schneidet die x–Achse bei der Koordinate s. Dadurch wird die Fläche unter dem Graphen in zwei Teile A_3 und A_4 geteilt (vgl. Skizze). Berechne s.

(c) Berechne das Verhältnis der Inhalte von A_3 und A_4 in Anhängigkeit von s.





— ENDE — ◇ — FIN —