Vordiplom 1, Analysis, 2000

Klasse E1b

Mathematik

Zeit: 180 Minuten

WIR2000/15/302/Mo 18.9.00/0800

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 18. September 2000

Vordiplomprüfung 1 in Analysis 2000

Klasse E1b

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, \; x \longmapsto 5\,(x^2 - 2\,x - 15)$ und $g: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$. Die Graphen beider Funktionen schneiden einander in zwei Punkten auf der x–Achse. Im rechten Schnittpunkt fallen ausserdem die Tangenten an die beiden Kurven zusammen.

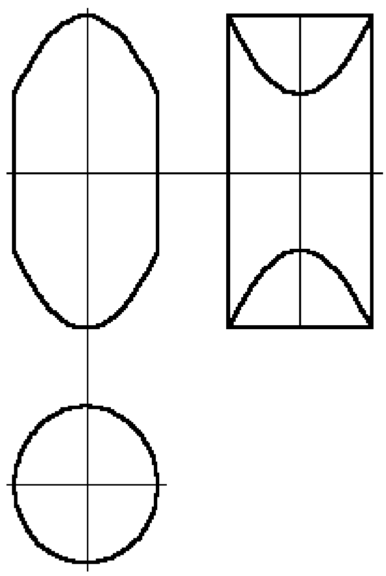
(a) Berechne a, b und c exakt. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

(b) Zeichne die Graphen der beiden Kurven im Intervall $[-4, 6]$.

(c) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den beiden Kurven eingeschlossen wird.

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Ein rotationssymmetrischer Schwimmkörper, der ausser an den beiden Deckflächen die Form eines Zylinders hat, ist derart in ein Koordinatensystem gestellt, dass die z–Achse gleich der Rotationsachse ist. Der Zylinderradius ist gleich 5 und die beiden Deckflächen des Körpers werden durch die Funktion $z = f_d(x,y) = -x^2 + 50$ und $z = f_g(x,y) = -f_d(x,y)$ gegeben. (Vgl. Skizze mit Grundriss, Aufriss und Seitenriss.)



(a) Berechne das Volumen des Körpers exakt. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

(b) Berechne die Oberfläche des Körpers. (Wenn eine exakte Berechnung nicht möglich ist, genügt auch eine numerische Näherung. Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

Zusatzaufgabe (kann weggelassen werden): **(6 Punkte)**

(c) Der Körper wird axial zur x–Achse zylindrisch durchbohrt. Es entsteht ein Loch mit dem Durchmesser 5. Berechne das Restvolumen des Körpers. (Wenn eine exakte Berechnung nicht möglich ist, genügt auch eine numerische Näherung. Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen $f(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $g(x) = 2 - f(x)$.

(a) Skizziere $f(x)$ und $g(x)$ und bezeichne $f(x)$ mit dem sonst üblichen Namen.

(b) Die Funktion $g(x)$ soll im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ durch $u(x) = a \cdot \cos(x) + b$ approximiert werden. Bestimme die Parameter a und b so, dass $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - u(x))^2 \, dx$ minimal wird. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein. Numerische Werte genügen.)

(c) $u(0) = ?$, $u(-\dfrac{\pi}{2}) = ?$, $u(\dfrac{\pi}{2}) = ?$

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktione $f(x)$, die einen Kreisbogen mit Radius $r = 1$ sowie Kreismittelpunkt $(x_M/y_M) = (0/1)$ beschreibt und durch den Punkt $P(0/2)$ geht. Weiter ist die Funktion $g(x) = k \cdot \cos(\alpha\, x + \beta) + c$ gegeben. k, α, β und c sind Parameter.

Die Parameter k, α, β und c sind so zu bestimmen, dass die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in P möglichst gut zueinander passen. Damit ist gemeint, dass die folgenden Kriterien erfüllt sein müssen: Die Graphen von f und g fallen im Punkte P zusammen, haben in P eine gemeinsame Tangente und auch dieselbe Krümmung.

Durch diese drei Bedingungen kann man drei Parameter als Funktion des vierten Parameters bestimmen.

(a) Bestimme k, β und c als Funktion von α. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

(b) Bestimme anschliessend die Potenzreihenentwicklungen von f und von $g = g_\alpha$. (Die Reihen können mit Hilfe von Tabellenbüchern gefunden werden. Die Angabe von Gliedern bis zur Ordnung 10 genügen.)

(c) Entscheide anhand der nun vorliegenden Potenzreihenentwicklung von $g_\alpha(x) - f(x)$, was mit $|g_\alpha(x) - f(x)|$ passiert, wenn α gegen 0 strebt.

(d) Berechne damit $\lim\limits_{\alpha \to 0} g_\alpha(x)$ und skizziere in diesem Falle f und g_α.

(e) Beschreibe den Einfluss von α auf das Annäherungsverhalten von $g_\alpha(x)$ an $f(x)$

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = 3\,x^2 - 5\,x\,y + 4\,y^2 - y + x - 1$ im Gebiet G, $G = I \times I = [-1,1] \times [-1,1]$.

(a) Berechne die Extrema oder Sattelpunkte im Innern und auf dem Rand.

(b) Durch den Rand ∂G von G lassen sich vier Geraden legen. Untersuche, in welchen Punkten P_i auf diesen vier Geraden die maximale Richtungsableitung lokale Extrema hat. (Untersuche dazu die Länge des Gradienten.) Entscheide, ob die gefundenen Extrema Minima oder Maxima sind.

(c) Skizziere G mit den berechneten Extrema von f. Zeichne ebenfalls die berechneten Punkte P_i ein. Verbinde je zwei sich entsprechende Punkte auf gegenüberliegenden Geraden und kontrolliere, ob sich die Verbindungsgeraden in einem ausgezeichneten Punkt kreuzen. Was stellt man fest? Ist etwas bemerkenswert?

(d) Bestimme, in welchen Punkten der Geraden $y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}$ in der Grundebene $f(x,y)$ extremal wird. (Die Punkte auf dem Rand sind auch in die Betrachtung einzubeziehen.)

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Ein in der Tropenzone geplantes Stadion hat nach dem Vorbild einer römischen Arena die Form eines Zylinders mit einem Durchmesser von 250 Metern und einer Mantelhöhe von 25 Metern. Um die heutzutage gefürchtete UV–Strahlung abzuhalten wird vorgeschlagen, das Bauwerk zeltartig mit Hilfe eines bis zum Boden reichenden Rotationsparaboloides zu überdachen, wobei dieses geplante Zelt den oberen Zylinderrand berührt. (Skizziere die Situation!)

(a) Berechne den Zeltradius und die Zelthöhe, wenn der umbaute Raum minimal werden soll.

(b) Berechne im Falle des minimalen Volumens die Mantellänge vom Boden bis zum obersten Punkt des Zeltes numerisch.

(c) Berechne den Zeltradius und die Zelthöhe, wenn die Zeltoberfläche minimal werden soll. (Falls diese Aufgabe auf den ersten Blick zu schwierig erscheinen mag, so versuche man zuerst, die Oberfläche des einfachst möglichen Rotationsparaboloids zu berechnen. Für die Integration können Hilfsmittel wie Tabellen etc. verwendet werden.)

— ENDE — ◇ — FIN —